

# 社会と数理科学

## 第三回

新居 俊作

# 面積

# 面積

平行四辺形や三角形等の切り貼りして長方形に変形出来る図形以外の図形の面積をどう定めるか？

# 面積

平行四辺形や三角形等の切り貼りして長方形に変形出来る図形以外の図形の面積をどう定めるか？

## 考え方

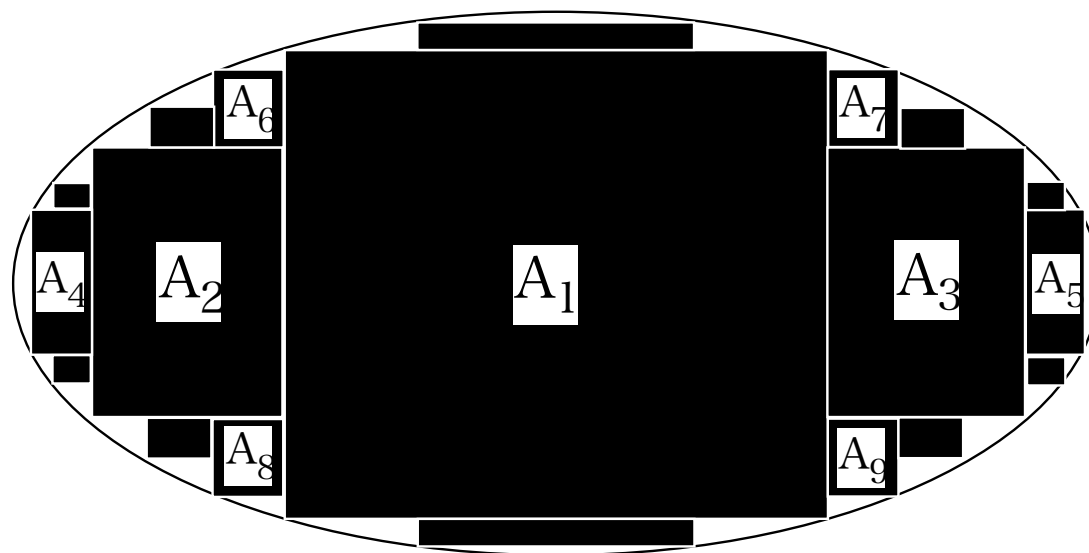
図形を長方形で埋め尽くして、埋め尽くすのに使った長方形の面積の和で面積を定義する。

# 面積

平行四辺形や三角形等の切り貼りして長方形に変形出来る図形以外の図形の面積をどう定めるか？

## 考え方

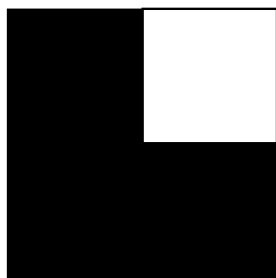
図形を長方形で埋め尽くして、埋め尽くすのに使った長方形の面積の和で面積を定義する。



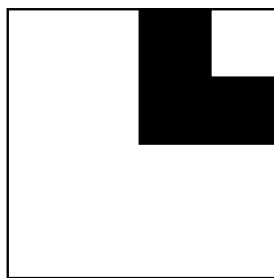
$$\text{面積 } S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

# 面積

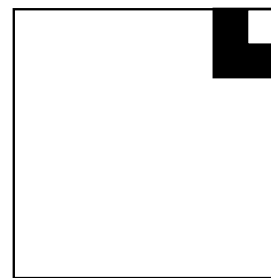
面積



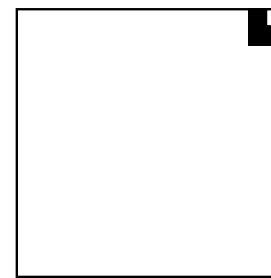
$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$



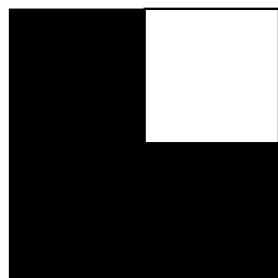
$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^2$$



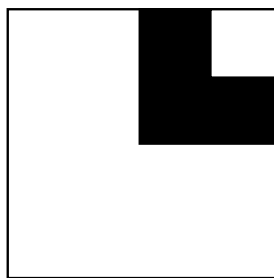
$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^3$$

# 面積

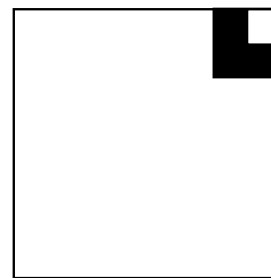
面積



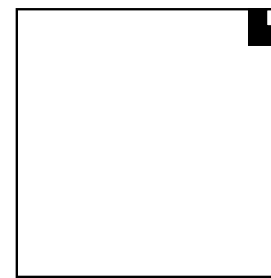
$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

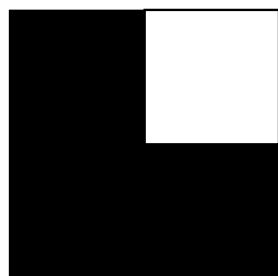


$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^2$$

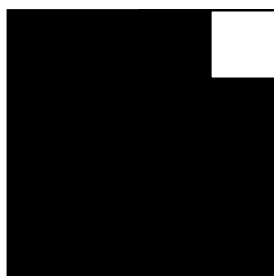


$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^3$$

面積



$$1 - \frac{1}{4}$$



$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^2$$



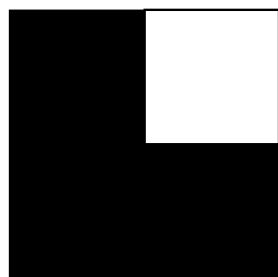
$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^3$$



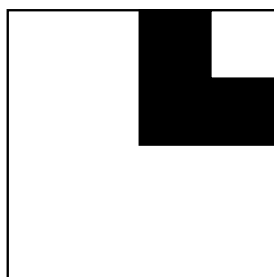
$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

# 面積

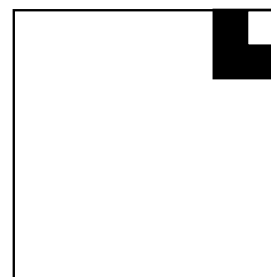
面積



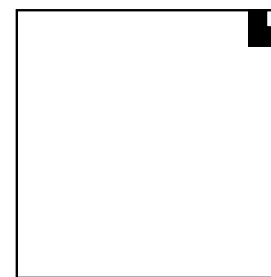
$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

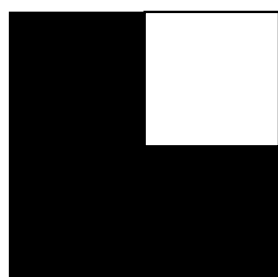


$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^2$$



$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^3$$

面積



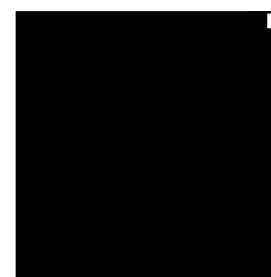
$$1 - \frac{1}{4}$$



$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^2$$



$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^3$$



$$1 - \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

従って、

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} = 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n$$



# 面積

これは高校で習った等比数列の和の公式と一致する。

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

# 面積

これは高校で習った等比数列の和の公式と一致する。

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

これより、

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 1$$

# 面積

これは高校で習った等比数列の和の公式と一致する。

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

これより、

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

# 数列の極限

# 数列の極限

## 定義

無限に続く数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  について、 $n$  を無限に大きくする時に  $a_n$  が実数  $\alpha$  に限りなく近づくとき、数列  $a_n$  は  $\alpha$  に収束すると言います。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書く。

# 数列の極限

## 定義

無限に続く数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  について、 $n$  を無限に大きくする時に  $a_n$  が実数  $\alpha$  に限りなく近づくとき、数列  $a_n$  は  $\alpha$  に収束すると言います。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書く。

## 例

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (|r| < 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty \quad (r > 1)$$

# $\varepsilon$ - $N$ 論法

# $\varepsilon$ - $N$ 論法

## 定義

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  が  $\alpha$  に収束する ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ) とは、



# $\varepsilon$ - $N$ 論法

## 定義

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  が  $\alpha$  に収束する ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ) とは、  
「どんなに小さな正の数  $\varepsilon$  を与えられても、 $N$  を  $\varepsilon$  に応じて大きく取れば、 $n \geq N$  となる  $n$  については  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ」

# $\varepsilon$ - $N$ 論法

## 定義

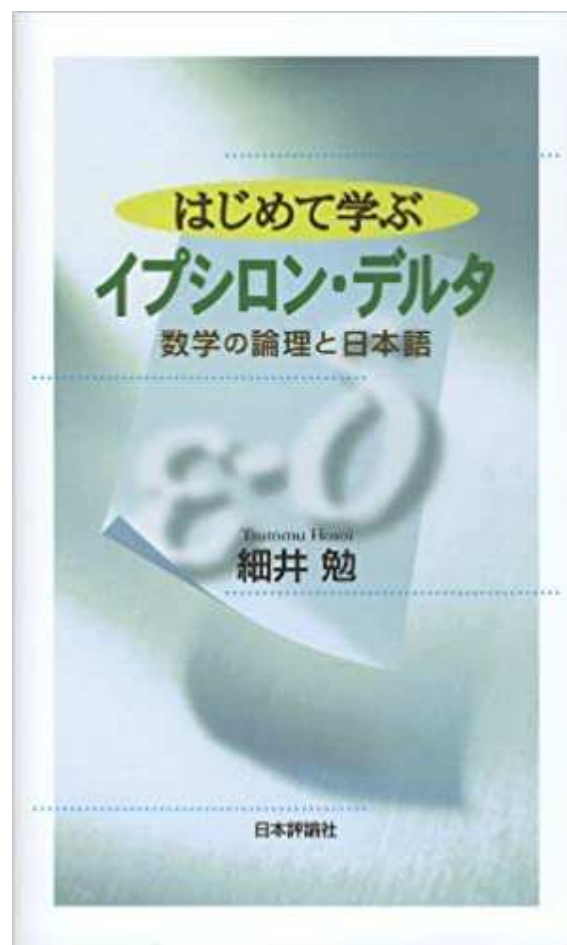
数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  が  $\alpha$  に収束する ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ) とは、

