

社会と数理科学

第二回

新居 俊作

三角比

三角比

- 度数法

一周を 360° として角度を測る (バビロニアの 60 進法から)

三角比

- 度数法

一周を 360° として角度を測る (バビロニアの 60 進法から)

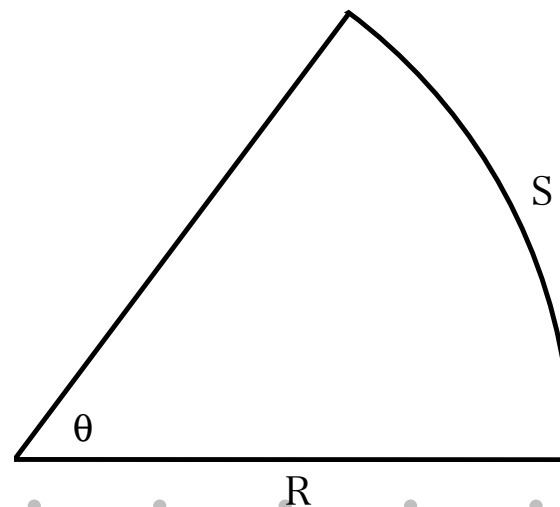
- 弧度法

半径 R の扇型の中心角 θ を対応する弧の長さ S を用いて

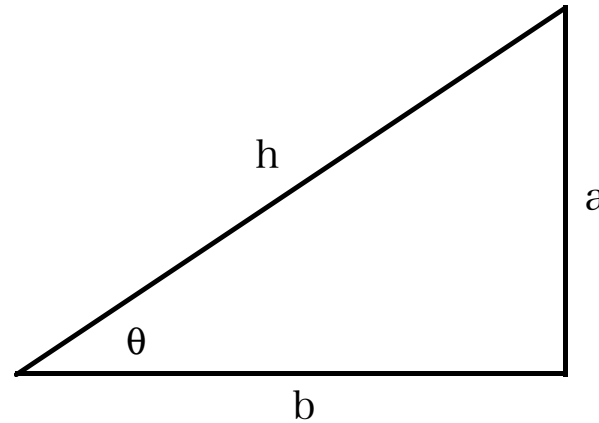
$$\theta = \frac{S}{R} \text{ [rad(ラジアン)]}$$

と表す。

特に半周の大きさを π で表す。

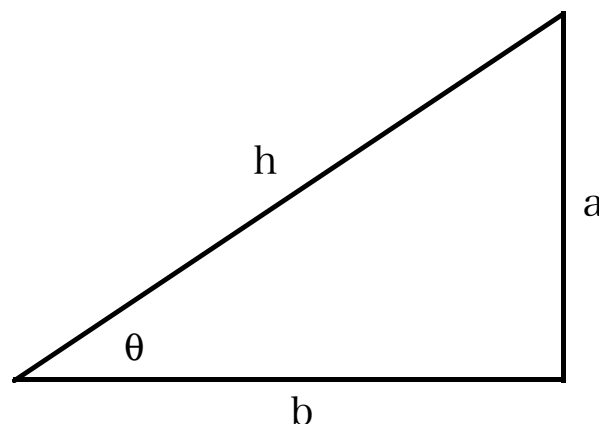


三角比



上図で $\sin \theta := \frac{a}{h}$, $\cos \theta := \frac{b}{h}$, $\tan \theta := \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ と定める。

三角比



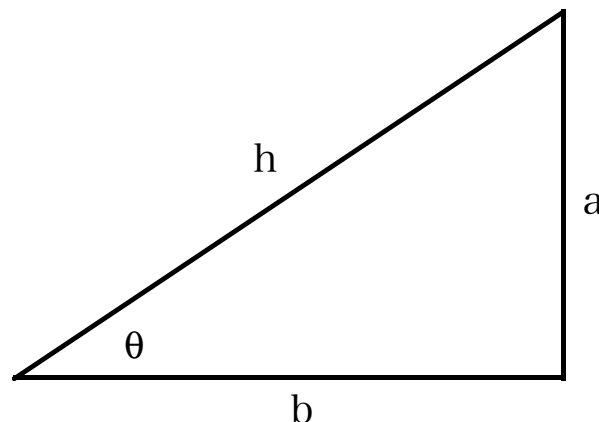
上図で $\sin \theta := \frac{a}{h}$, $\cos \theta := \frac{b}{h}$, $\tan \theta := \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ と定める。

$\theta = 0$ ではは直角三角形は作図出来ないが、便宜上

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \tan 0 = 0$$

と定める。

三角比



上図で $\sin \theta := \frac{a}{h}$, $\cos \theta := \frac{b}{h}$, $\tan \theta := \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ と定める。

$\theta = 0$ ではは直角三角形は作図出来ないが、便宜上

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \tan 0 = 0$$

と定める。同様に $\theta = \frac{\pi}{2}$ でも便宜上以下の様に定める。

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

三角測量



三角測量

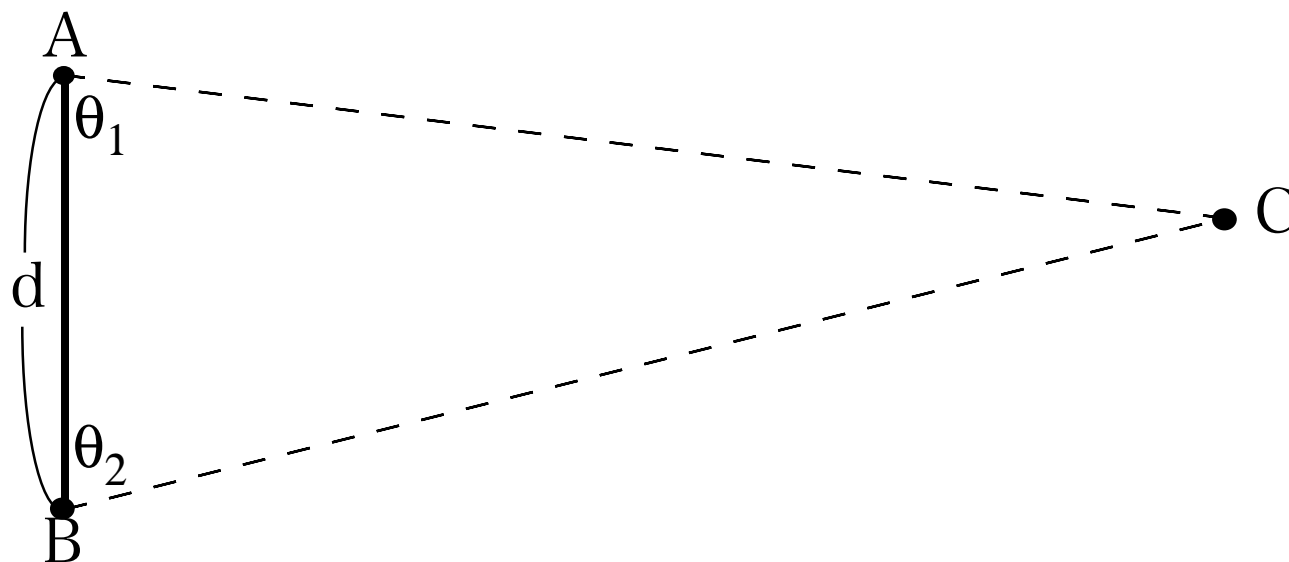


三角測量

少し離れた二地点 A, B から第三の地点 C を観測し、 C までの距離を求める。

三角測量

少し離れた二地点 A, B から第三の地点 C を観測し、 C までの距離を求める。



三角測量



三角測量

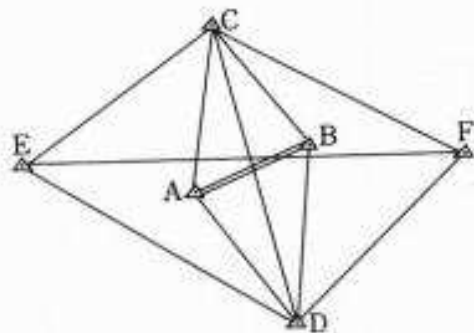


図-24 三角測量 (基線三角網)

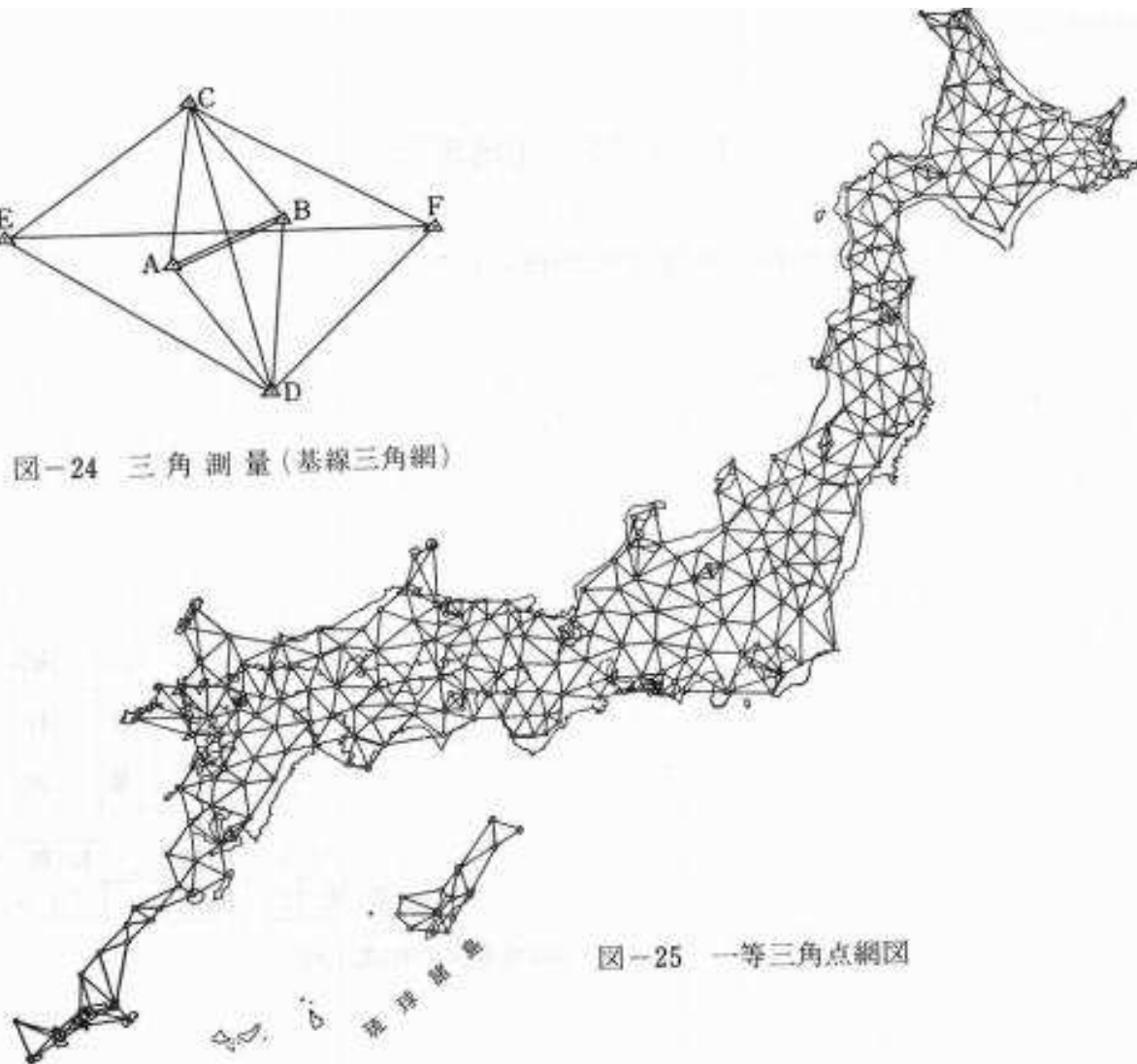


図-25 一等三角点網図

三角測量



三角測量

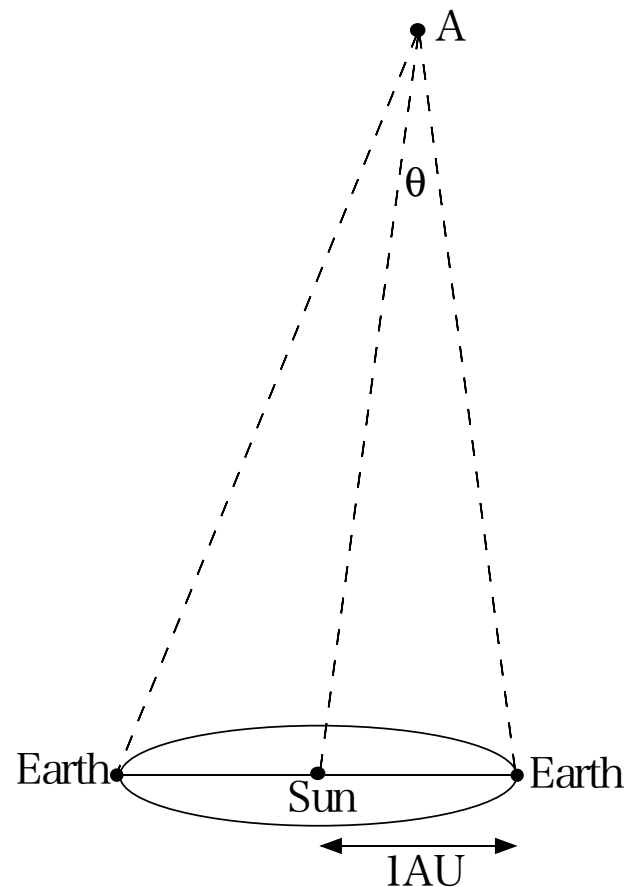
地球の軌道長半径 = 1 天文単位 (1AU) $\approx 150 \times 10^6 \text{km}$

恒星視差 θ を求めることにより近い恒星までの距離を求める。

三角測量

地球の軌道長半径 = 1 天文単位 (1AU) $\approx 150 \times 10^6 \text{km}$

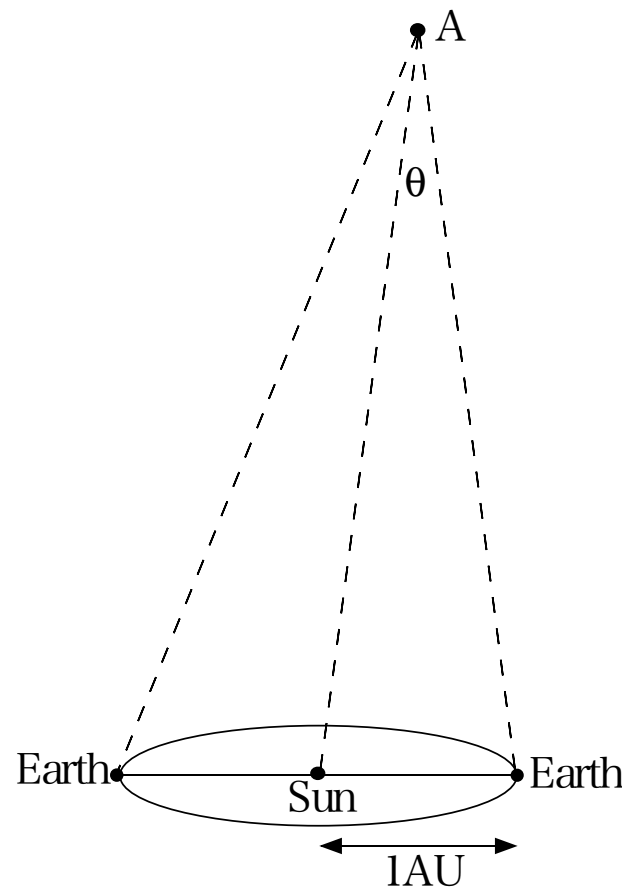
恒星視差 θ を求めることにより近い恒星までの距離を求める。



三角測量

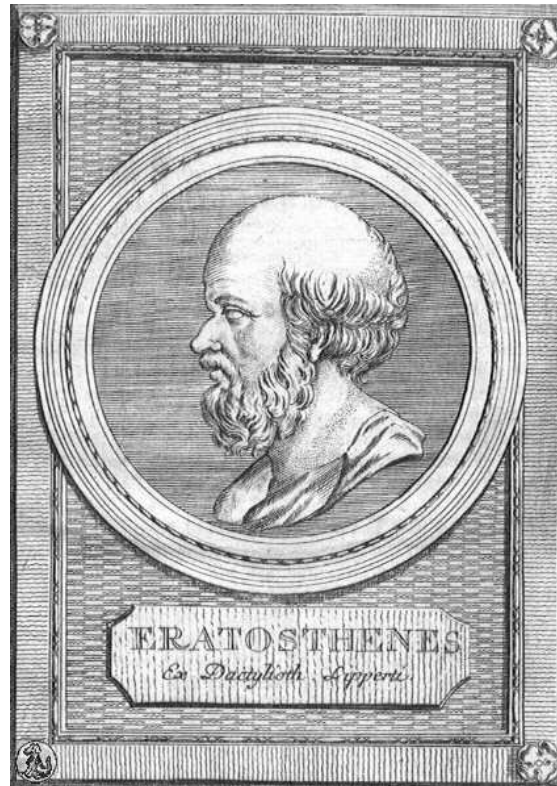
地球の軌道長半径 = 1 天文単位 (1AU) $\approx 150 \times 10^6 \text{km}$

恒星視差 θ を求めることにより近い恒星までの距離を求める。



この方法で測るとケンタウルス座プロクシマまで $38 \times 10^{12} \text{km}$

エラトステネス



エラステネス

- エジプトのシエネでは、夏至の正午に太陽が真上に来る。

エラステネス

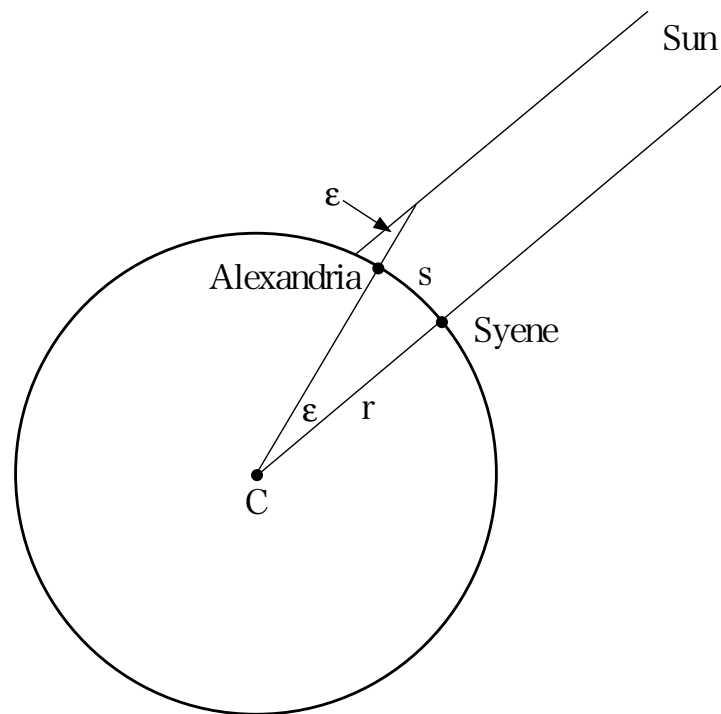
- エジプトのシエネでは、夏至の正午に太陽が真上に来る。
- アレクサンドリアでは真上から $\varepsilon = 7.5^\circ$ の角度と測定。

エラトステネス

- エジプトのシエネでは、夏至の正午に太陽が真上に来る。
- アレクサンドリアでは真上から $\varepsilon = 7.5^\circ$ の角度と測定。
- シエネはアレクサンドリアから真南に約 800km である。

エラステネス

- エジプトのシエネでは、夏至の正午に太陽が真上に来る。
- アレクサンドリアでは真上から $\varepsilon = 7.5^\circ$ の角度と測定。
- シエネはアレクサンドリアから真南に約 800km である。



これより、地球の半径 $r \approx 6100\text{km}$ 。(現代 6360km)

エラステネス

具体的には、 ε を弧度法で表すと

$$\varepsilon = 7.5 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.131$$

エラステネス

具体的には、 ε を弧度法で表すと

$$\varepsilon = 7.5 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.131$$

一方で

$$\varepsilon = \frac{s}{r} = \frac{800}{r}$$

エラステネス

具体的には、 ε を弧度法で表すと

$$\varepsilon = 7.5 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.131$$

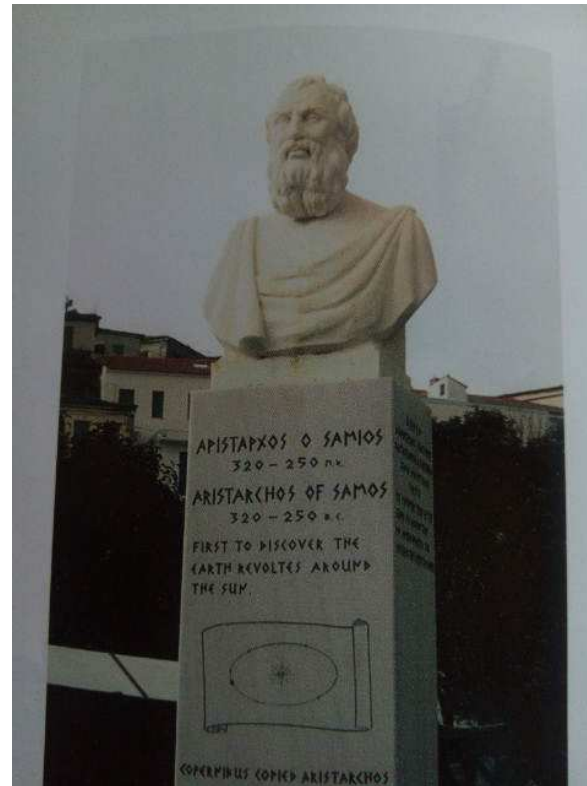
一方で

$$\varepsilon = \frac{s}{r} = \frac{800}{r}$$

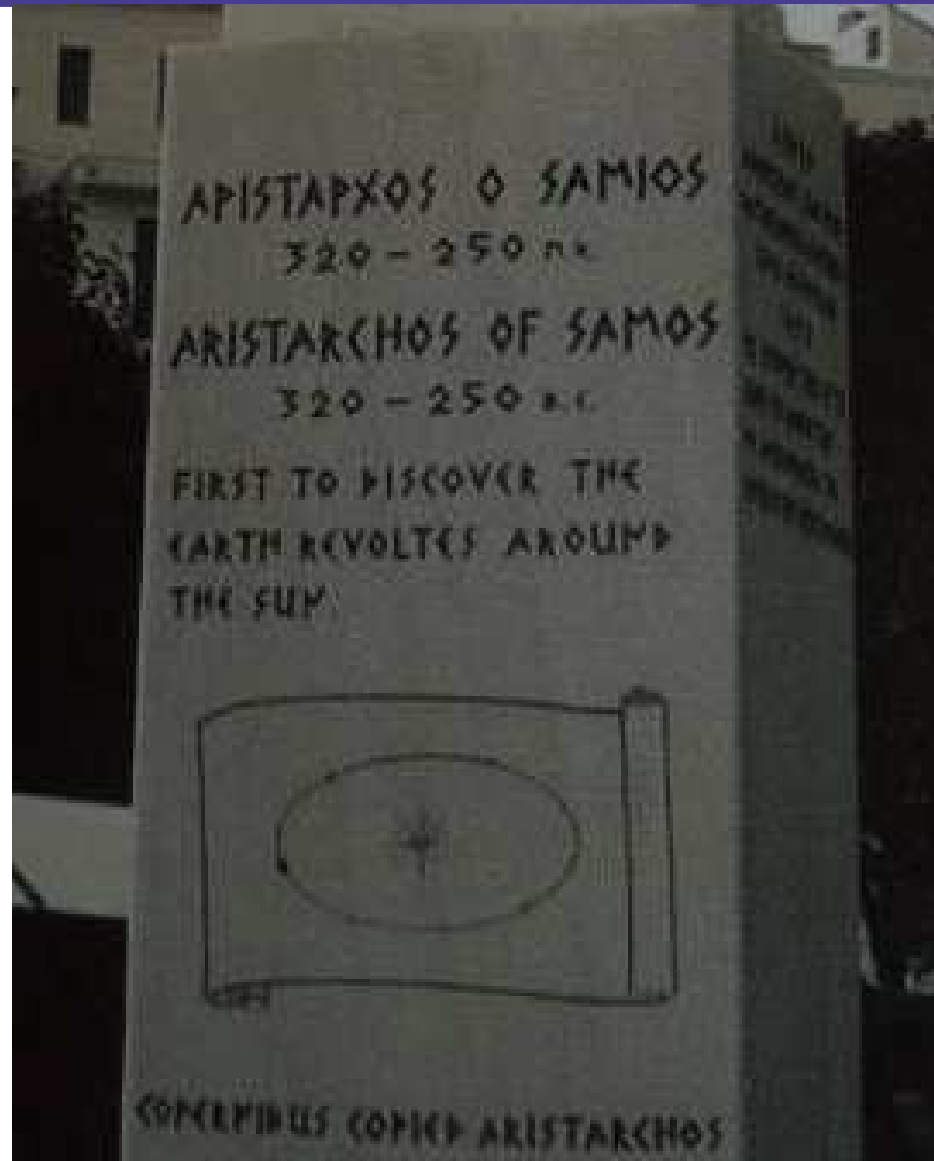
これより

$$r = \frac{800}{\varepsilon} = \frac{800}{0.131} \approx 6100[\text{km}]$$

アリストタルコス



アリストタルコス



アリストアルコス

仮説 A 月は太陽から光を受けて輝いている。

アリストアルコス

仮説 A 月は太陽から光を受けて輝いている。

仮説 B 月は地球を中心とする円軌道を公転している。

アリストアルコス

仮説 A 月は太陽から光を受けて輝いている。

仮説 B 月は地球を中心とする円軌道を公転している。

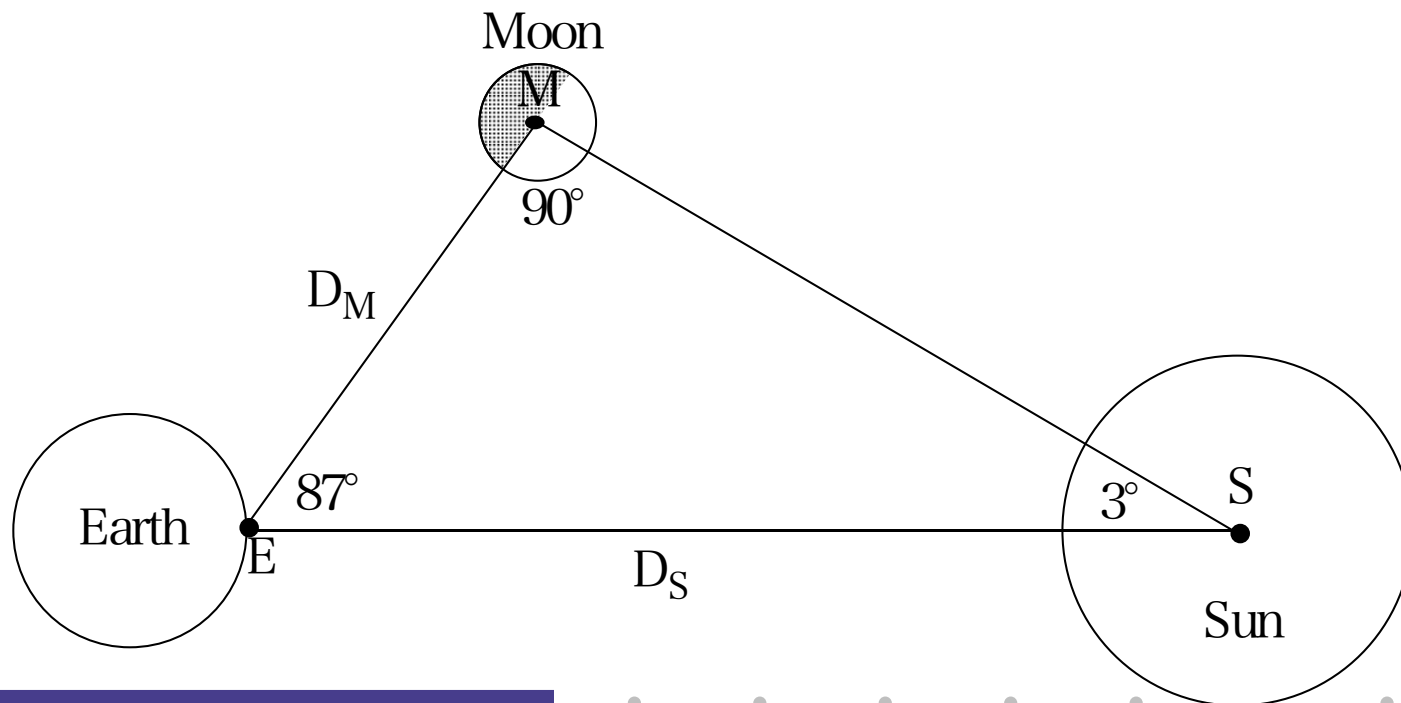
仮説 C 地上から半月を見ると下図の $\angle EMS$ は 90° であり
 $\angle MES$ は 87° である。