「どんなに小さな正の数  $\varepsilon$  を与えられても、 $N$  を  $\varepsilon$  に応じて大きく取れば、 $n \geq N$  となる  $n$  については  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ」

こととする。

# 参考書

現代数学での極限の考え方についての参考書：



# 数列の極限

## 定義

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  について、和  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  を考えるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$$

ならば、級数  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  は収束すると言い、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

と書く。

# 数列の極限

## 定義

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  について、和  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  を考えるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$$

ならば、級数  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  は収束すると言い、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

と書く。すなわち、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

である。

# 数列の極限

## 定義

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  について、和  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  を考えるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$$

ならば、級数  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  は収束すると言い、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

と書く。すなわち、

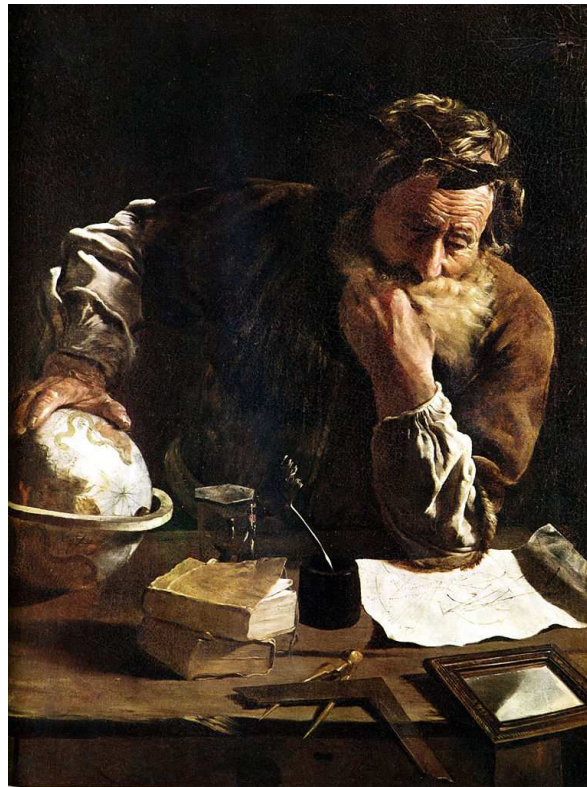
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

である。

## 例

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$$

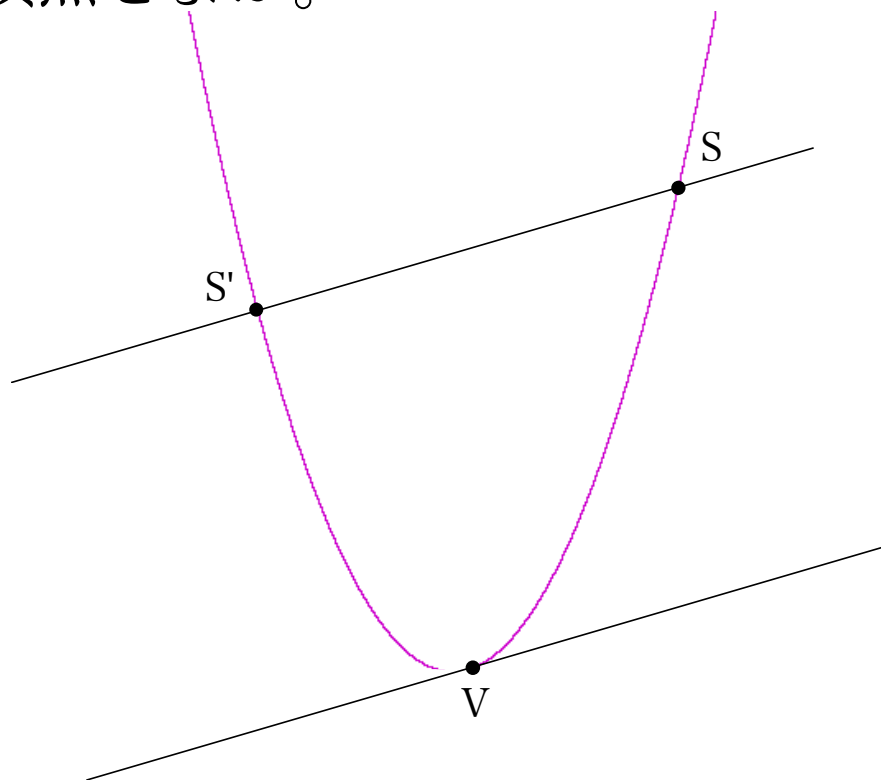
# アルキメデスによる放物線の求積



# アルキメデスによる放物線の求積

## 定義

放物線の、その上の二点  $S, S'$  を通る直線で切り取られる部分を切片と呼ぶ。また、直線  $SS'$  と平行な接線を持つ点  $V$  をこの切片の頂点とよぶ。



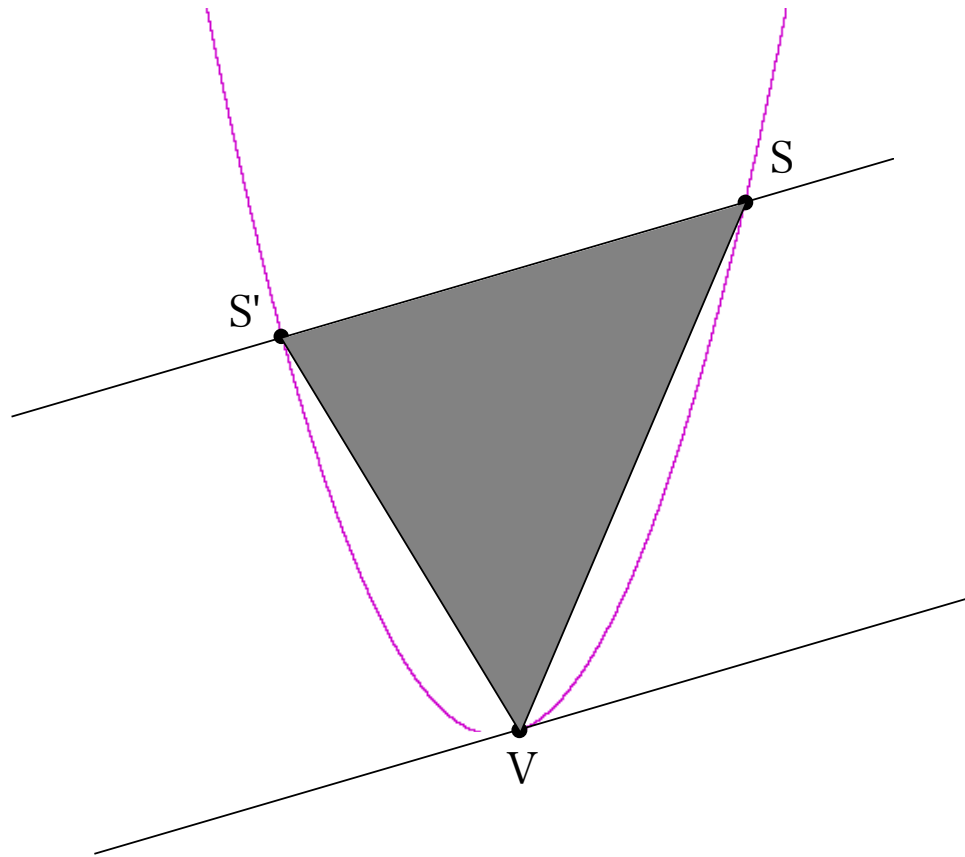


# アルキメデスによる放物線の求積

下図の  $\triangle VSS'$  の面積と、 $\triangle VCS$  の面積 +  $\triangle VC'S'$  の面積を比較する。但し  $C, C'$  は  $CS, C'S'$  で切り取られる切片の頂点とする。