アリストアルコス

仮説 A 月は太陽から光を受けて輝いている。

仮説 B 月は地球を中心とする円軌道を公転している。

仮説 C 地上から半月を見ると下図の $\angle EMS$ は 90° であり $\angle MES$ は 87° である。

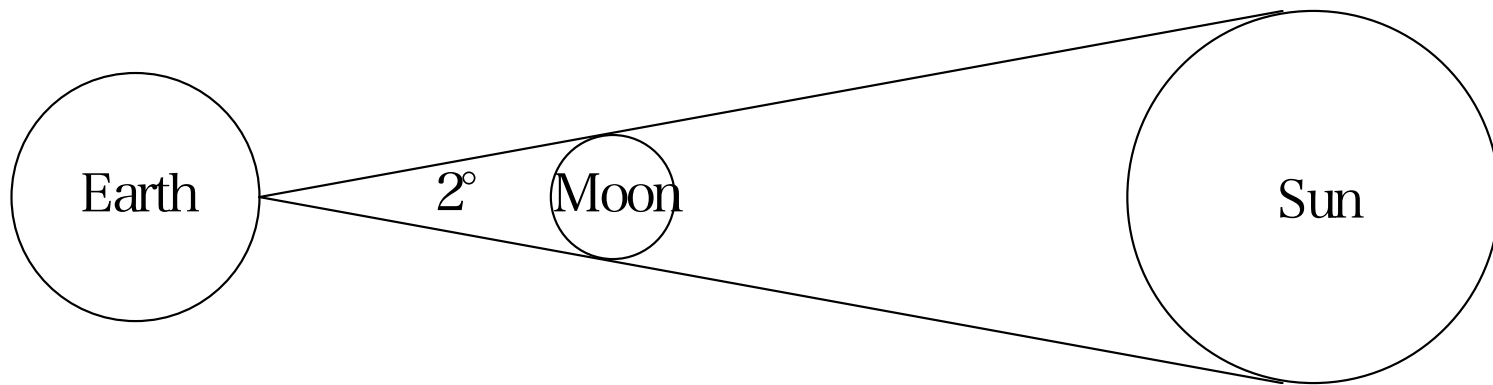


アリストアルコス

仮説 D 皆既日食のとき、月と太陽を見込む角は等しく 2°

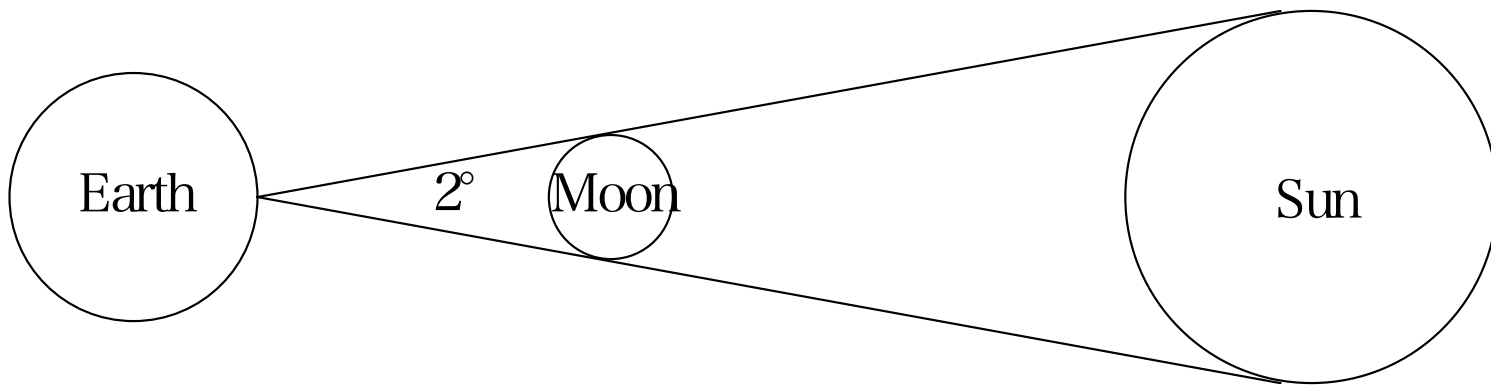
アリストアルコス

仮説 D 皆既日食のとき、月と太陽を見込む角は等しく 2°



アリストアルコス

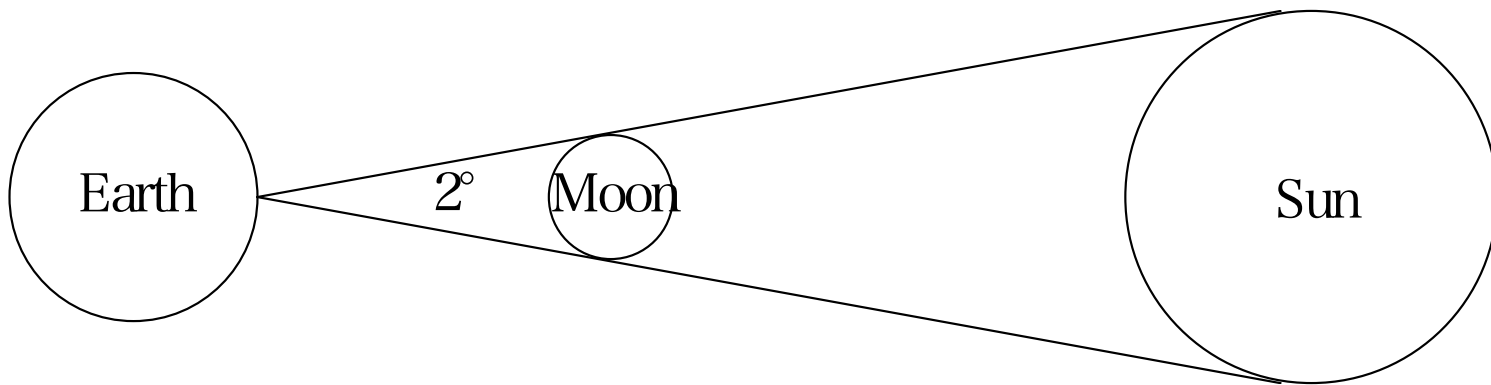
仮説 D 皆既日食のとき、月と太陽を見込む角は等しく 2°



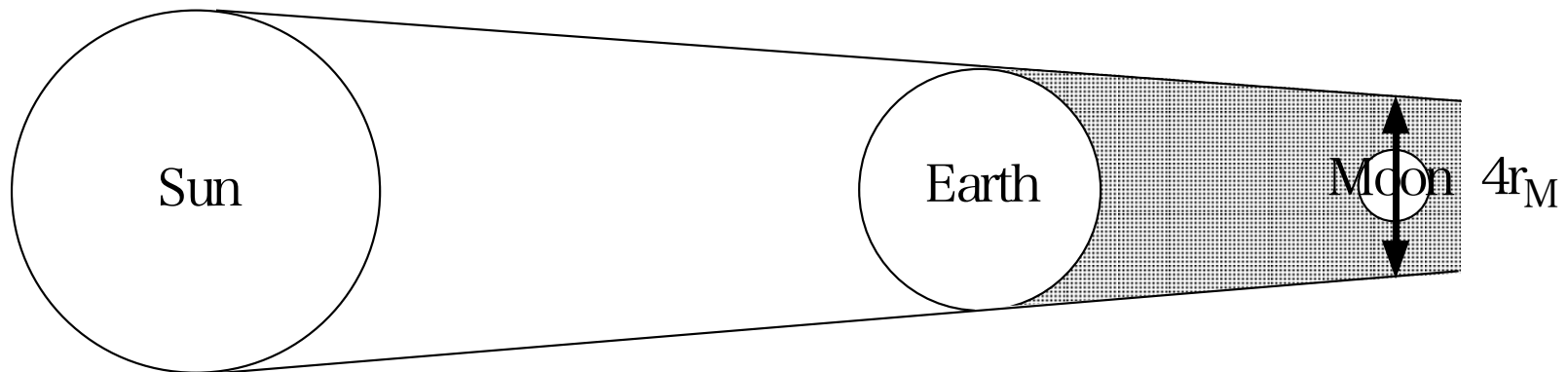
仮説 E 月食のとき下図の影の幅は月の半径 r_M の 4 倍である。

アリストアルコス

仮説 D 皆既日食のとき、月と太陽を見込む角は等しく 2°



仮説 E 月食のとき下図の影の幅は月の半径 r_M の 4 倍である。



アリストアルコス

これらと、エラステネスの値：地球の半径 $r_E \approx 6100\text{km}$
よりアリストアルコスは

アリストアルコス

これらと、エラステネスの値：地球の半径 $r_E \approx 6100\text{km}$
よりアリストアルコスは

月の半径 $r_M \approx 2100\text{km}$ (現代 1740km)、

太陽の半径 $r_S \approx 43000\text{km}$ (現代 695000km)、

月までの距離 $D_M \approx 130000\text{km}$ (現代 384400km)、

太陽までの距離 $D_S \approx 2600000\text{km}$ (現代 $150 \times 10^6\text{km}$)

とした。

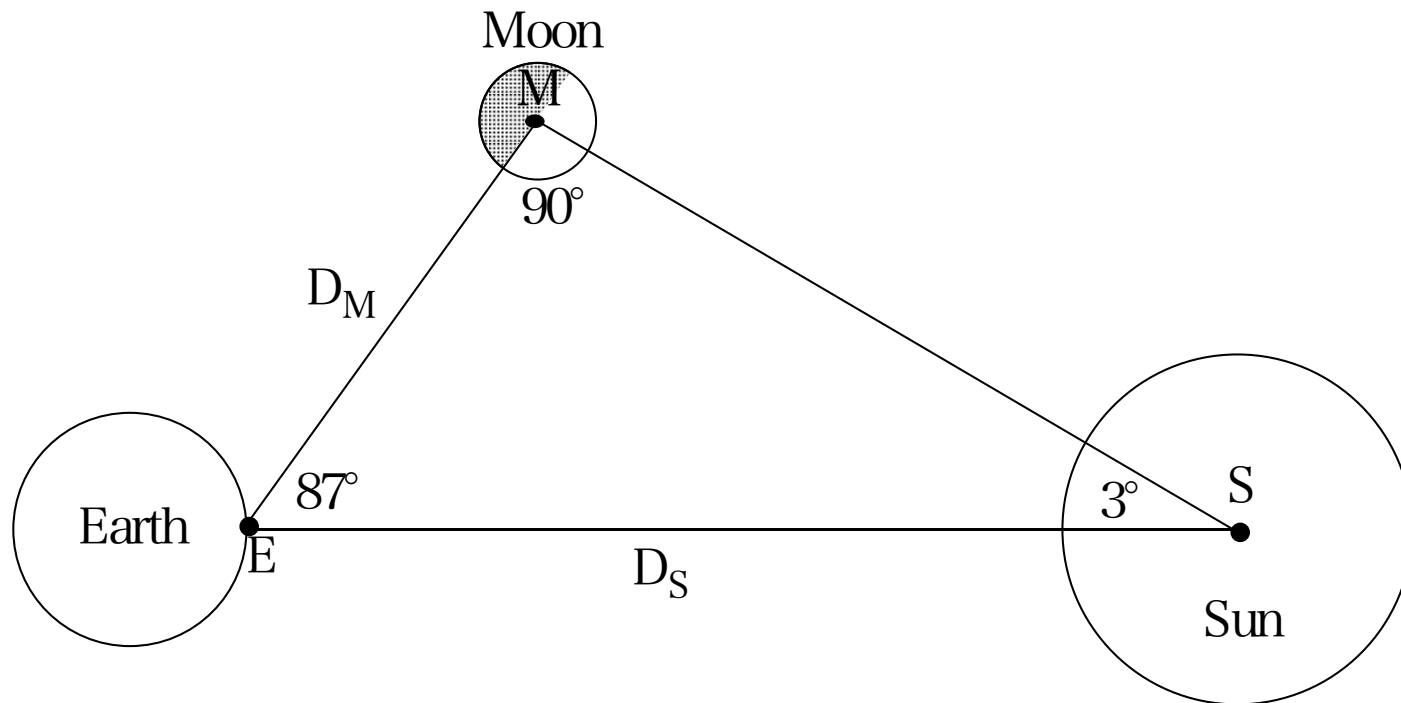
アリストタルコス

ここでは、 θ が十分小さいとき $\sin \theta \approx \theta$ という近似を使う。

アリストアルコス

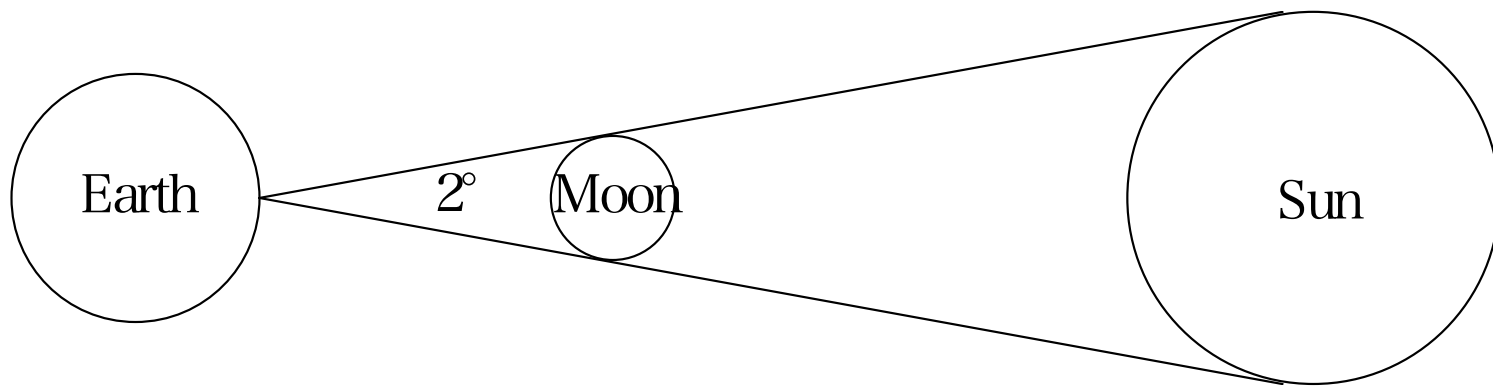
ここでは、 θ が十分小さいとき $\sin \theta \approx \theta$ という近似を使う。

この近似と仮説 C から $\frac{D_M}{D_S} = \sin 3^\circ \approx \frac{3\pi}{180} \approx 0.05$



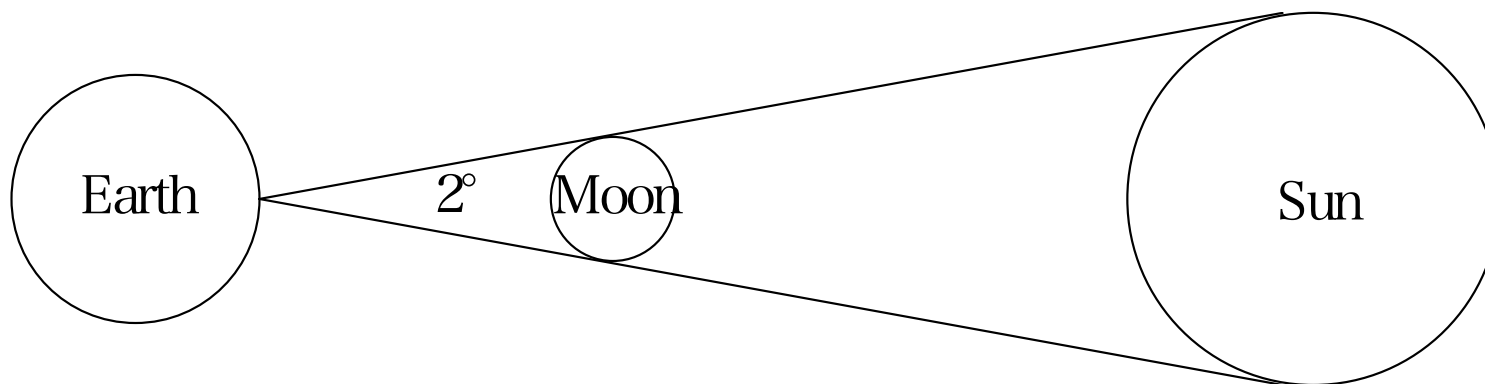
アリストアルコス

仮説 D から $\frac{r_S}{r_M} = \frac{D_S}{D_M} = 20$ 、



アリストアルコス

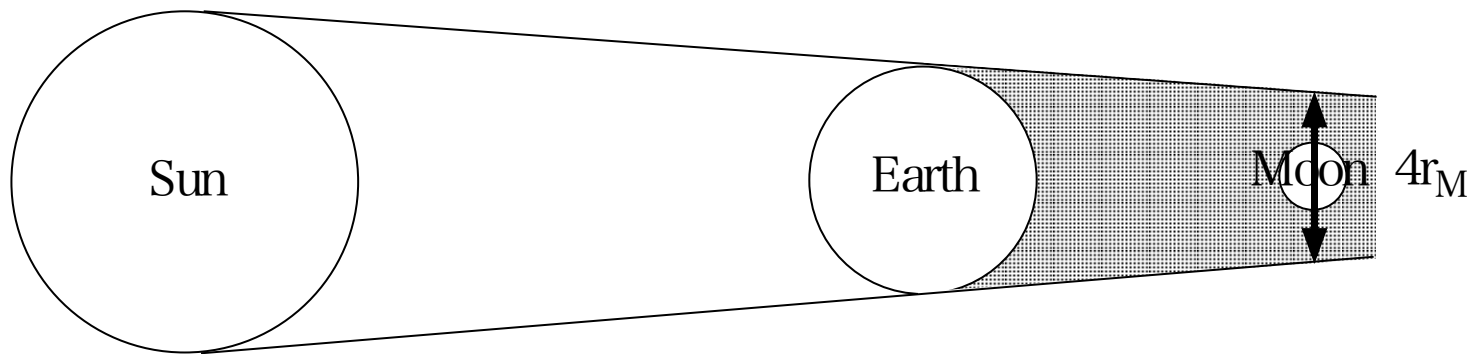
仮説 D から $\frac{r_S}{r_M} = \frac{D_S}{D_M} = 20$ 、



$$\frac{r_M}{D_M} = \sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{60}$$

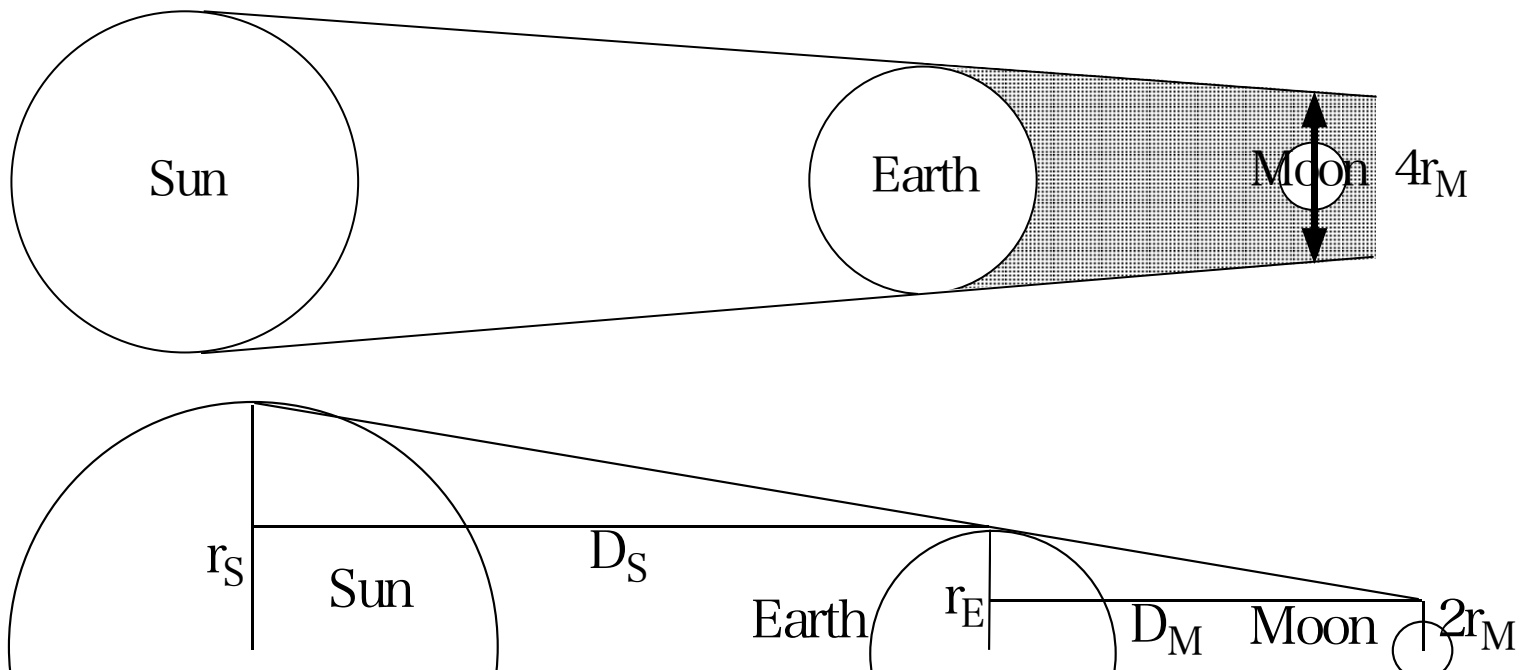
アリストアルコス

仮説 E から $\frac{r_E - 2r_M}{r_S - r_E} = \frac{D_M}{D_S} = 0.05$



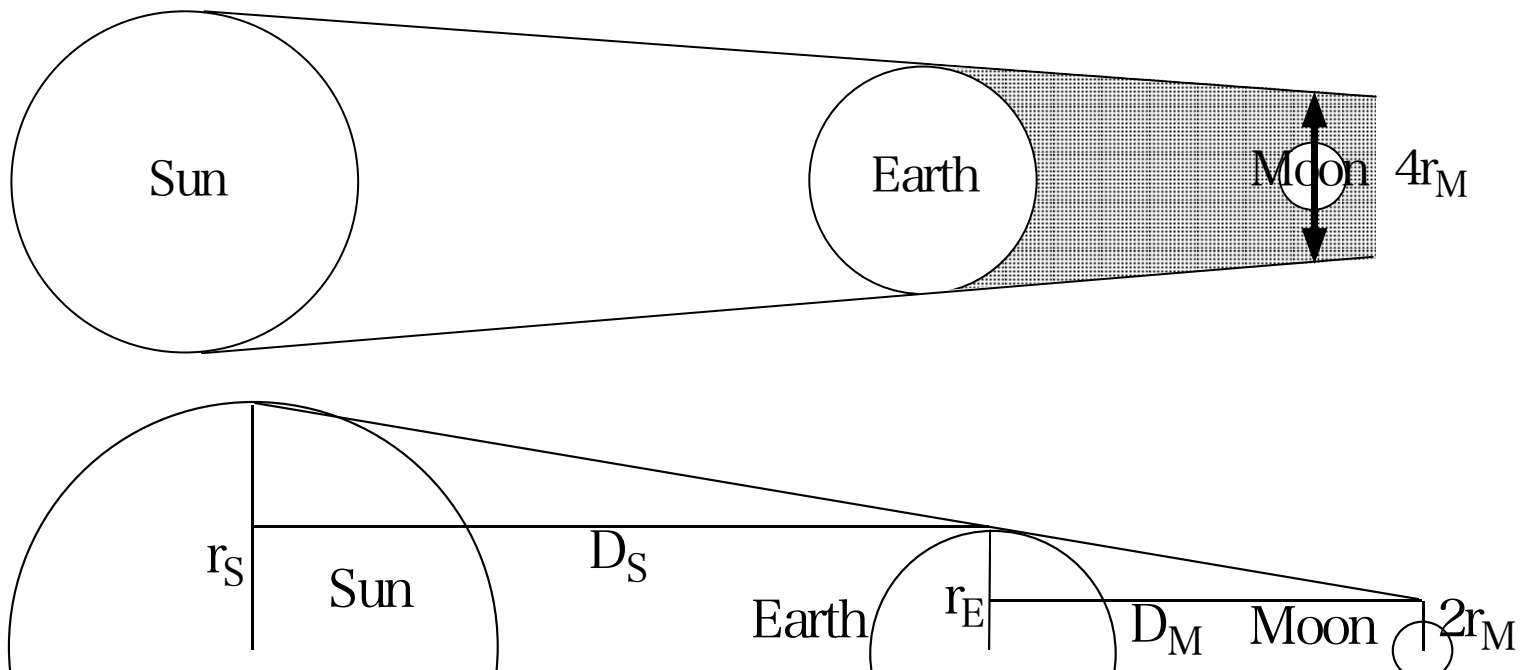
アリストアルコス

仮説 E から $\frac{r_E - 2r_M}{r_S - r_E} = \frac{D_M}{D_S} = 0.05$



アリストアルコス

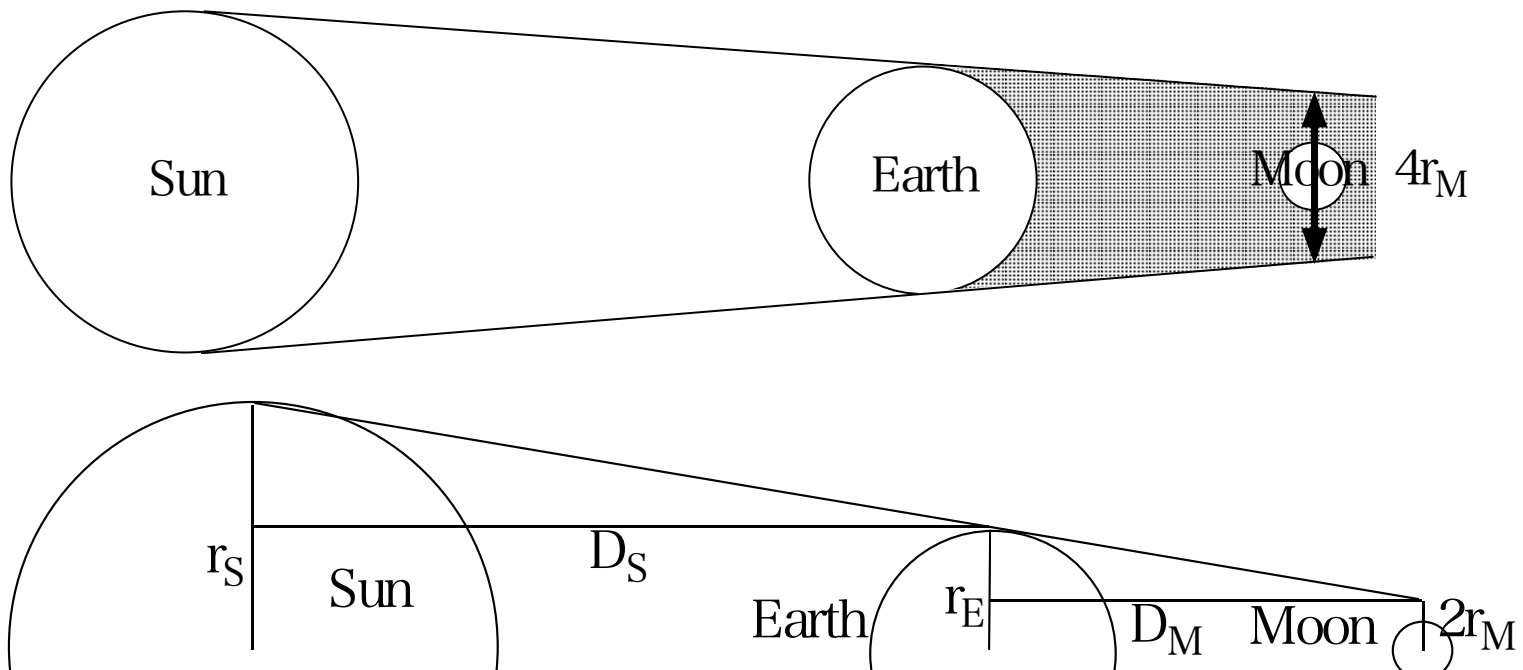
仮説 E から $\frac{r_E - 2r_M}{r_S - r_E} = \frac{D_M}{D_S} = 0.05$



$r_S = 20r_M$ を代入すると $r_M = \frac{7}{20}r_E$ 。

アリストアルコス

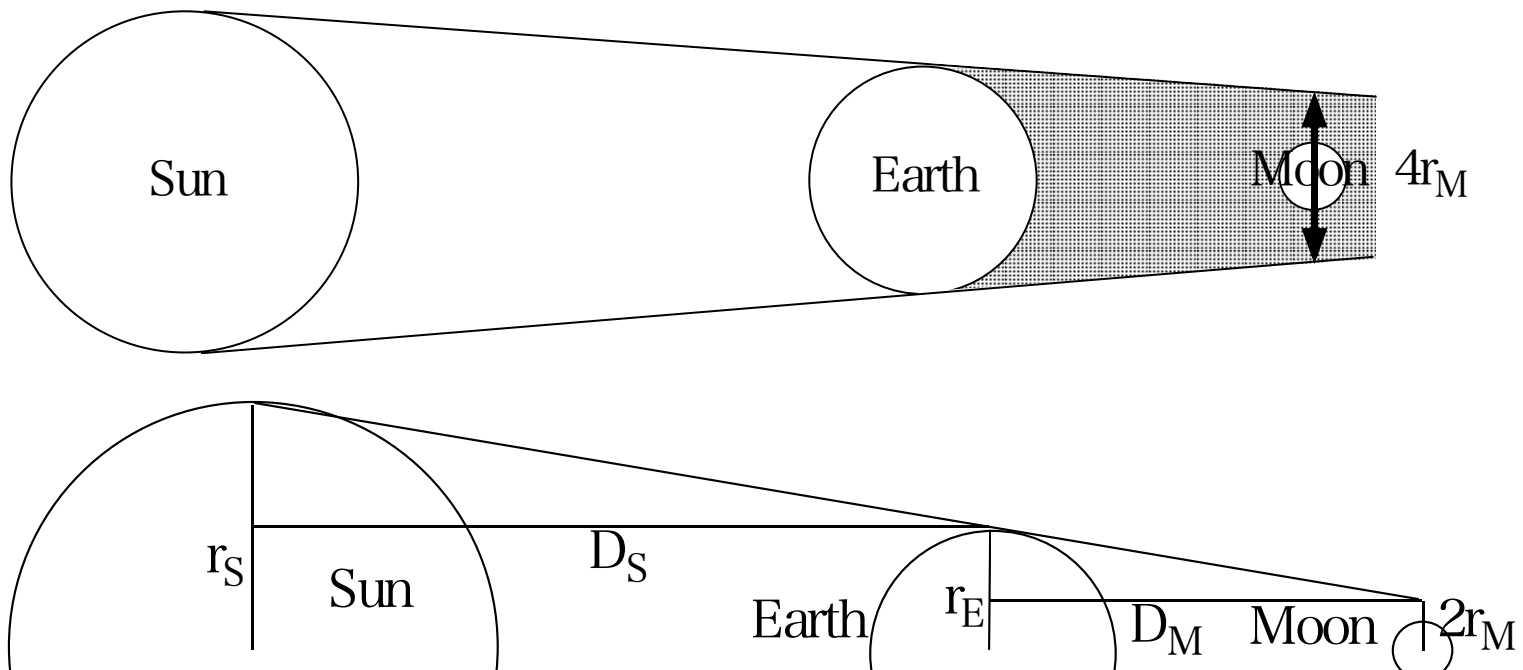
仮説 E から $\frac{r_E - 2r_M}{r_S - r_E} = \frac{D_M}{D_S} = 0.05$



$r_S = 20r_M$ を代入すると $r_M = \frac{7}{20}r_E$ 。 従って $r_S = 7r_E$

アリストアルコス

仮説 E から $\frac{r_E - 2r_M}{r_S - r_E} = \frac{D_M}{D_S} = 0.05$



$r_S = 20r_M$ を代入すると $r_M = \frac{7}{20}r_E$ 。従って $r_S = 7r_E$

また、 $D_M = 60r_M$ 、 $D_S = 20D_M$ である。

プトレマイオス



プトレマイオス

ヒッパルコスの日時計を用いて以下の観察結果を得た。

プトレマイオス

ヒッパルコス は 日時計 を用いて 以下の 観察結果 を得た。

春分～夏至 = $94 + \frac{1}{2}$ 日、夏至～秋分 = $92 + \frac{1}{2}$ 日、

秋分～冬至 = $88 + \frac{1}{8}$ 日、冬至～春分 = $90 + \frac{1}{8}$ 。

よって 1 年 = $365 + \frac{1}{4}$ 日。

プトレマイオス

ヒッパルコス は 日時計 を用いて 以下の 観察結果 を得た。

春分～夏至 = $94 + \frac{1}{2}$ 日、夏至～秋分 = $92 + \frac{1}{2}$ 日、

秋分～冬至 = $88 + \frac{1}{8}$ 日、冬至～春分 = $90 + \frac{1}{8}$ 。

よって 1 年 = $365 + \frac{1}{4}$ 日。

太陽の軌道の中心が地球であるとする と説明がつかない。

プトレマイオス

ヒッパルコス は 日時計 を用いて 以下の 観察結果 を得た。

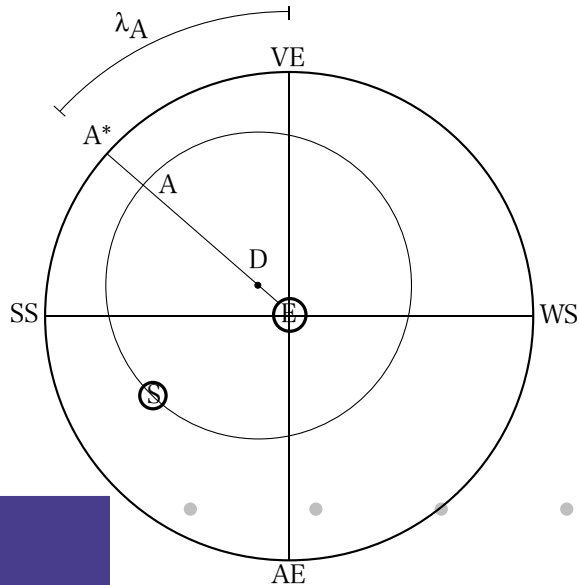
春分～夏至 = $94 + \frac{1}{2}$ 日、夏至～秋分 = $92 + \frac{1}{2}$ 日、

秋分～冬至 = $88 + \frac{1}{8}$ 日、冬至～春分 = $90 + \frac{1}{8}$ 。

よって 1 年 = $365 + \frac{1}{4}$ 日。

太陽の軌道の中心が地球である とすると 説明がつかない。

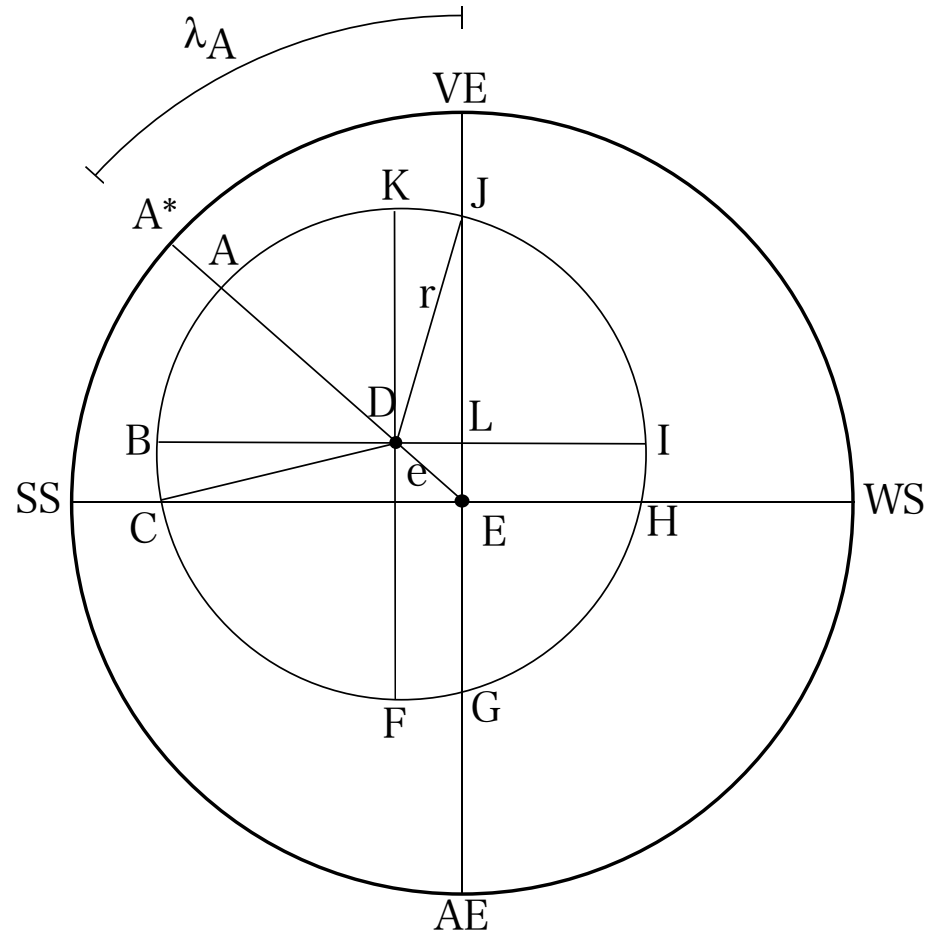
プトレマイオスは、下図の様な 太陽の軌道を 想定し、 λ_A と $\frac{e}{r}$ を求めた。(r は 太陽の軌道の半径、 $e = DE$)