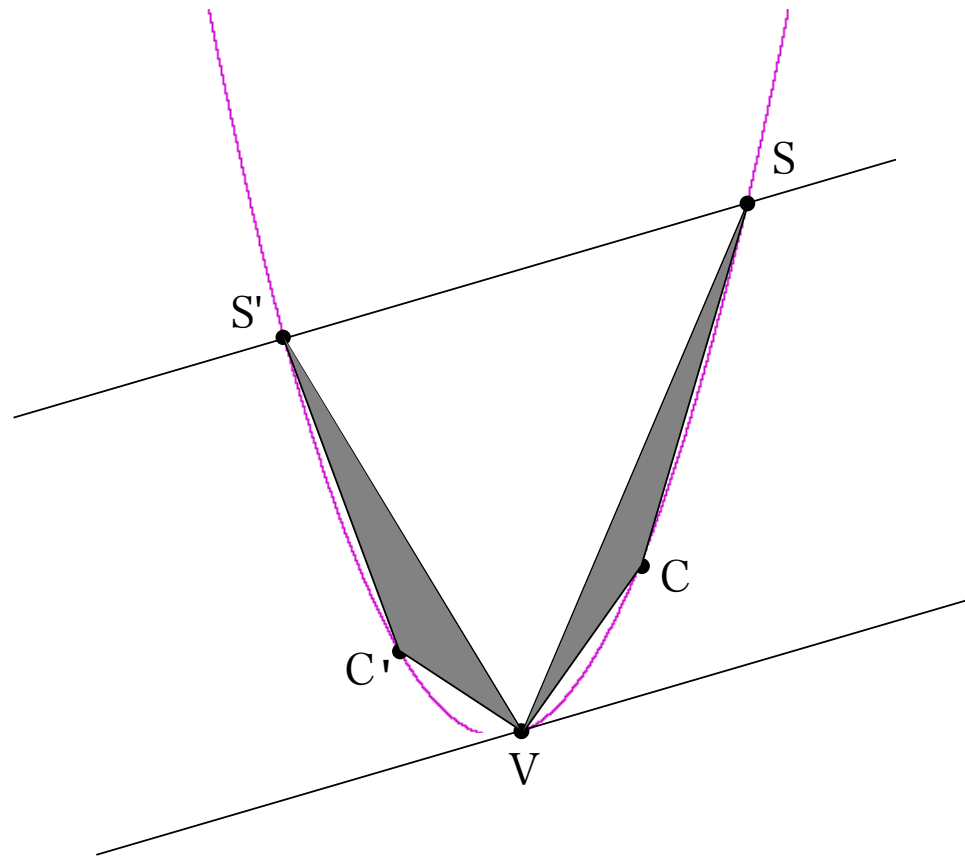
# アルキメデスによる放物線の求積

下図の  $\triangle VSS'$  の面積と、 $\triangle VCS$  の面積 +  $\triangle VC'S'$  の面積を比較する。但し  $C, C'$  は  $CS, C'S'$  で切り取られる切片の頂点とする。



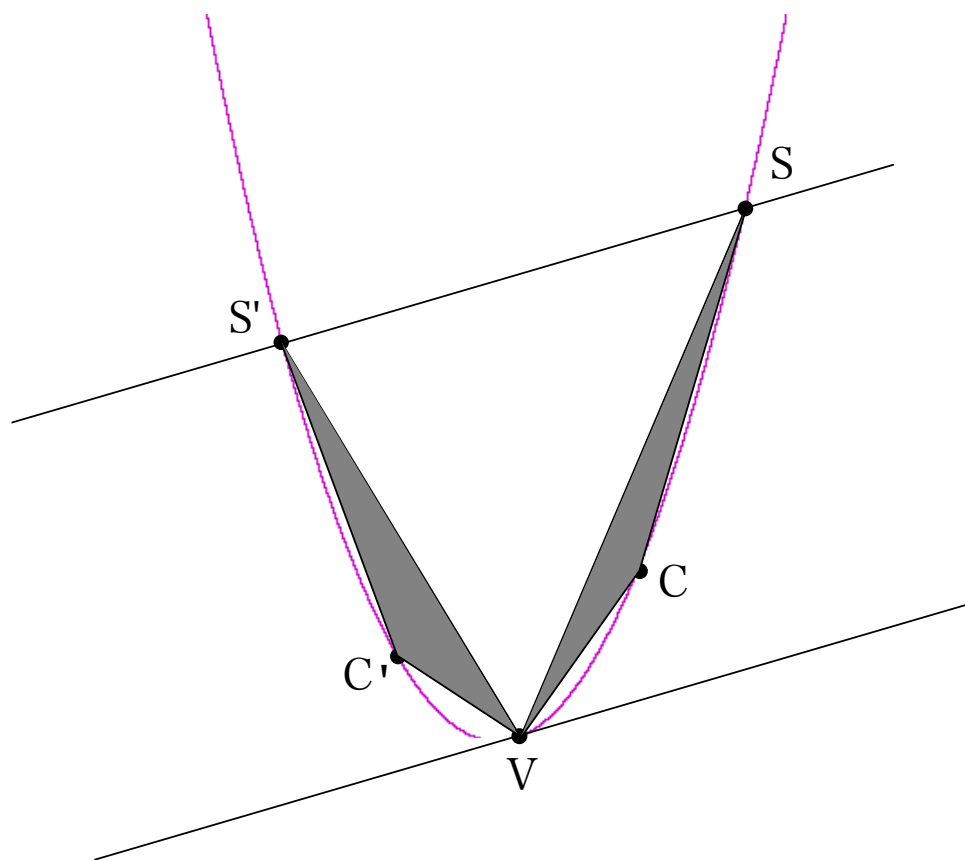
# アルキメデスによる放物線の求積

下図の  $\triangle VSS'$  の面積と、 $\triangle VCS$  の面積 +  $\triangle VC'S'$  (の面積) を比較する。但し  $C, C'$  は  $CS, C'S'$  で切り取られる切片の頂点とする。



# アルキメデスによる放物線の求積

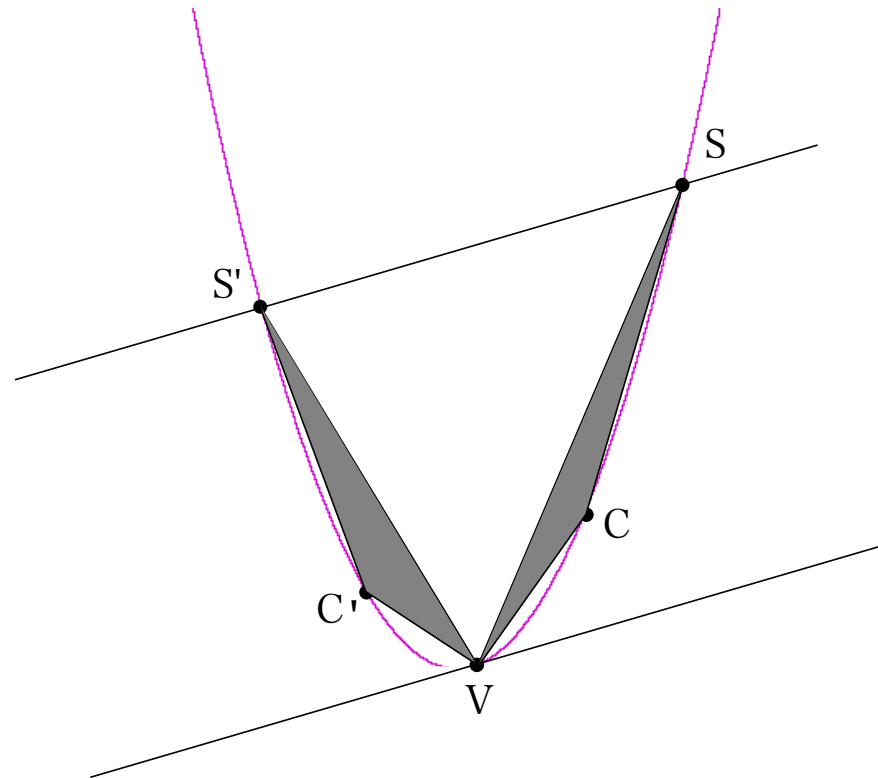
下図の  $\triangle VSS'$  の面積と、 $\triangle VCS$  の面積 +  $\triangle VC'S'$  (の面積) を比較する。但し  $C, C'$  は  $CS, C'S'$  で切り取られる切片の頂点とする。