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

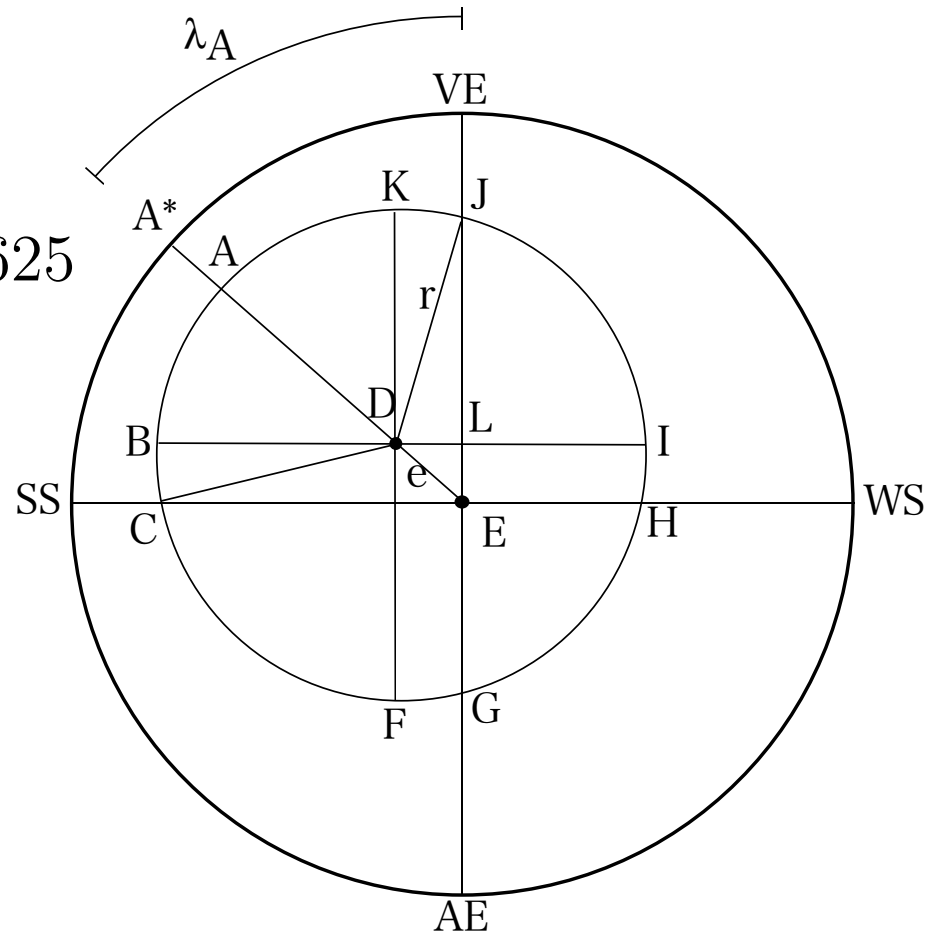


プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$



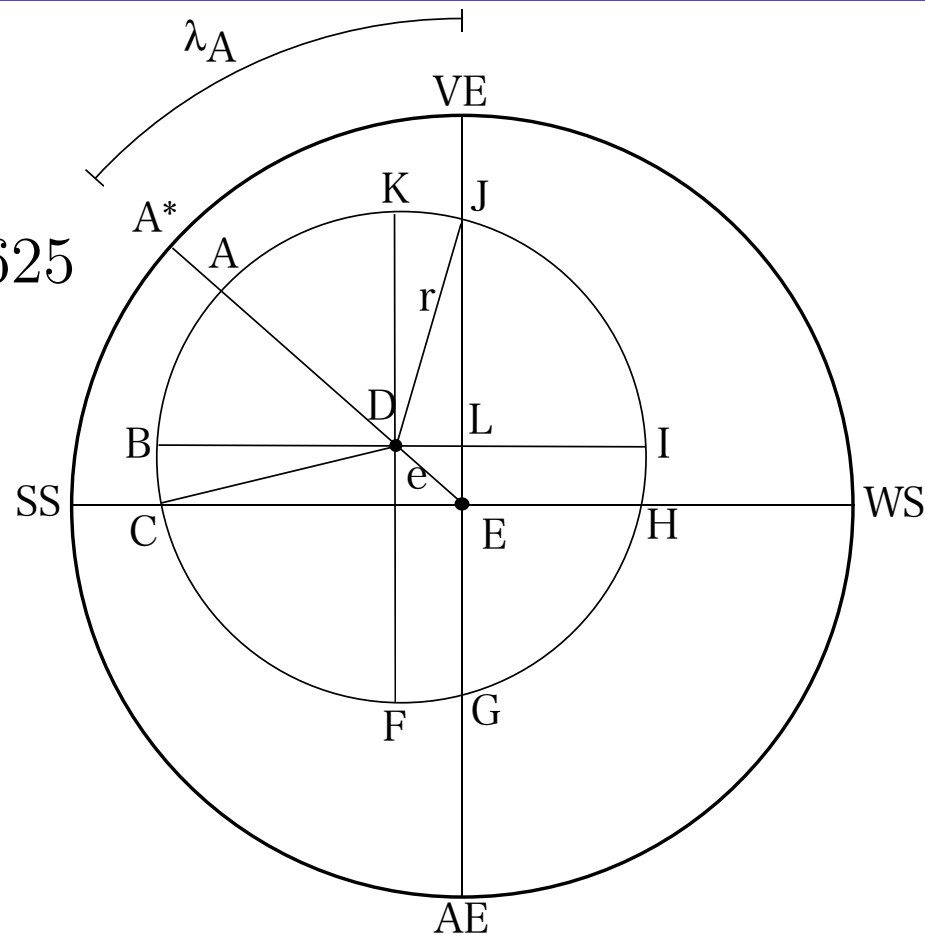
プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r$$



•

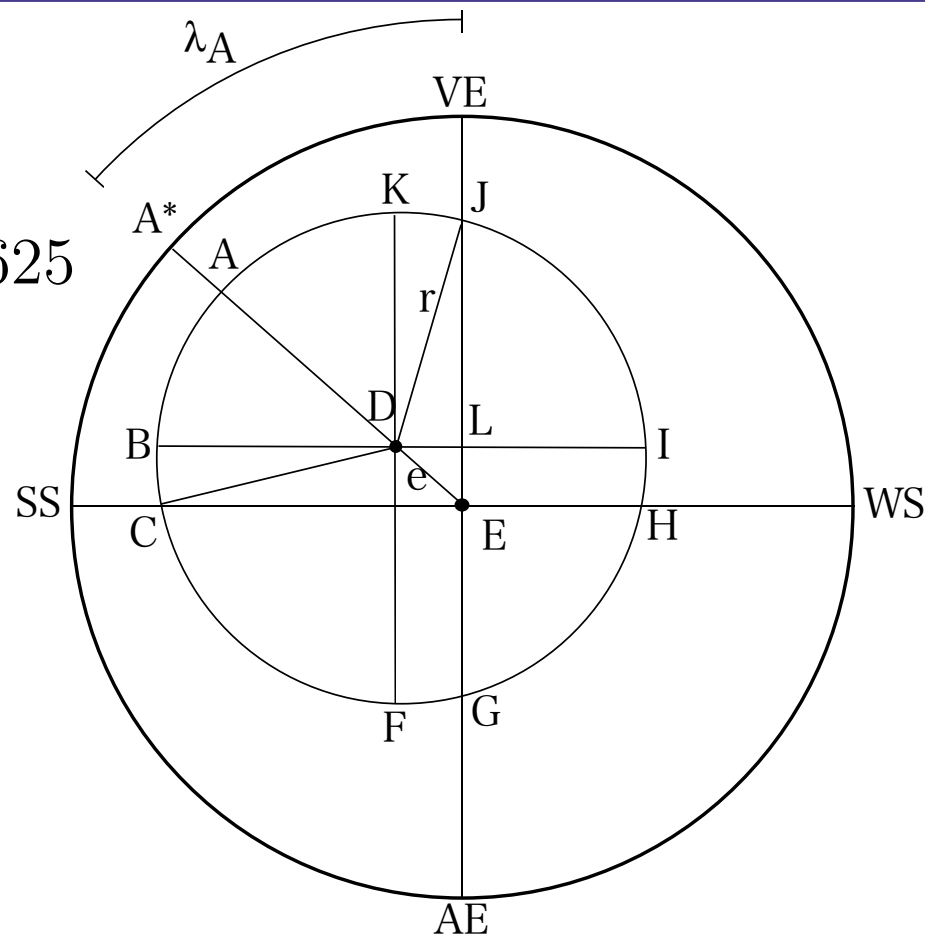
•

•

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$



太陽が一日に動く角度は

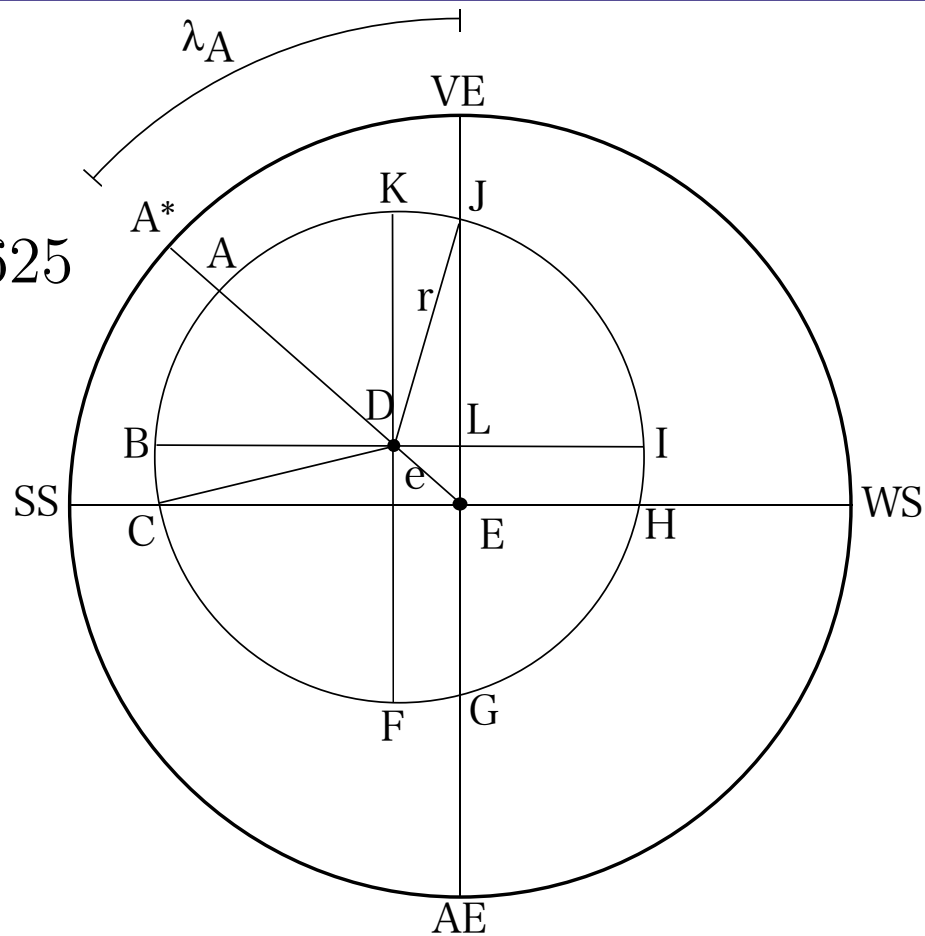
$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

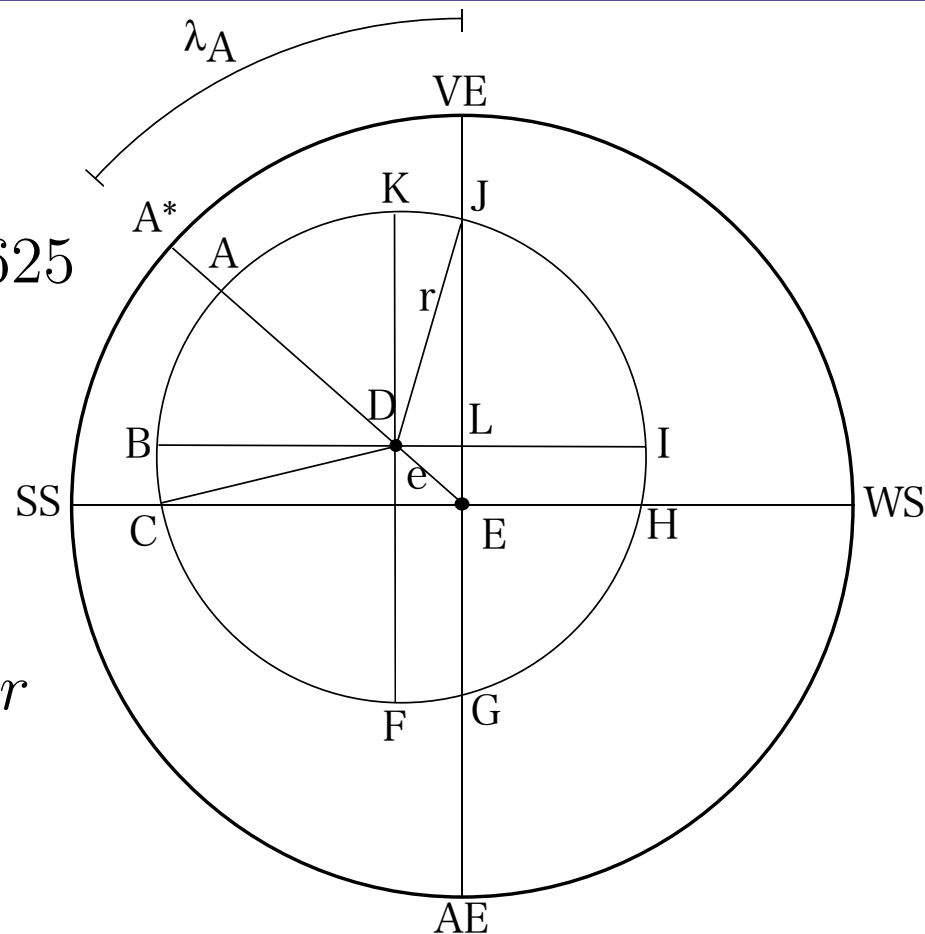
$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \quad \text{なので} \quad \widehat{JK} = 0.037r$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

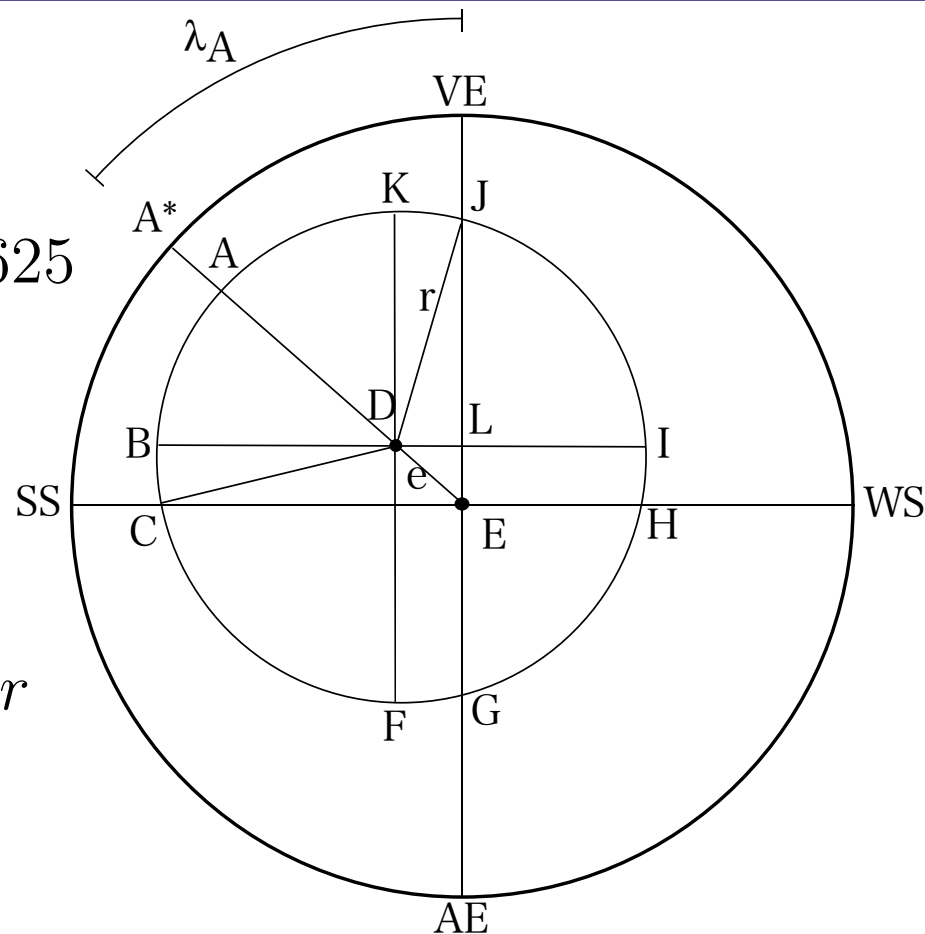
$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \text{ なので } \widehat{JK} = 0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2}r\right)$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

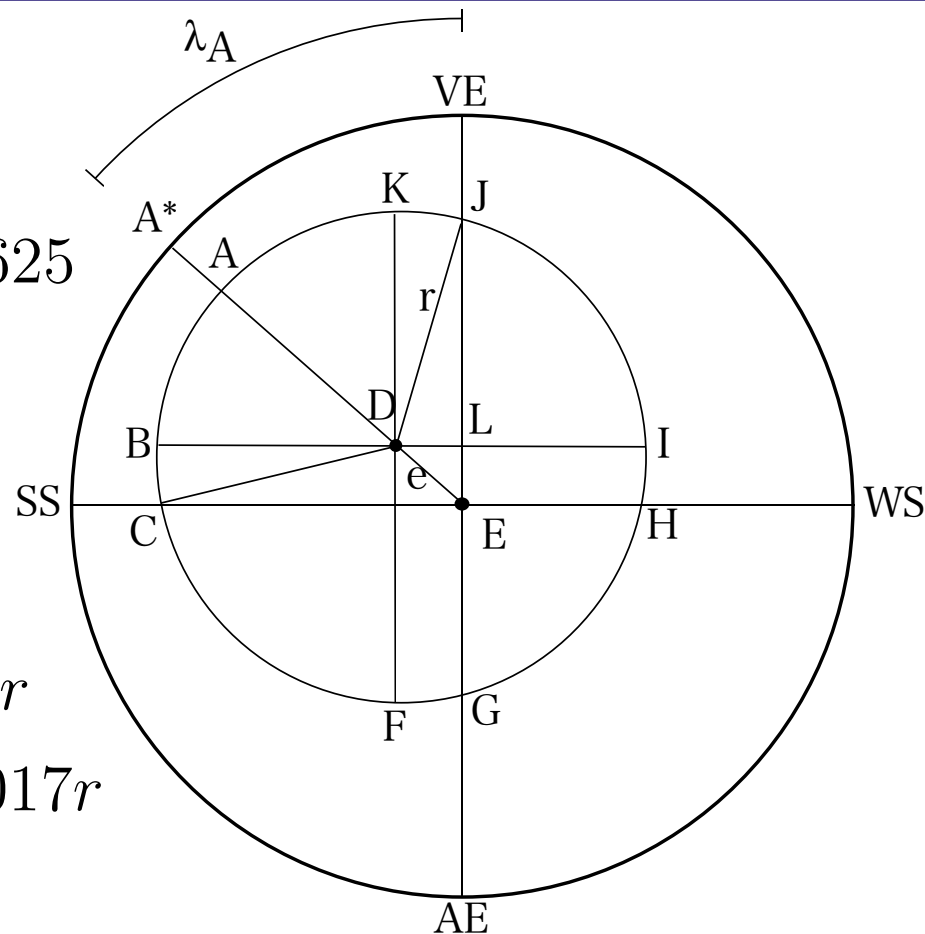
$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \text{ なので } \widehat{JK} = 0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2}r\right) = 0.017r$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

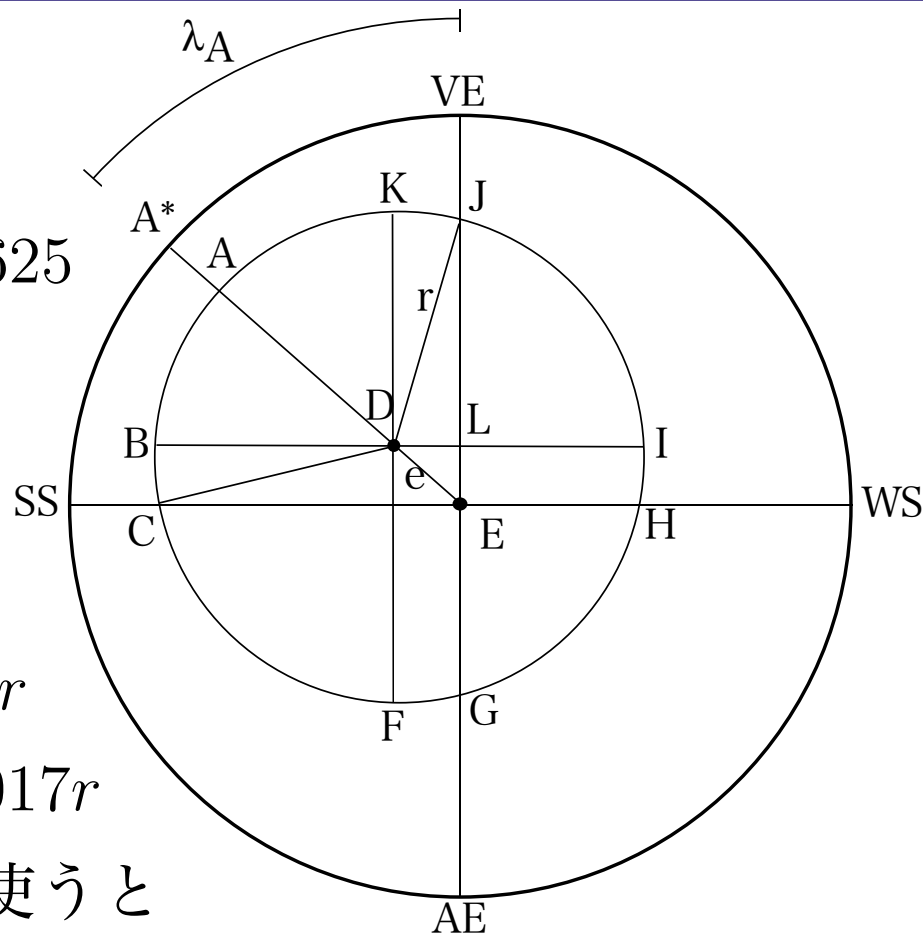
$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \text{ なので } \widehat{JK} = 0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2}r\right) = 0.017r$$

θ が小さい時に $\sin \theta \approx \theta$ を使うと



•

•

•

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$\widehat{JC} = 1.625r$ 同様に

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

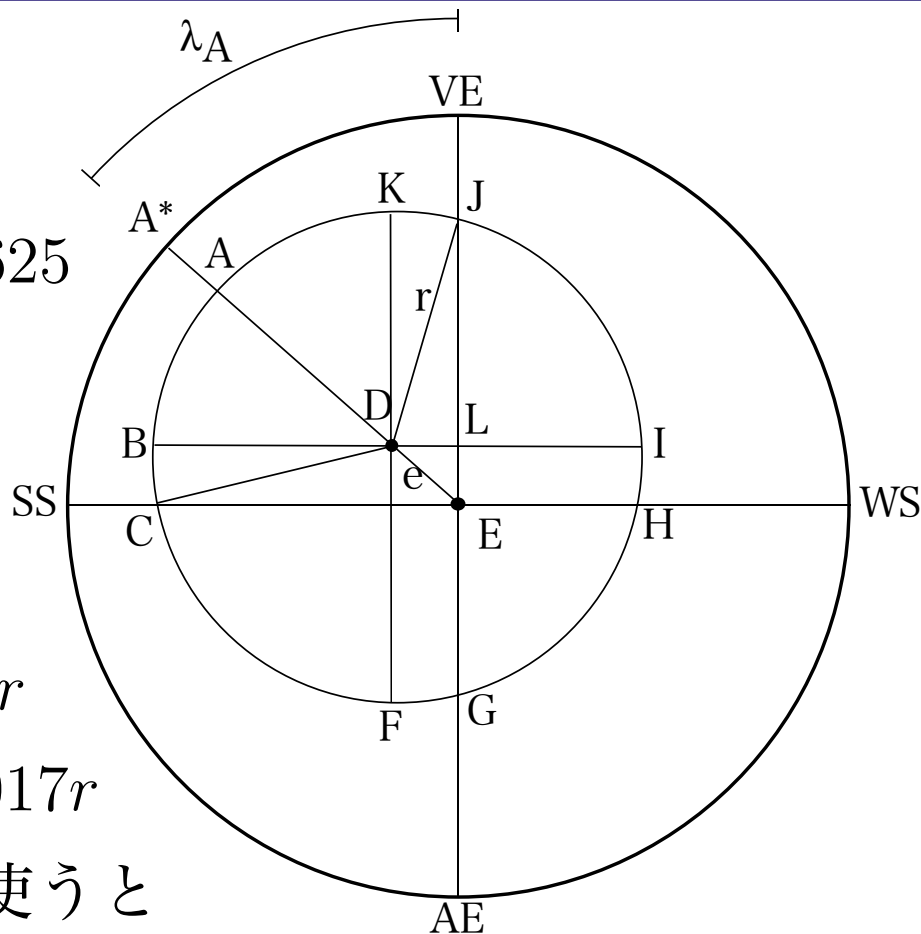
$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK}=\widehat{FG} \text{ なので } \widehat{JK}=0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2} r \right) = 0.017r$$

θ が小さい時に $\sin \theta \approx \theta$ を使うと

$$e = \sqrt{DL^2 + EL^2}$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

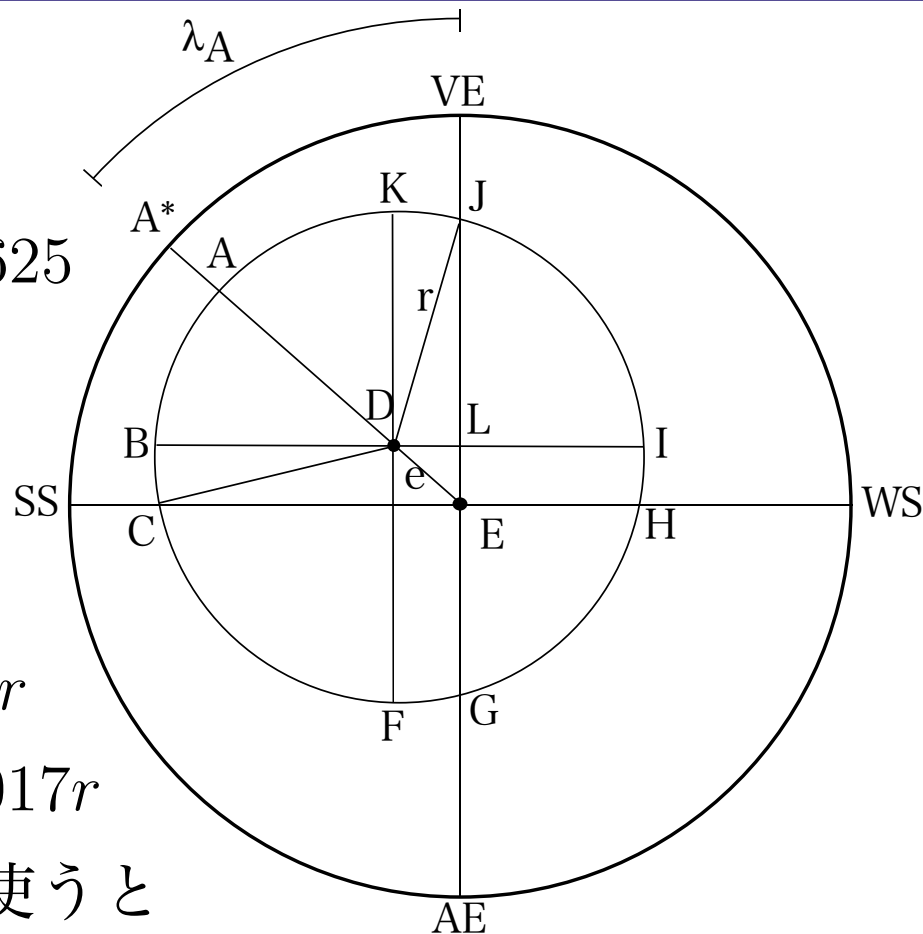
$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \text{ なので } \widehat{JK} = 0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2}r\right) = 0.017r$$

θ が小さい時に $\sin \theta \approx \theta$ を使うと

$$e = \sqrt{DL^2 + EL^2} \approx \sqrt{\widehat{JK}^2 + \widehat{BC}^2} = 0.041r$$



プトレマイオス

太陽が一日に動く角度は

$$\omega = \frac{2\pi}{365 + \frac{1}{4}} = 0.0172$$

$$\therefore \angle JDC = \left(94 + \frac{1}{2}\right) \omega = 1.625$$

$$\widehat{JC} = 1.625r \quad \text{同様に}$$

$$\widehat{CG} = \left(92 + \frac{1}{2}\right) \omega r = 1.591r$$

$$\widehat{JC} + \widehat{CG} = \widehat{JK} + \pi r + \widehat{FG}$$

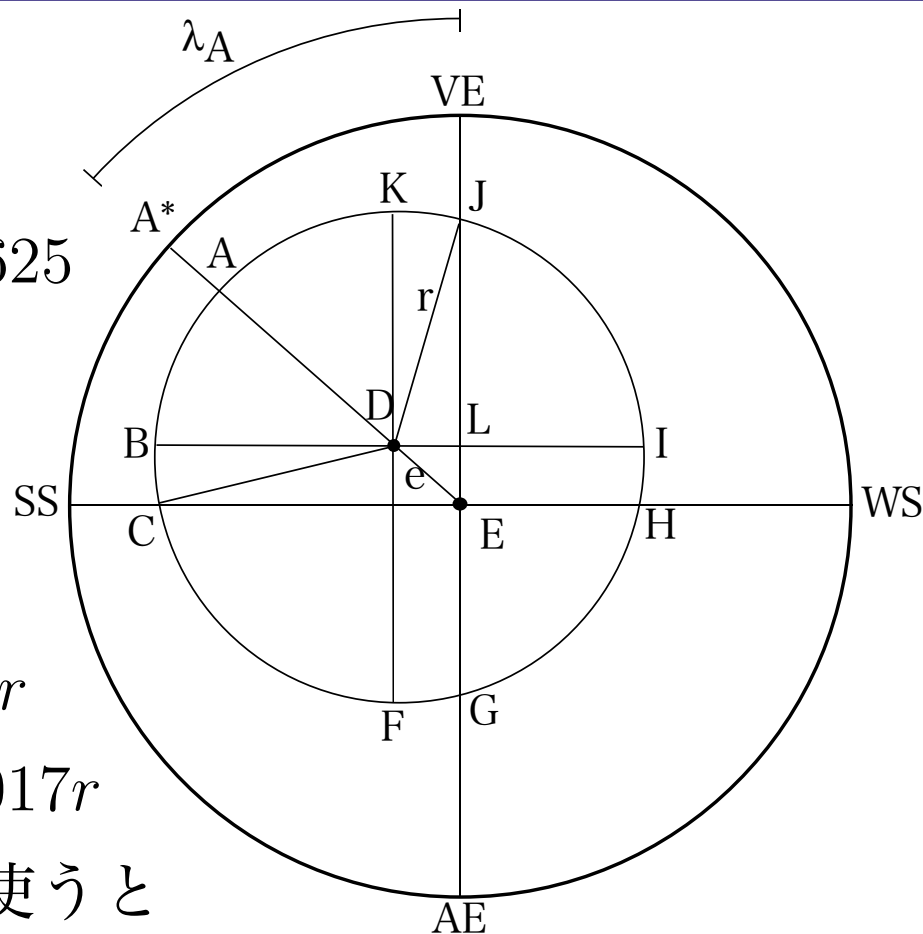
$$\widehat{JK} = \widehat{FG} \quad \text{なので} \quad \widehat{JK} = 0.037r$$

$$\widehat{BC} = \widehat{JC} - \left(\widehat{JK} + \frac{\pi}{2}r\right) = 0.017r$$