このとき  $\triangle VSS' = 4(\triangle VCS + \triangle VC'S')$  が成り立つ。

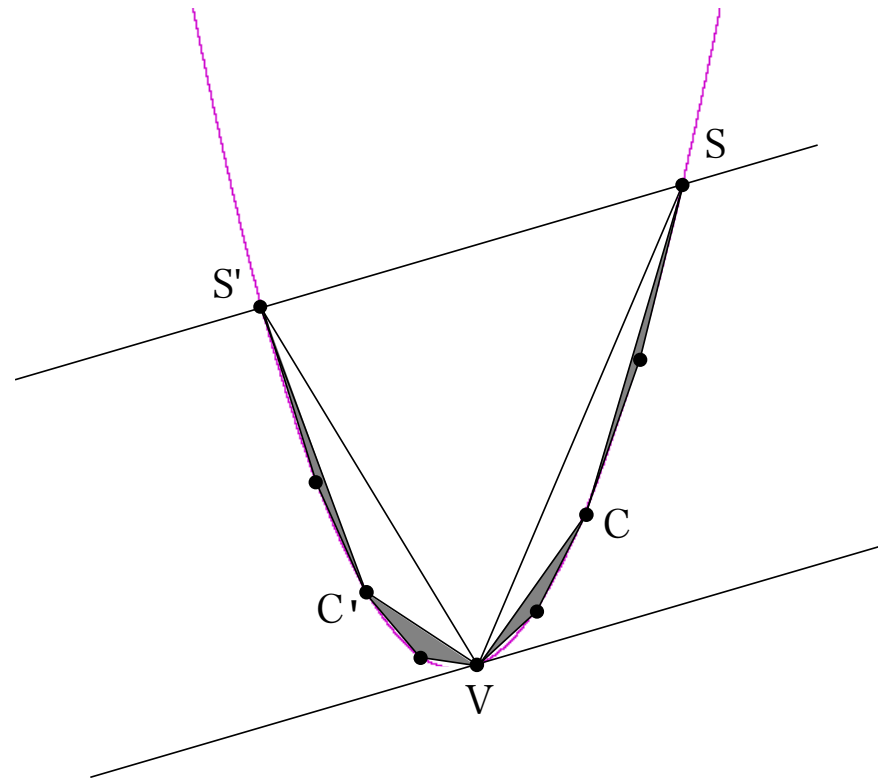
# アルキメデスによる放物線の求積

同様の比較を繰り返す。



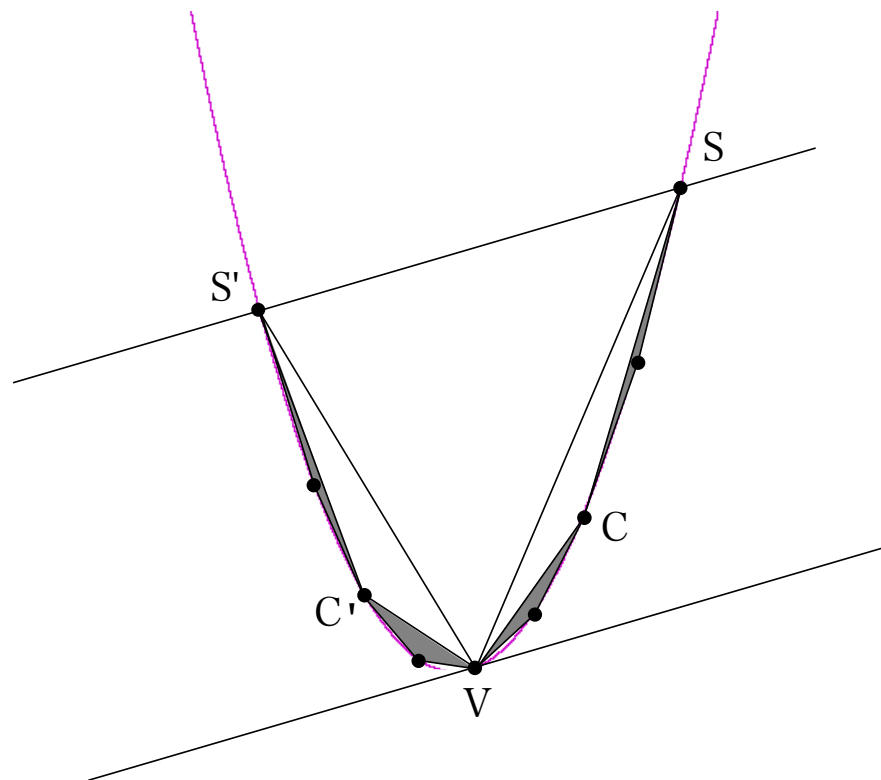
# アルキメデスによる放物線の求積

同様の比較を繰り返す。



# アルキメデスによる放物線の求積

同様の比較を繰り返す。



これより 切片 $VSS'$ の面積 $>(1 + \frac{1}{4} + \cdots + (\frac{1}{4})^n) \triangle VSS'$ の面積  
が成り立つ。