θ が小さい時に $\sin \theta \approx \theta$ を使うと

$$e = \sqrt{DL^2 + EL^2} \approx \sqrt{\widehat{JK}^2 + \widehat{BC}^2} = 0.041r$$

$$\text{また、} \sin \lambda_A = \frac{DL}{e} = 0.90 \quad \text{より} \quad \lambda_A = 64^\circ$$



プトレマイオス

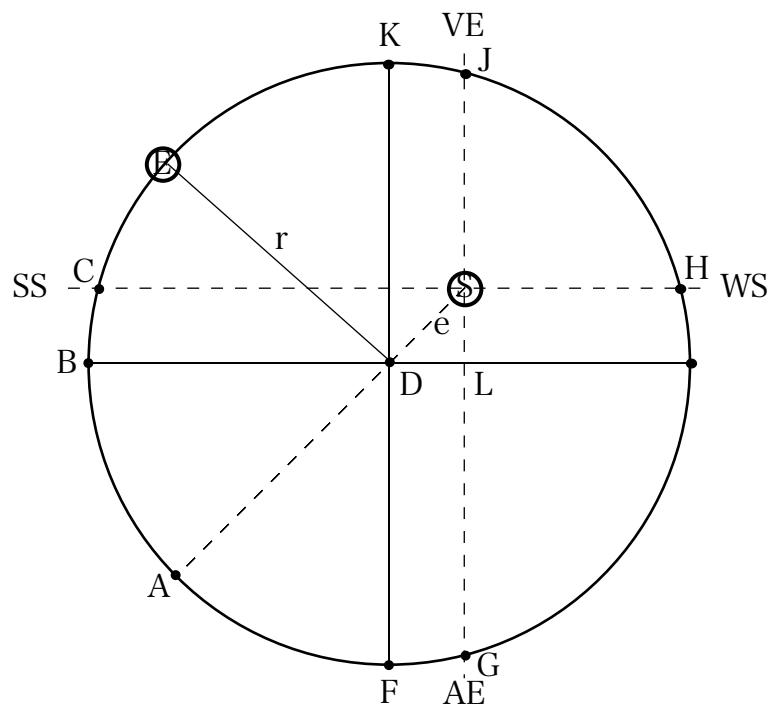
以下の現代の値を用いて、地動説で地球の軌道を考える。

春分～夏至 = 92.764 日、夏至～秋分 = 93.647 日、
秋分～冬至 = 89.836 日、冬至～春分 = 88.996 日。

プトレマイオス

以下の現代の値を用いて、地動説で地球の軌道を考える。

春分～夏至 = 92.764 日、夏至～秋分 = 93.647 日、
秋分～冬至 = 89.836 日、冬至～春分 = 88.996 日。

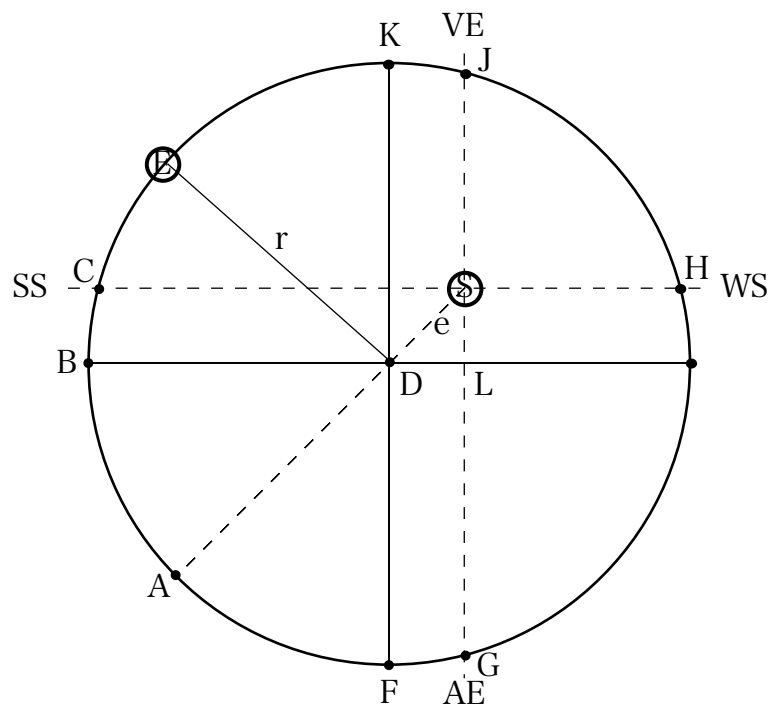


プトレマイオス

以下の現代の値を用いて、地動説で地球の軌道を考える。

春分～夏至 = 92.764 日、夏至～秋分 = 93.647 日、

秋分～冬至 = 89.836 日、冬至～春分 = 88.996 日。



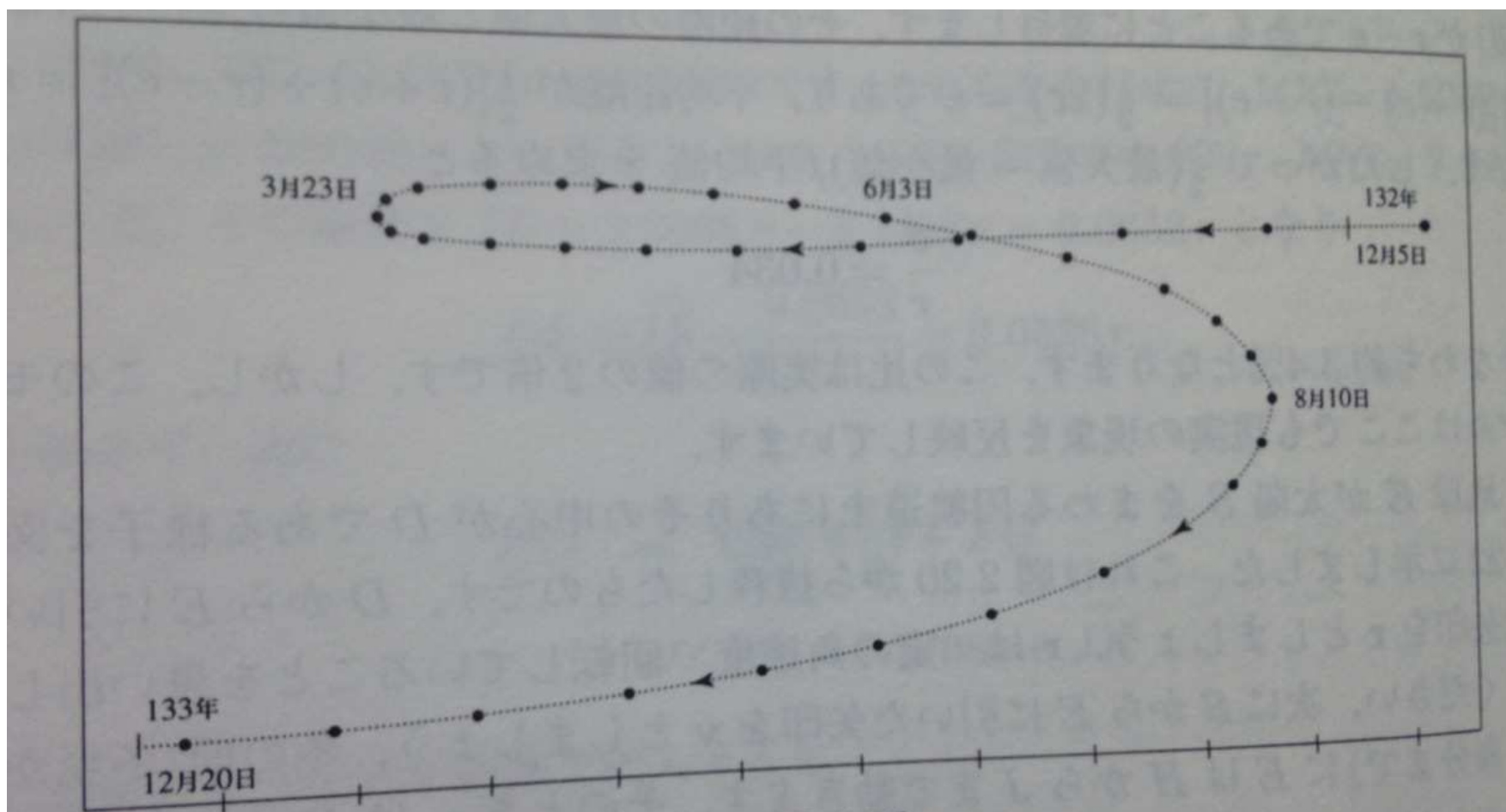
$\frac{e}{r} = 0.034$ となるが、実際には太陽と地球の距離は 1.7% 変動

惑星の逆行

太陽の軌道の説明に関しては軌道の中心を地球からずらす事で成功したが、惑星には逆行現象という難しい問題があった

惑星の逆行

太陽の軌道の説明に関しては軌道の中心を地球からずらす事で成功したが、惑星には逆行現象という難しい問題があった

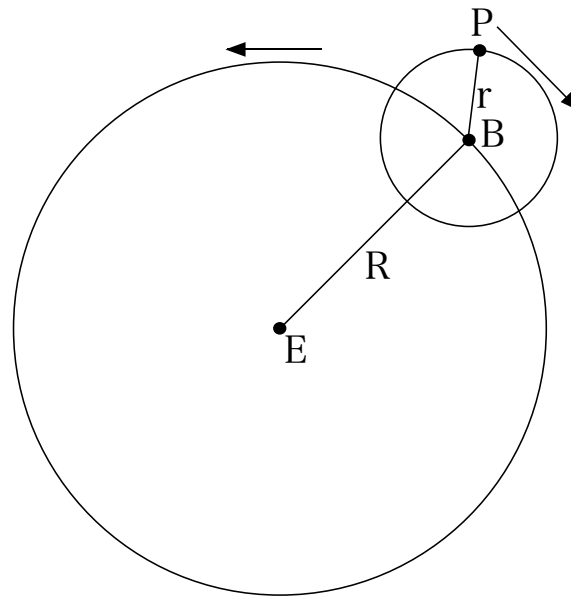


プトレマイオス

プトレマイオスは逆行の問題を、周転円というアイデアで解決しようとした。

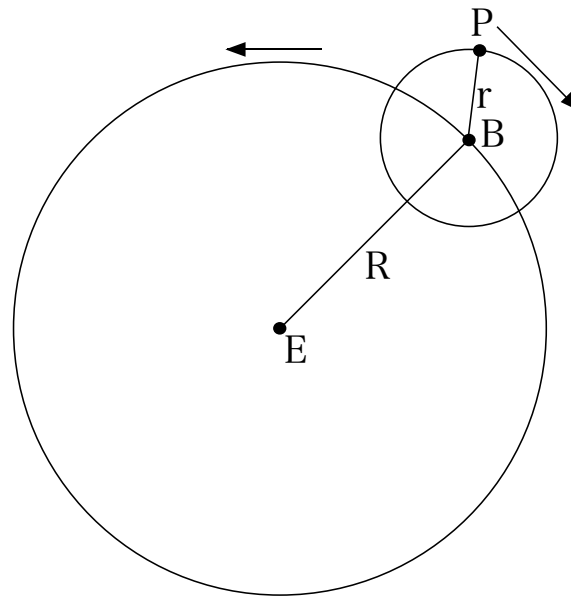
プトレマイオス

プトレマイオスは逆行の問題を、周転円というアイデアで解決しようとした。



プトレマイオス

プトレマイオスは逆行の問題を、周転円というアイデアで解決しようとした。



図中、地球を中心とする半径 R の円を従円、従円上の点 B を中心とした半径 r の周転円上を惑星が動く。従円より周転円の方が速く回転すると惑星は逆行する。

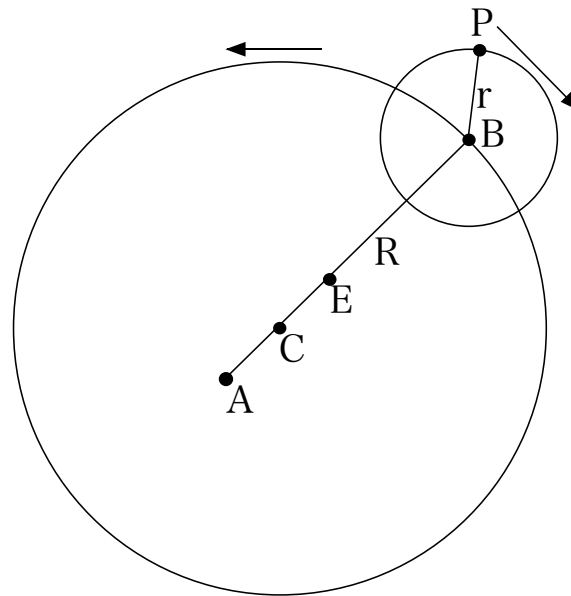
プトレマイオス

周転円のアイデアを用いても、中々観察結果と合わなかった。

プトレマイオス

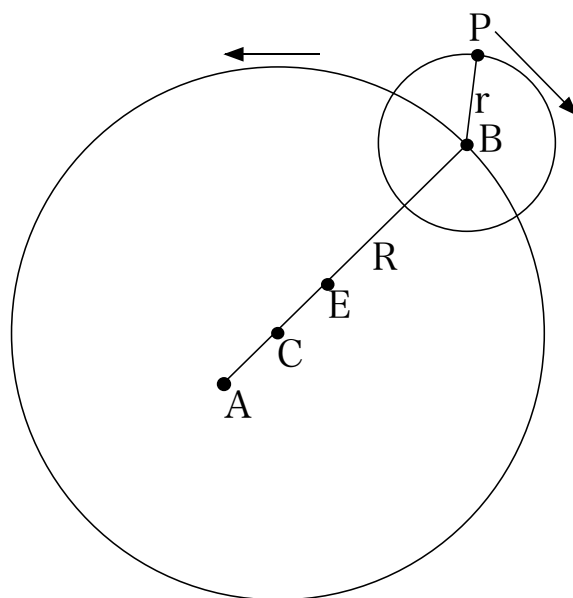
周転円のアイディアを用いても、中々観察結果と合わなかった。

そこで彼は更に、従円の中心 C を地球からずらし、さらに図中 AB が単位時間に掃く面積が一定であるとした。



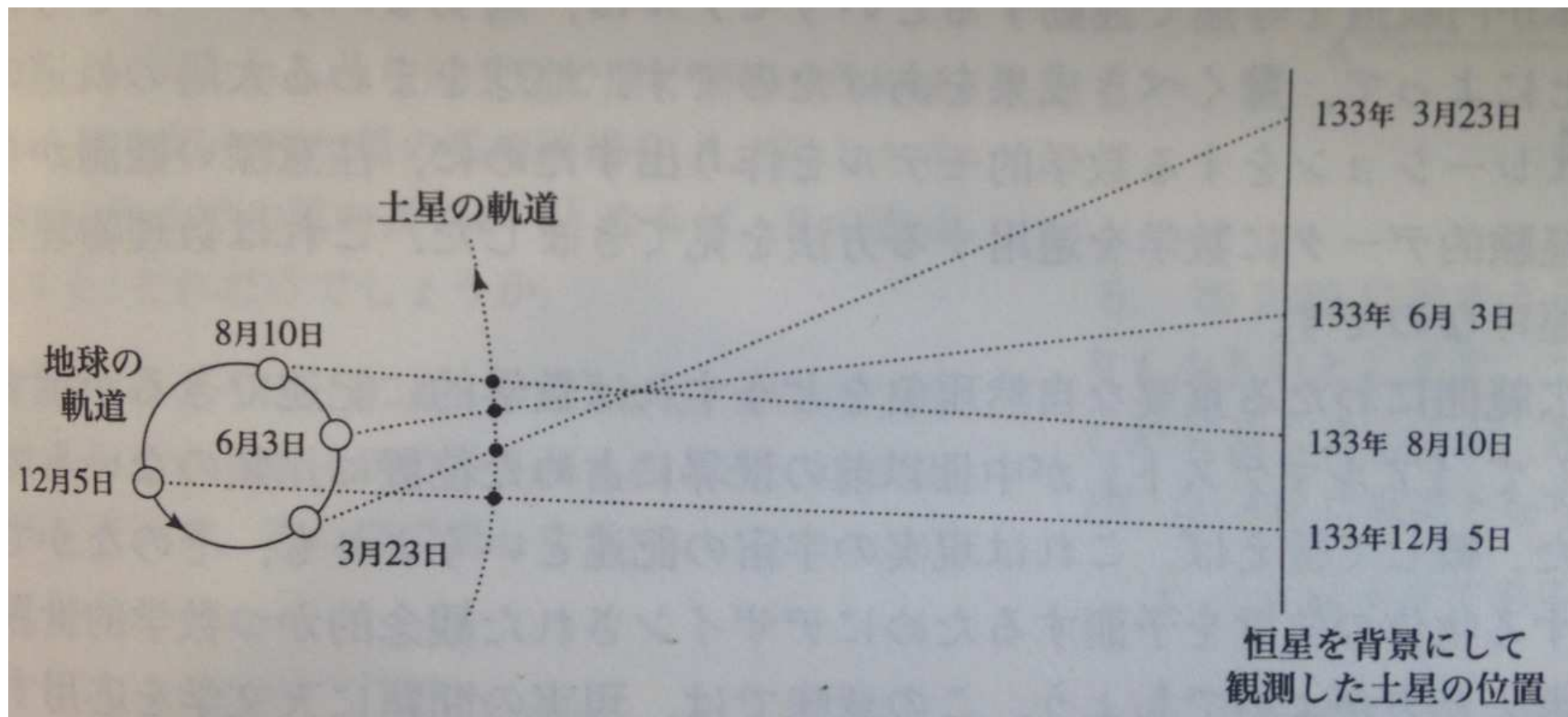
周転円のアイディアを用いても、中々観察結果と合わなかった。

そこで彼は更に、従円の中心 C を地球からずらし、さらに
 図中 AB が単位時間に掃く面積が一定であるとした。



プトレマイオスは円の組み合わせで天体の運行を表現することに拘り、天体の運動の記述は非常に複雑なものとなった。

逆行の原理



プトレマイオスの数学

プトレマイオスの数学

プトレマイオスは、天体の運動以外に、数学の定理も数多く記録に残している。以下はその一部：

プトレマイオスの数学

プトレマイオスは、天体の運動以外に、数学の定理も数多く記録に残している。以下はその一部：

定理

円周角は中心角の半分である。

プトレマイオスの数学

プトレマイオスは、天体の運動以外に、数学の定理も数多く記録に残している。以下はその一部：

定理

円周角は中心角の半分である。

定理

円周角は一定である。

プトレマイオスの数学

プトレマイオスは、天体の運動以外に、数学の定理も数多く記録に残している。以下はその一部：

定理

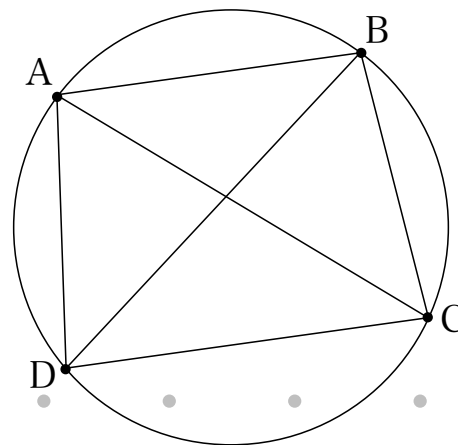
円周角は中心角の半分である。

定理

円周角は一定である。

プトレマイオスの定理

下図において、 $(AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (AD) \cdot (BC)$

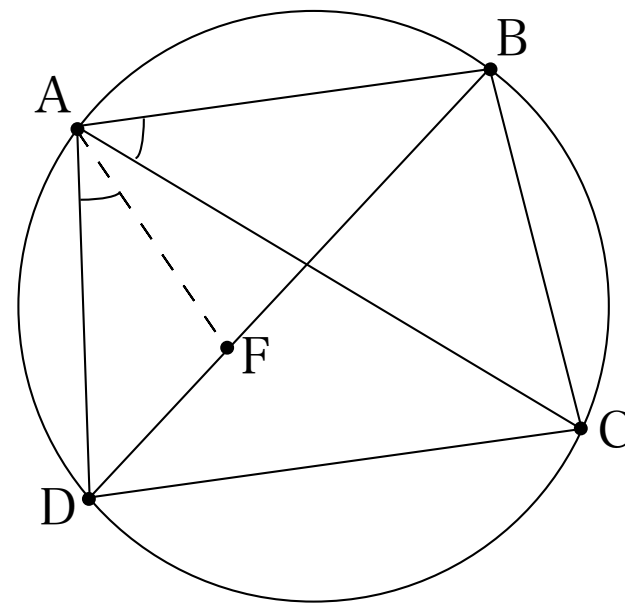


プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明
 BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

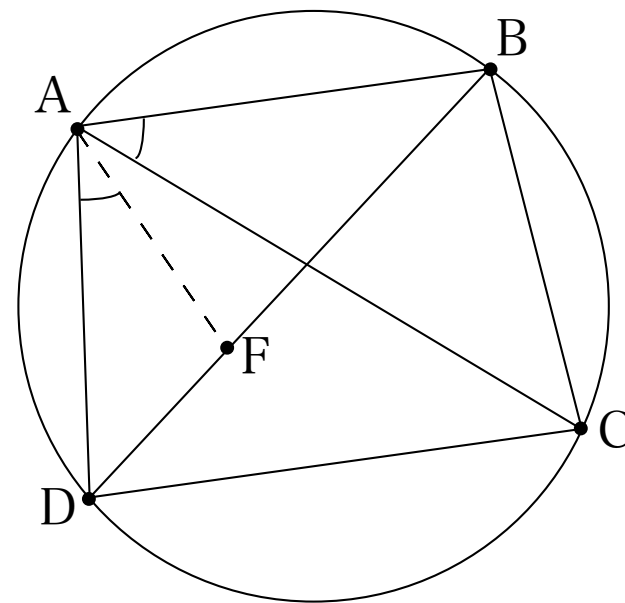


プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。



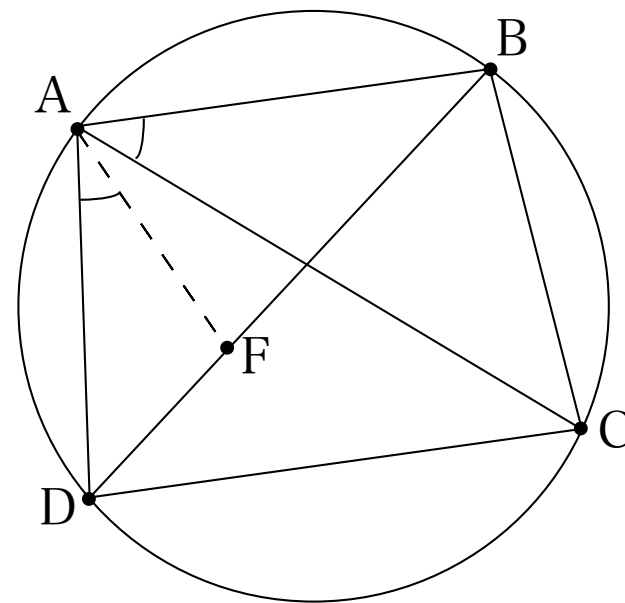
プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

従って、
$$\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$$



プトレマイオスの数学

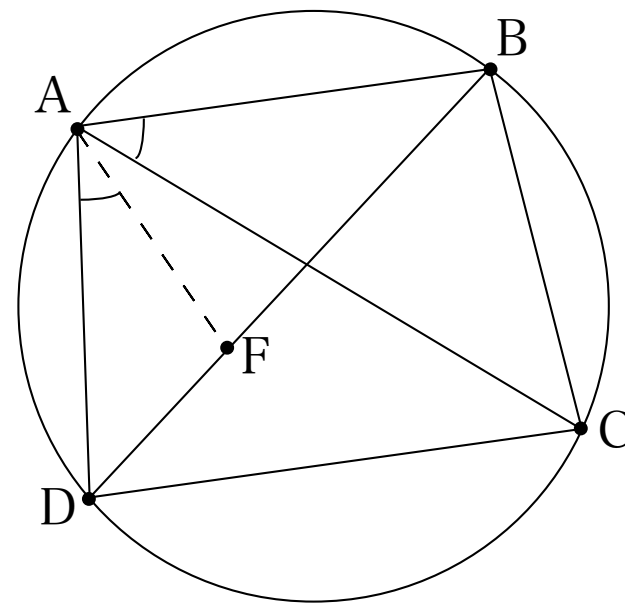
プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

従って、
$$\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、



プトレマイオスの数学

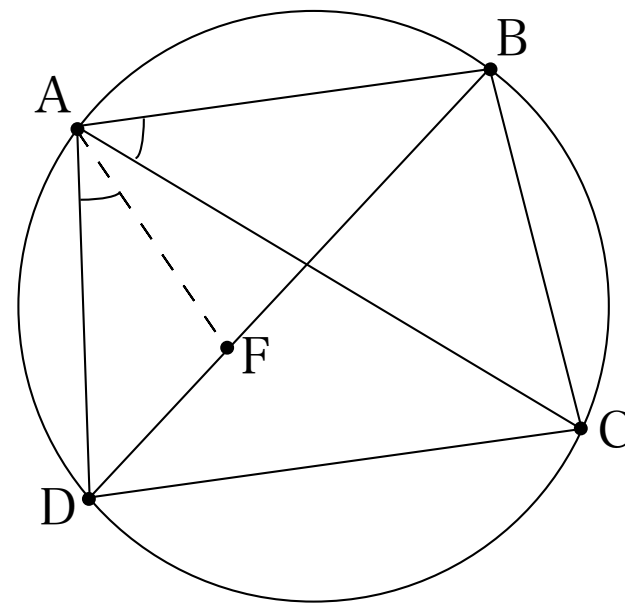
プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

従って、 $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、 また、
 $\angle DAC = \angle DAF + \angle FAC = \angle BAC + \angle FAC = \angle FAB$



プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

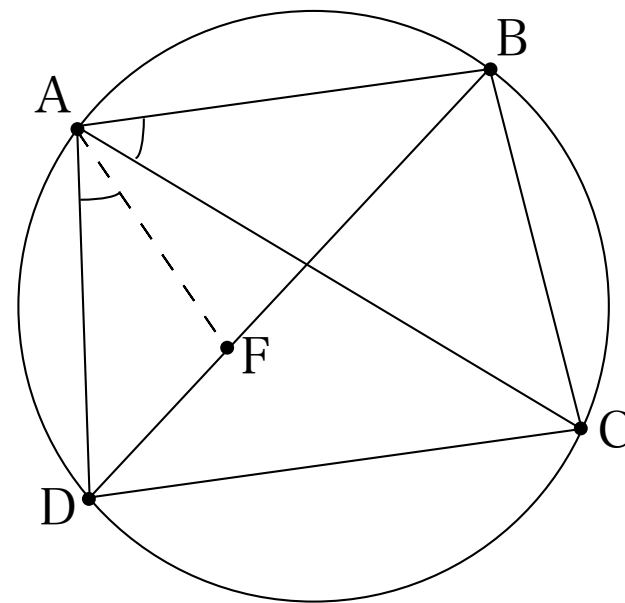
円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

従って、 $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、 また、

$\angle DAC = \angle DAF + \angle FAC = \angle BAC + \angle FAC = \angle FAB$

従って、 $\triangle ACD$ と $\triangle ABF$ は相似で $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD}$



プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

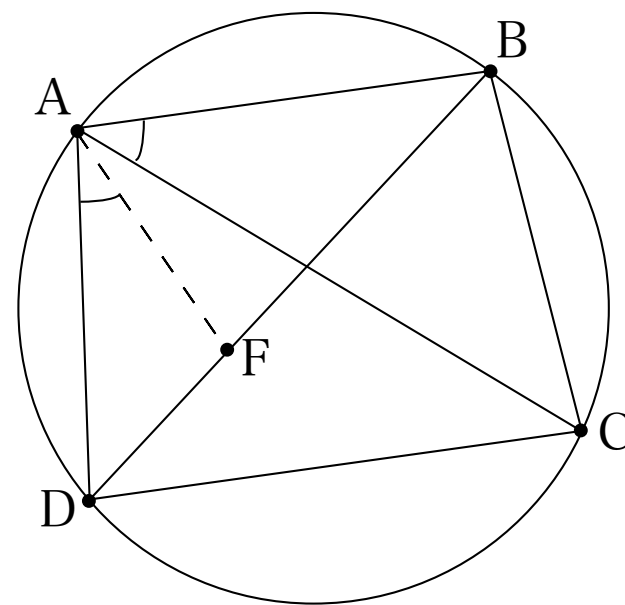
従って、 $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、 また、

$\angle DAC = \angle DAF + \angle FAC = \angle BAC + \angle FAC = \angle FAB$

従って、 $\triangle ACD$ と $\triangle ABF$ は相似で $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD}$

ここで $BD = BF + DF$ なので



プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

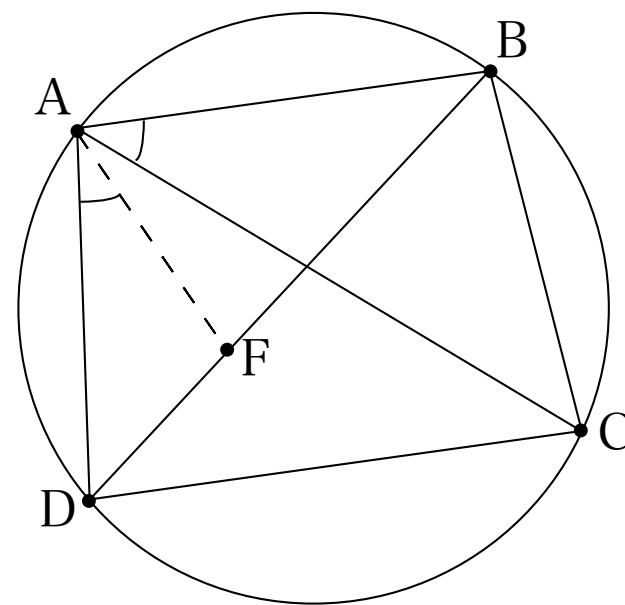
従って、 $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、 また、

$\angle DAC = \angle DAF + \angle FAC = \angle BAC + \angle FAC = \angle FAB$

従って、 $\triangle ACD$ と $\triangle ABF$ は相似で $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD}$

ここで $BD = BF + DF$ なので $BD = \frac{AB}{AC}CD + \frac{AD}{AC}BC$ 、



プトレマイオスの数学

プトレマイオスの定理の証明

BD 上に $\angle DAF = \angle BAC$ となる
点 F を取る。

円周角の定理より $\angle ADF = \angle ACB$
なので $\triangle ADF$ と $\triangle ACB$ は相似。

$$\text{従って、} \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$$

再び円周角の定理より $\angle ACD = \angle ABF$ 、 また、

$$\angle DAC = \angle DAF + \angle FAC = \angle BAC + \angle FAC = \angle FAB$$

$$\text{従って、} \triangle ACD \text{ と } \triangle ABF \text{ は相似で } \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD}$$

$$\text{ここで } BD = BF + DF \text{ なので } BD = \frac{AB}{AC}CD + \frac{AD}{AC}BC、$$

$$\text{従って、} (AC) \cdot (BD) = (AB) \cdot (CD) + (AD) \cdot (BC)$$