# アルキメデスによる放物線の求積

ところが、どんな  $\varepsilon > 0$  についても

$$\frac{4}{3} - \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

は  $n$  が充分大きければ  $\varepsilon$  より小さくなる。



# アルキメデスによる放物線の求積

ところが、どんな  $\varepsilon > 0$  についても

$$\frac{4}{3} - \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

は  $n$  が充分大きければ  $\varepsilon$  より小さくなる。

従って

切片  $VSS'$  の面積  $\leq \frac{4}{3} \triangle VSS'$  の面積  
が成り立つ。

# アルキメデスによる放物線の求積

ところが、どんな  $\varepsilon > 0$  についても

$$\frac{4}{3} - \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

は  $n$  が充分大きければ  $\varepsilon$  より小さくなる。

従って

切片  $VSS'$  の面積  $\leq \frac{4}{3} \triangle VSS'$  の面積  
が成り立つ。

この二つの不等式より

切片  $VSS'$  の面積  $= \frac{4}{3} \triangle VSS'$  の面積  
となる。

# 参考書

現代数学で面積をどのように測るかについての参考書：



# 座標の発明

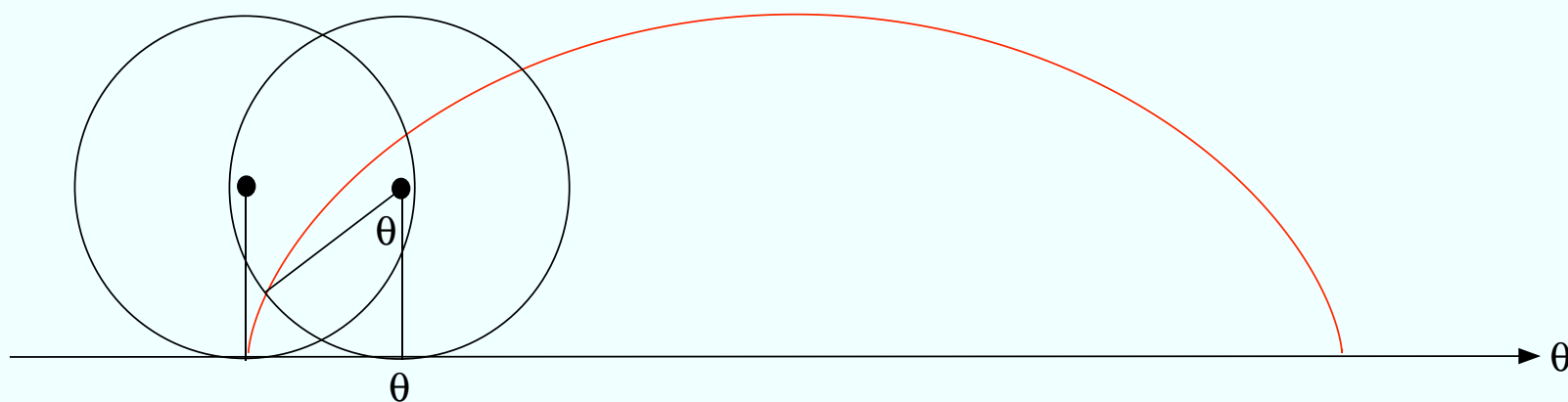


# 座標の発明

デカルト以前にも平面に座標軸を描くことは行われていたが、一方向のみであった。

# 座標の発明

デカルト以前にも平面に座標軸を描くことは行われていたが、一方向のみであった。



# デカルト座標

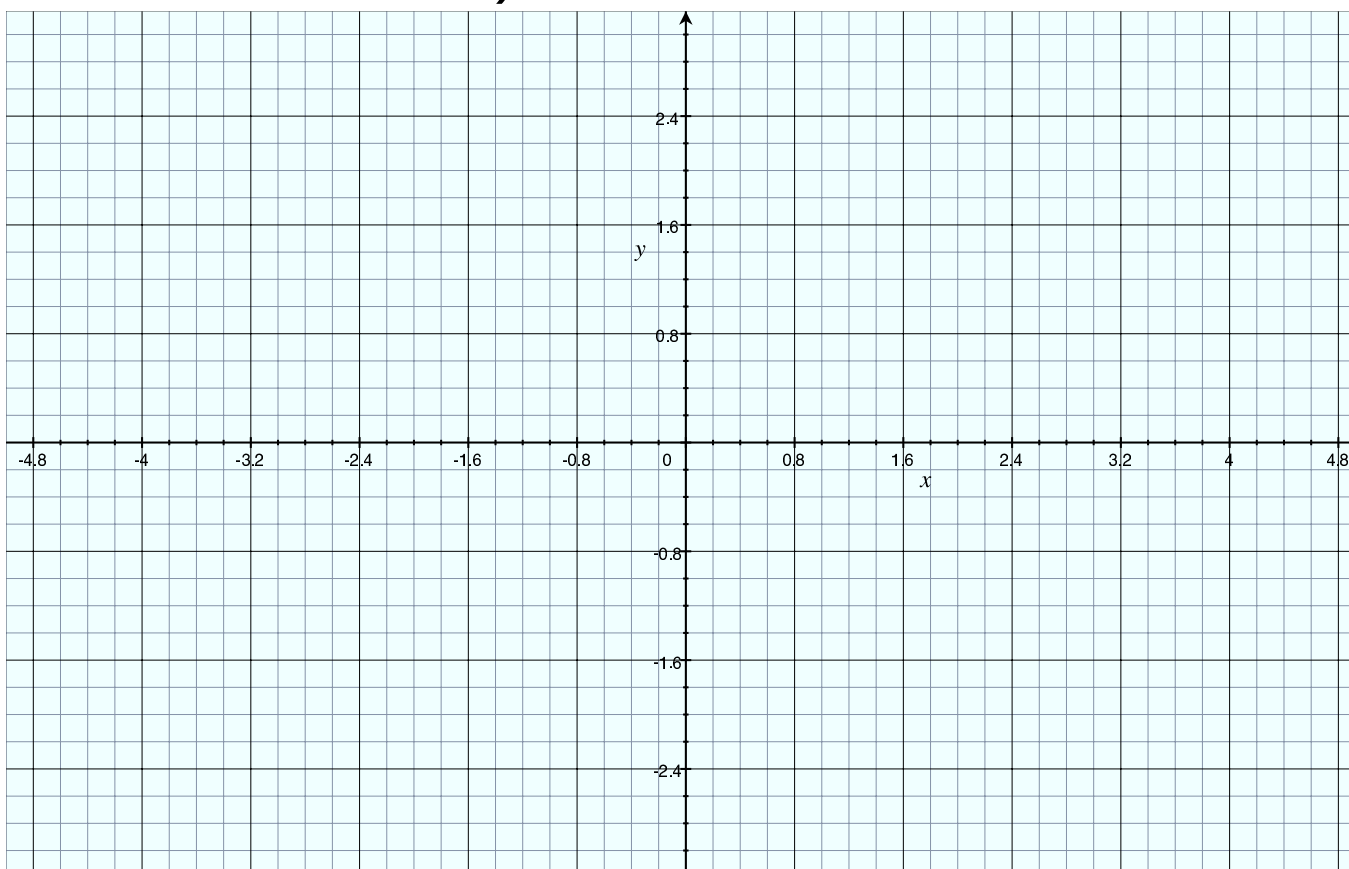
# デカルト座標

デカルトは、平面上に二本の直交する座標軸を引き、それを利用して二つの実数の組によって平面上の点の位置を表す方法 (所謂デカルト座標系) を発明した。



# デカルト座標

デカルトは、平面上に二本の直交する座標軸を引き、それを利用して二つの実数の組によって平面上の点の位置を表す方法 (所謂デカルト座標系) を発明した。

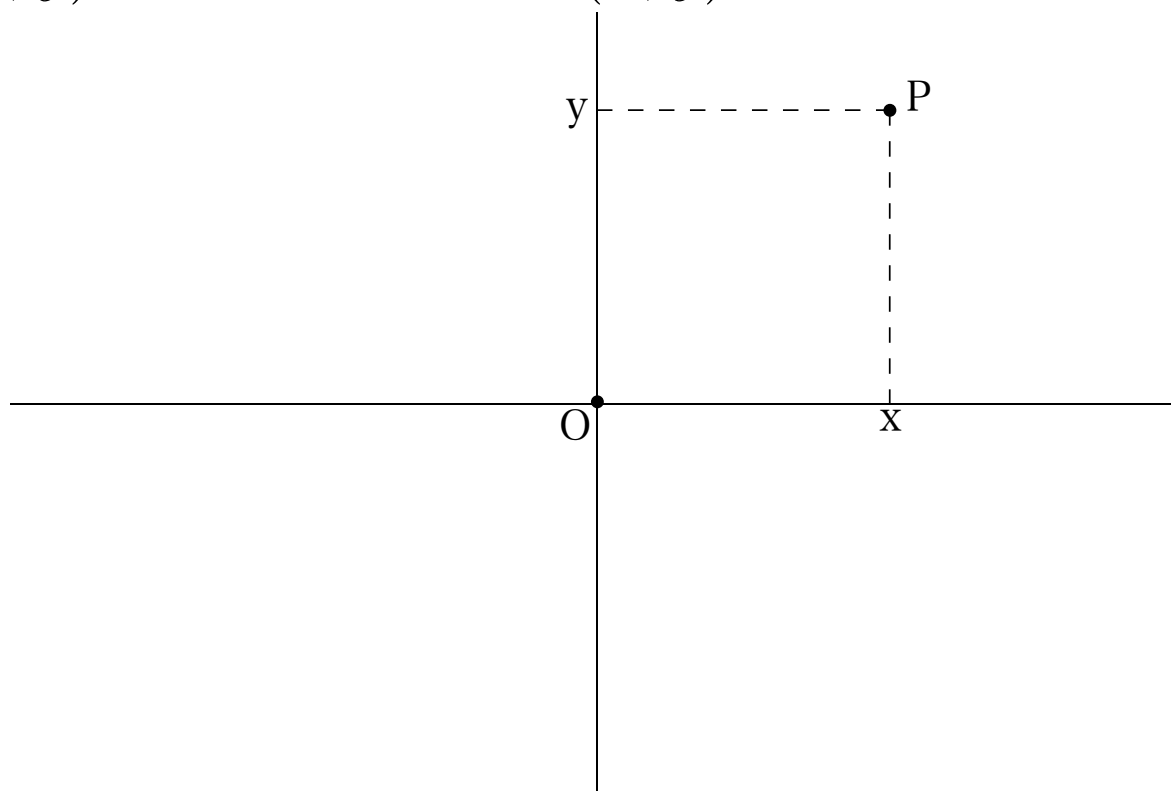


# デカルト座標

即ち、両座標軸に実数に対応させおき、平面上の各点  $P$  を通り縦軸に平行な直線と横軸の交わる点の値  $x$  と  $P$  を通り横軸と平行な直線と縦軸の交わる点の値  $y$  を用いて、この実数の組  $(x, y)$  で点  $P$  を表す。 $(x, y)$  を  $P$  の座標と呼ぶ。

# デカルト座標

即ち、両座標軸に実数に対応させおき、平面上の各点  $P$  を通り縦軸に平行な直線と横軸の交わる点の値  $x$  と  $P$  を通り横軸と平行な直線と縦軸の交わる点の値  $y$  を用いて、この実数の組  $(x, y)$  で点  $P$  を表す。 $(x, y)$  を  $P$  の座標と呼ぶ。



# 解析幾何学

# 解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式  $f(x, y) = 0$  を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

# 解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式  $f(x, y) = 0$  を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

注意  $C$  を  $f(x, y)$  のグラフとは呼ばない。

# 解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式  $f(x, y) = 0$  を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

注意  $C$  を  $f(x, y)$  のグラフとは呼ばない。

これにより

「平面上の幾何学  $\iff$  数の代数的な操作」  
の対応が得られる。

# 解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式  $f(x, y) = 0$  を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

注意  $C$  を  $f(x, y)$  のグラフとは呼ばない。

これにより

「平面上の幾何学  $\iff$  数の代数的な操作」

の対応が得られる。

平面幾何のこのような扱いを 解析幾何 と呼ぶ。



# 解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式  $f(x, y) = 0$  を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

注意  $C$  を  $f(x, y)$  のグラフとは呼ばない。

これにより

「平面上の幾何学  $\iff$  数の代数的な操作」

の対応が得られる。

平面幾何のこのような扱いを 解析幾何 と呼ぶ。

デカルトはこの方法でユークリッド以来の未解決問題だった  
パッポスの問題を解決した。

# 解析幾何学

# 解析幾何学

## 楕円

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の和が  $2a$  となる点の描く楕円の方程式は以下ようになる：

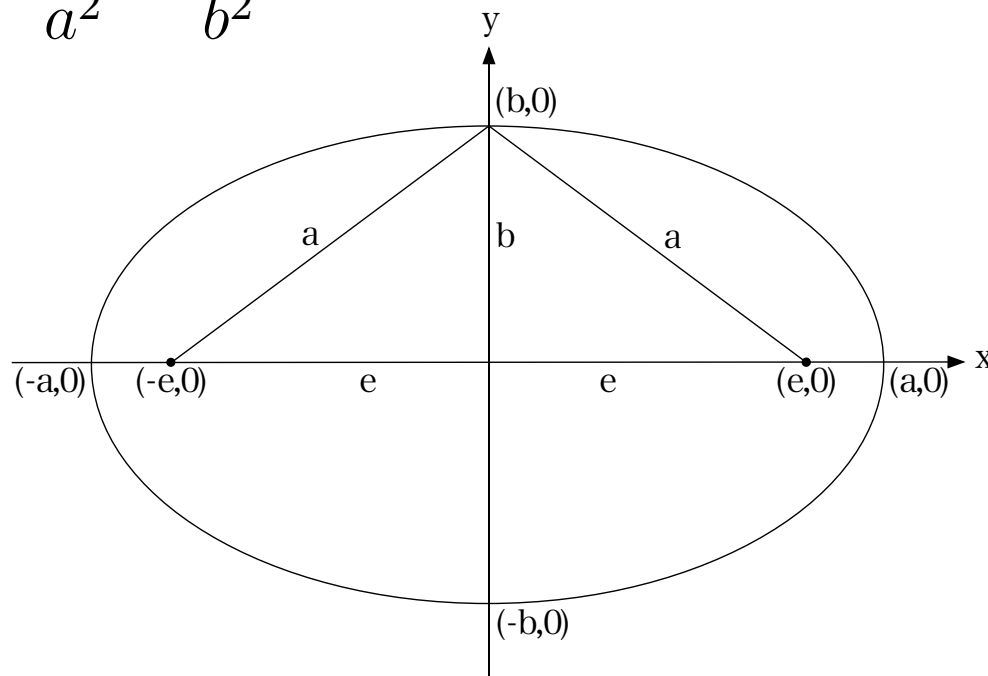
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

# 解析幾何学

## 楕円

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の和が  $2a$  となる点の描く楕円の方程式は以下ようになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

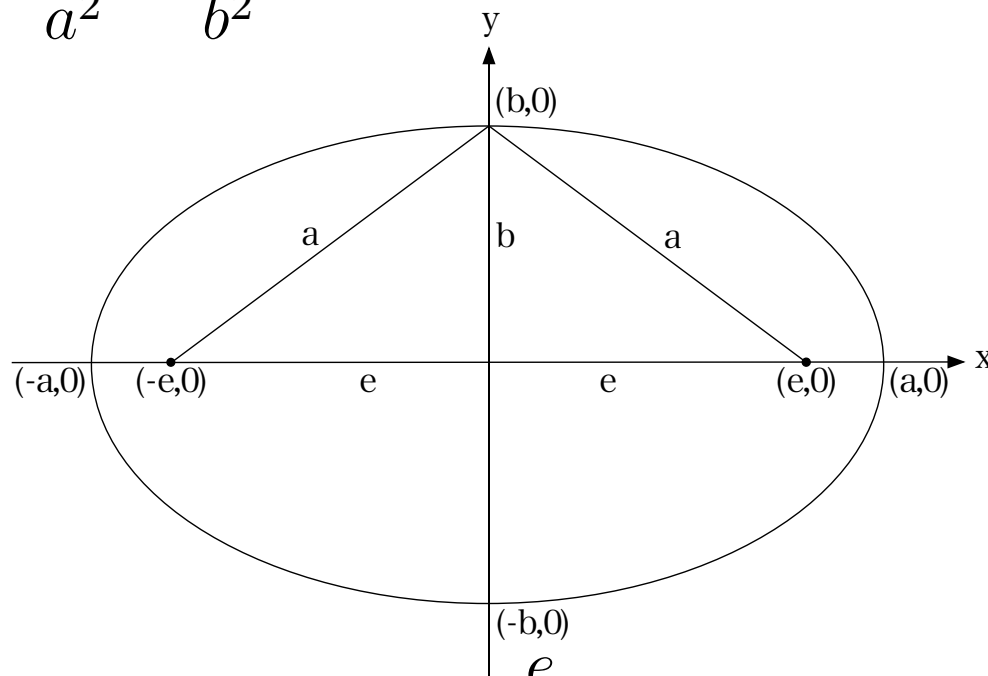


# 解析幾何学

## 楕円

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の和が  $2a$  となる点の描く楕円の方程式は以下のようになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



$a$  を長半径、 $b$  を短半径、 $\varepsilon = \frac{e}{a}$  を離心率と呼ぶ。

# 解析幾何学

## 楕円

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離和が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

# 解析幾何学

## 楕円

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離和が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

# 解析幾何学

## 楕円

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離和が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = (xe + a^2)$$



# 解析幾何学

## 楕円

∴ 点  $(x, y)$  から焦点への距離和が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = (xe + a^2)$$

再び両辺を二乗して整理し

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2), \quad (a > e \text{ に注意})$$

# 解析幾何学

## 楕円

∴ 点  $(x, y)$  から焦点への距離和が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = (xe + a^2)$$

再び両辺を二乗して整理し

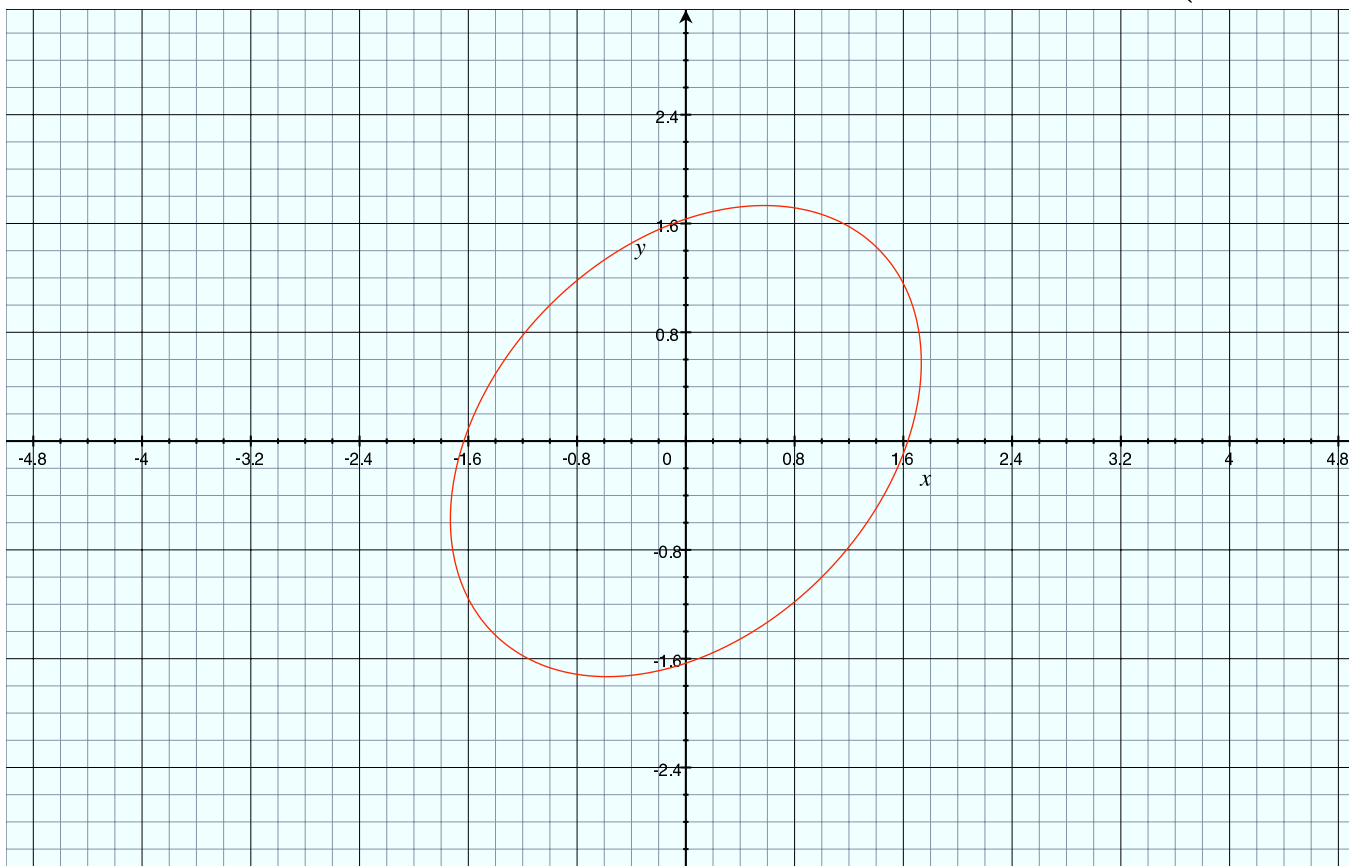
$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2), \quad (a > e \text{ に注意})$$

両辺を  $a^2(a^2 - e^2)$  で割って公式を得る。

# 解析幾何学

## 楕円

点  $(1, 1), (-1, -1)$  を焦点とし、それぞれへの距離の和が 4 である楕円の方程式は： $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$  (判別式  $< 0$ )



# 解析幾何学

## 双曲線

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の差が  $2a$  となる点の描く双曲線の方程式は以下のようになる：

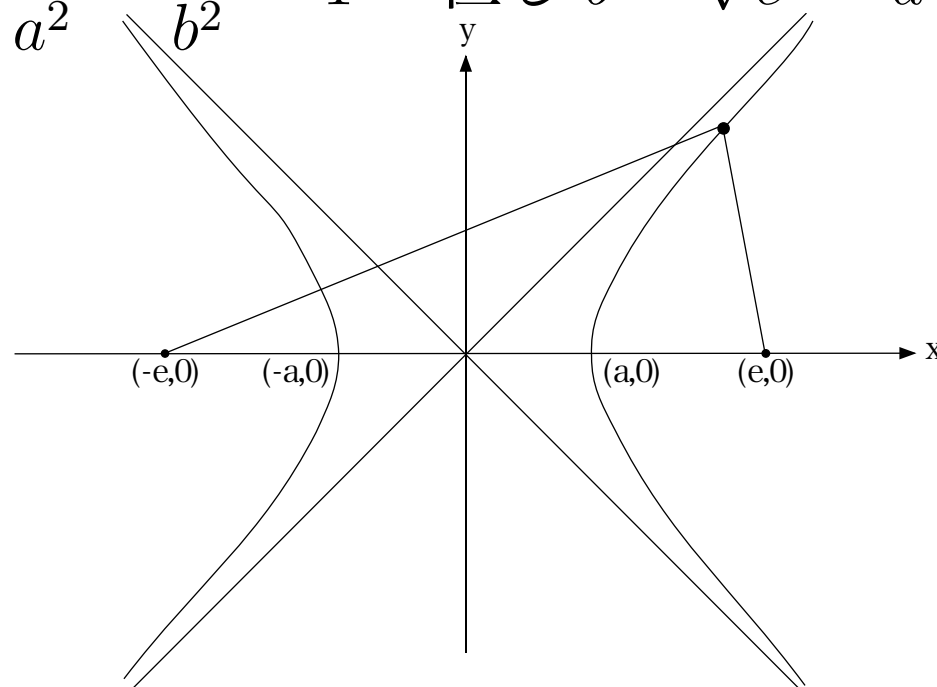
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{e^2 - a^2}$$

# 解析幾何学

## 双曲線

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の差が  $2a$  となる点の描く双曲線の方程式は以下のようなになる：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{e^2 - a^2}$$

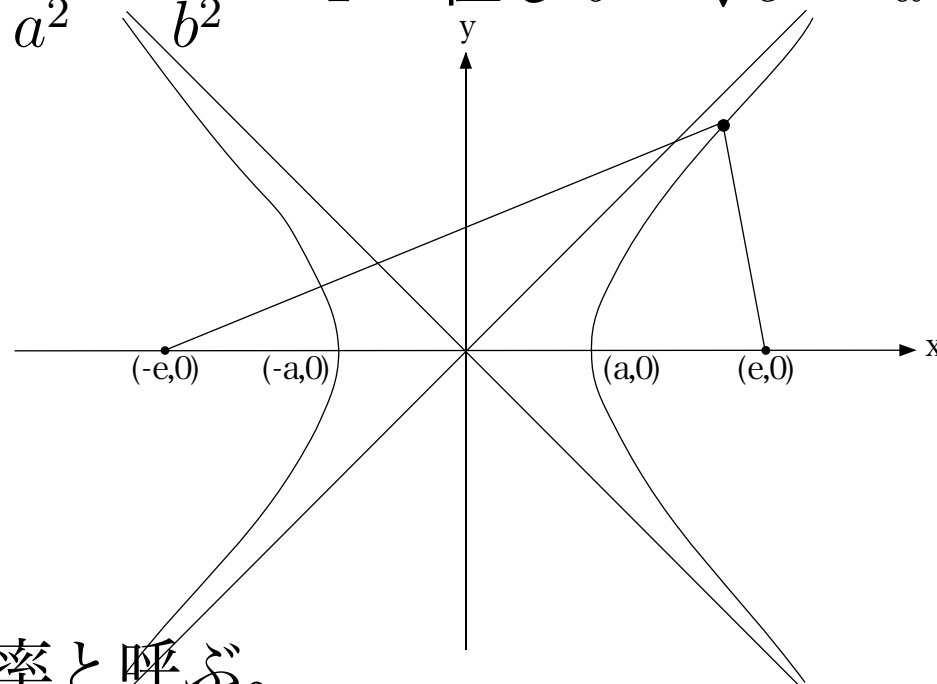


# 解析幾何学

## 双曲線

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$  を焦点とし、両焦点への距離の差が  $2a$  となる点の描く双曲線の方程式は以下のようなになる：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{e^2 - a^2}$$



$\varepsilon = \frac{e}{a}$  を離心率と呼ぶ。

# 解析幾何学

## 双曲線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離の差が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

# 解析幾何学

## 双曲線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離の差が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$



# 解析幾何学

## 双曲線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離の差が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = -(xe + a^2)$$

# 解析幾何学

## 双曲線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離の差が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = -(xe + a^2)$$

再び両辺を二乗して整理し

$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2), \quad (e > a \text{ に注意})$$

# 解析幾何学

## 双曲線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点への距離の差が  $2a$  なので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a.$$

つまり

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = -(xe + a^2)$$

再び両辺を二乗して整理し

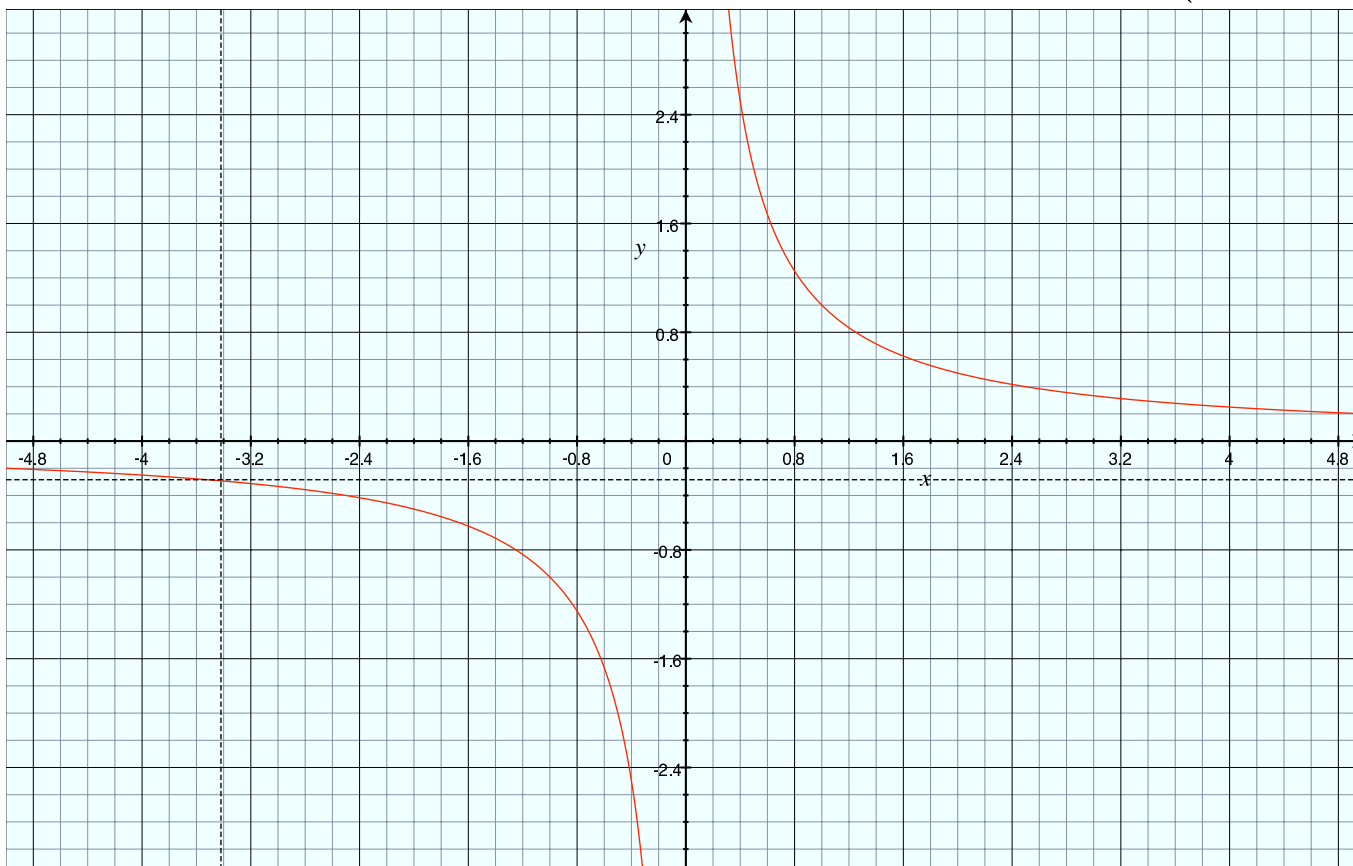
$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2), \quad (e > a \text{ に注意})$$

両辺を  $a^2(e^2 - a^2)$  で割って公式を得る。

# 解析幾何学

## 双曲線

点  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  を焦点とし、それぞれへの距離の差が  $2\sqrt{2}$  である双曲線の方程式は： $xy - 1 = 0$  (判別式  $> 0$ )



# 解析幾何学

## 放物線

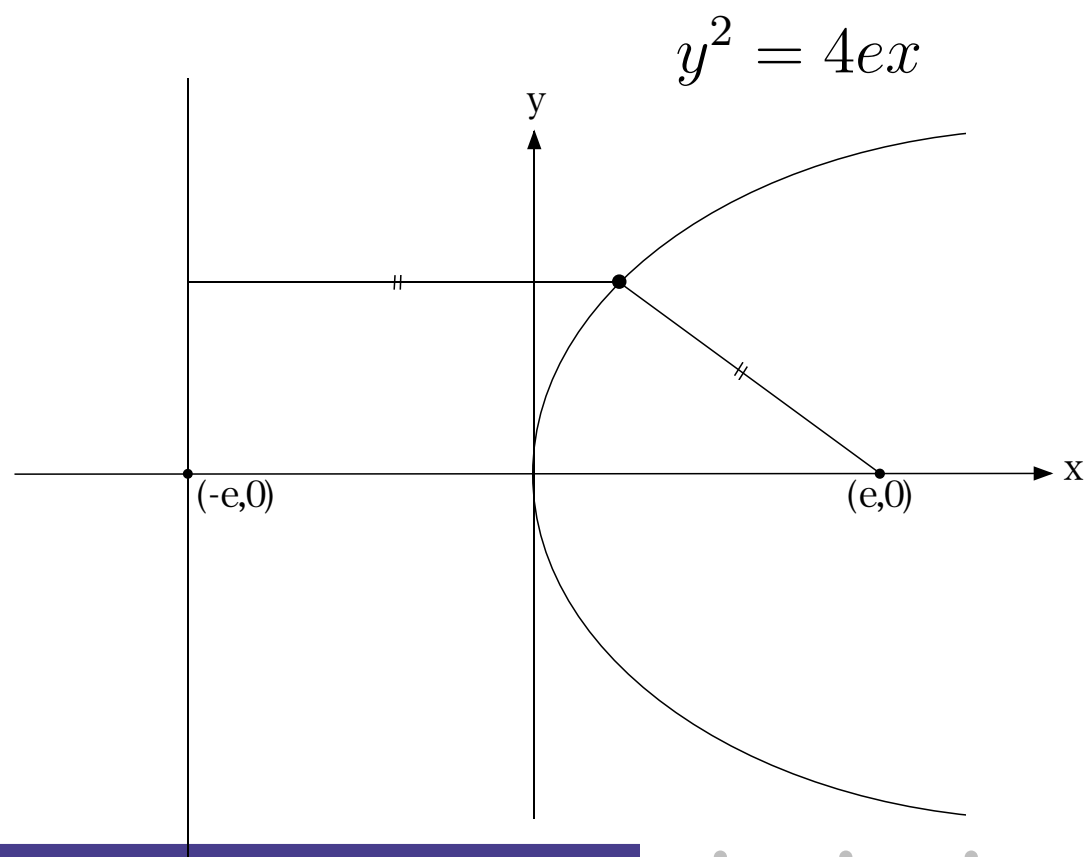
座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $x = -e$  を準線とし、それらへの距離が等しい放物線の方程式は以下のようになる：

$$y^2 = 4ex$$

# 解析幾何学

## 放物線

座標平面上で  $(e, 0)$ 、 $x = -e$  を準線とし、それらへの距離が等しい放物線の方程式は以下のようなになる：



# 解析幾何学

## 放物線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点と準線への距離が等しいので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = |x + e|.$$

# 解析幾何学

## 放物線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点と準線への距離が等しいので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = |x + e|.$$

両辺を 2 乗すると

$$(x - e)^2 + y^2 = (x + e)^2$$



# 解析幾何学

## 放物線

∵ 点  $(x, y)$  から焦点と準線への距離が等しいので

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = |x + e|.$$

両辺を 2 乗すると

$$(x - e)^2 + y^2 = (x + e)^2$$

整理し

$$y^2 = 4ex$$

# 解析幾何学

## 放物線

点  $(1, 1)$  を焦点、直線  $x + y = -2$  を準線とする放物線の方  
程式は： $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$  (判別式  $= 0$ )

# 解析幾何学

## 放物線

点  $(1, 1)$  を焦点、直線  $x + y = -2$  を準線とする放物線の方程式は： $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$  (判別式  $= 0$ )



# 二次曲線

# 二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

# 二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

# 二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点  $(x, y)$  を角度  $\theta$  だけ回転した点を  $(X, Y)$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

# 二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点  $(x, y)$  を角度  $\theta$  だけ回転した点を  $(X, Y)$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta X + \sin \theta Y \\ -\sin \theta X + \cos \theta Y \end{pmatrix}$$



# 二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点  $(x, y)$  を角度  $\theta$  だけ回転した点を  $(X, Y)$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta X + \sin \theta Y \\ -\sin \theta X + \cos \theta Y \end{pmatrix}$$

これを  $ax^2 + bxy + cy^2$  に代入すると

# 二次曲線

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos \theta X + \sin \theta Y)^2 \\ &\quad + b(\cos \theta X + \sin \theta Y)(-\sin \theta X + \cos \theta Y) \\ &\quad + c(-\sin \theta X + \cos \theta Y)^2 \end{aligned}$$

# 二次曲線

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos \theta X + \sin \theta Y)^2 \\ &\quad + b(\cos \theta X + \sin \theta Y)(-\sin \theta X + \cos \theta Y) \\ &\quad + c(-\sin \theta X + \cos \theta Y)^2 \\ &= (a \cos^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) X^2 \\ &\quad + \{2a \sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2c \sin \theta \cos \theta\} XY \\ &\quad + (a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta) Y^2 \end{aligned}$$

# 二次曲線

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos \theta X + \sin \theta Y)^2 \\ &\quad + b(\cos \theta X + \sin \theta Y)(-\sin \theta X + \cos \theta Y) \\ &\quad + c(-\sin \theta X + \cos \theta Y)^2 \\ &= (a \cos^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) X^2 \\ &\quad + \{2a \sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2c \sin \theta \cos \theta\} XY \\ &\quad + (a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta) Y^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(a + c) + (a - c) \cos 2\theta - b \sin 2\theta\} X^2 \\ &\quad + \{(a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta\} XY \\ &\quad + \frac{1}{2} \{(a + c) - (a - c) \cos 2\theta + b \sin 2\theta\} Y^2 \end{aligned}$$

# 二次曲線

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos \theta X + \sin \theta Y)^2 \\ &\quad + b(\cos \theta X + \sin \theta Y)(-\sin \theta X + \cos \theta Y) \\ &\quad + c(-\sin \theta X + \cos \theta Y)^2 \\ &= (a \cos^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) X^2 \\ &\quad + \{2a \sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2c \sin \theta \cos \theta\} XY \\ &\quad + (a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta) Y^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(a + c) + (a - c) \cos 2\theta - b \sin 2\theta\} X^2 \\ &\quad + \{(a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta\} XY \\ &\quad + \frac{1}{2} \{(a + c) - (a - c) \cos 2\theta + b \sin 2\theta\} Y^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \cos(2\theta + \alpha)\} X^2 \\ &\quad + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \sin(2\theta + \alpha) XY \\ &\quad + \frac{1}{2} \{(a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \cos(2\theta + \alpha)\} Y^2 \end{aligned}$$

# 二次曲線

$$\text{但し、} \cos \alpha = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

# 二次曲線

$$\text{但し、} \cos \alpha = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

よって、 $2\theta + \alpha = 0$  となる様に  $\theta$  を取ると

# 二次曲線

$$\text{但し、} \cos \alpha = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

よって、 $2\theta + \alpha = 0$  となる様に  $\theta$  を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2 + bxy + cy^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} Y^2 \end{aligned}$$



# 二次曲線

$$\text{但し、} \cos \alpha = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

よって、 $2\theta + \alpha = 0$  となる様に  $\theta$  を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{1}{2} \left\{ (a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} X^2 \\ + \frac{1}{2} \left\{ (a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} Y^2 \end{aligned}$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

# 二次曲線

$$\text{但し、} \cos \alpha = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

よって、 $2\theta + \alpha = 0$  となる様に  $\theta$  を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2 + bxy + cy^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right\} Y^2 \end{aligned}$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

$$\{(a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}\} \{(a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}\} = 4ac - b^2$$

の符号によって、楕円か双曲線かが決まる。

# 領域

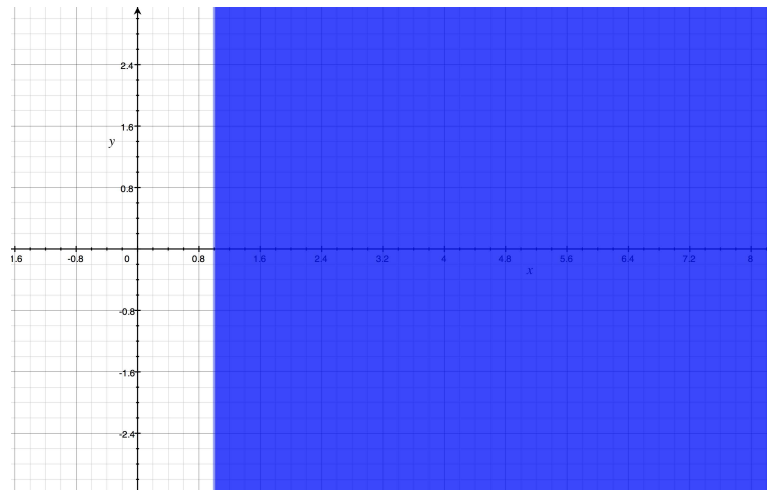
領域

$$\{ (x, y) \mid 1 \leq x \}$$

# 領域

領域

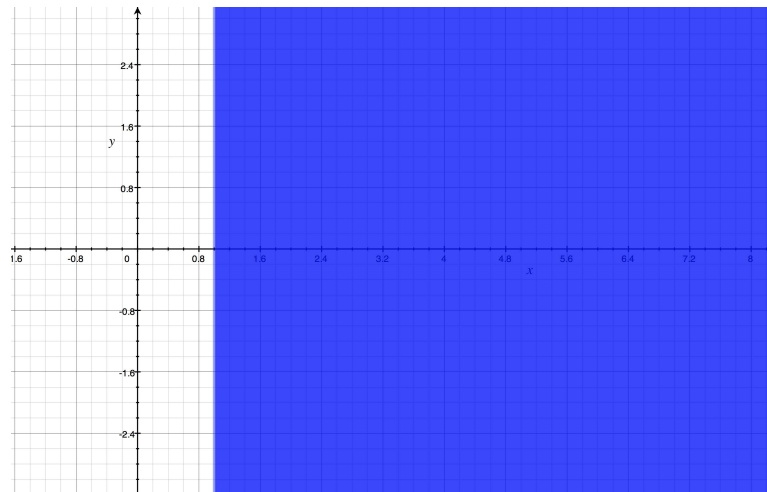
$$\{ (x, y) \mid 1 \leq x \}$$



# 領域

領域

$$\{ (x, y) \mid 1 \leq x \}$$

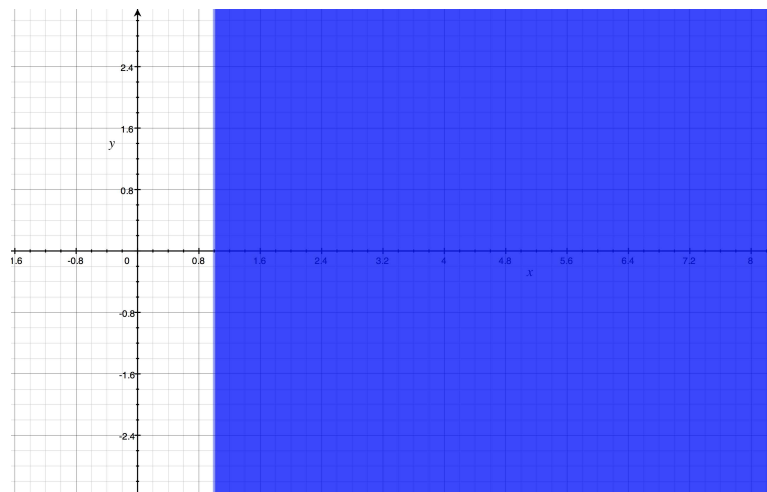


$$\{ (x, y) \mid |x| < 1 \text{ かつ } |y| < y \}$$

# 領域

## 領域

$$\{ (x, y) \mid 1 \leq x \}$$



$$\{ (x, y) \mid |x| < 1 \text{ かつ } |y| < 1 \}$$

