Existence of Densities of Solutions of Stochastic Differential Equations by Malliavin Calculus

Seiichiro Kusuoka (Keio University)

There is a result of N. Bouleau and F. Hirsch about existence of densities of solutions of stochastic differential equations. The result tells us that if there are some conditions about ellipticity, the distribution of the solution of stochastic differential equation whose coefficients are Lipschitz continuous has its density. But, if there are some conditions about ellipticity, it seems that the solution has its density even if the coefficients are not Lipschitz continuous. So I considered if the solution has its density or not when the coefficients are not Lipschitz continuous.

When stochastic differential equations whose coefficients are not necessary Lipschitz continuous, the solutions would not belong to Sobolev space in general. So we prepare a larger class than Sobolev space.

Let (B, H, μ) be an abstract Wiener space, $h \in H$, and fix h.

Definition 1 *We denote $V_h(B)$ by the total set of random variables F on $(B, \mathscr{B}(B), \mu)$ such that there exists a random variable $\widehat{F}$ on $(B, \mathscr{B}(B), \mu)$ satisfying that $F = \widehat{F}$ a.s. and $\widehat{F}(x + th)$ is a function of bounded variation on any finite interval with respect to t for all x.*

Let D_h be differential for the direction h. Then we have a theorem about random variables which belong to the class $V_h(B)$ as follows. The theorem is associated to that of N. Bouleau and F. Hirsch.

Theorem 2 *Let F be a random variable such that $F \in V_h(B)$. If $\widehat{F}$ is the modification of F appeared in the definition of $V_h(B)$, then the measure on $\mathbf{R}$*

$$(|D_h \widehat{F}|\mu) \circ \widehat{F}^{-1}$$

is absolutely continuous with the 1-dimensional Lebesgue measure.

Now we consider if solutions of stochastic differential equations whose coefficients are not necessary Lipschitz continuous have their densities or not.

Theorem 3 *Let d, r be positive integers, $(B(t))$ be a r-dimensional Brownian motion,*

$$\sigma = (\sigma^i_j)_{i=1,\dots d, j=1,\dots r} \in C_b([0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r),$$
$$b = (b^i)_{i=1,\dots d} \in C_b([0,T] \times C([0,T] \to \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^d),$$

We consider a d-dimensional stochastic differential equation;

$$\begin{cases} dX^i(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sigma^i_j(t, X^i(t)) dB^j(t) + b^i(t, X) dt \quad i = 1, 2, \dots d, \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}^d. \end{cases}$$

Moreover, we assume that there exists constants M, K and a Radon measure η on $[0, T]$ satisfying that

$$\max_{i,j} |\sigma^i_j(t,x)| \le M, \quad \textit{for all} \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},$$

$$\max_i |b^i(t,w) - b^i(t,w')| \le K \left(\int_0^t |w(s) - w'(s)| d\eta(s) + |w(t) - w'(t)| \right), \quad \textit{for all} \quad t \in [0,T],\ w, w' \in C([0,T] \to \mathbf{R}^d),$$

and the stochastic differential equation has pathwise uniqueness.

Then, the solution $(X(t))$ can be defined on a Wiener space (W, H, μ), and $X^i(t)$ is in $V_h(W)$ for all t in $[0,T]$, $i = 1, 2, \cdots, d$, and $h \in H$. Moreover, if we denote the version of $X^i(t)$ appeared in Definition1 by $\widehat{X^i(t)}$, then

$$\left(\left| D\widehat{X^i(t)} \right| \mu \right) \circ X^i(t)^{-1}$$

is absolutely continuous to one-dimensional Lebesgue measure.

When the coefficients are Lipschitz continuous, by the result of N. Bouleau and F. Hirsch, the condition about ellipticity implies the positivity of $|\det(DX^i(t), DX^j(t))_H|$. But when the coefficients are not necessary Lipschitz continuous, we cannot use the discussion. Generally, it is hard to get some information about $D_h X(t)$. However, in the special case we can conclude the positivity of $D_h X(t)$.

Theorem 4 *Let r be positive integer and $(B(t))$ be a r-dimensional Brownian motion, and consider a one-dimensional stochastic differential equation;*

$$\begin{cases} dX(t) = \sum_{j=1}^r \sigma_j(t, X(t)) dB^j(t) + b(t, X(t)) dt \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

and the stochastic differential equation has pathwise uniqueness. On the coefficients we assume

$$\sigma = (\sigma_j)_{j=1,\dots r} \in C_b([0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^r),$$
$$b \in C_b([0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}),$$

there exists constants M and K satisfying that

$$\max_j |\sigma_j(t,x)| \le M, \quad \textit{for all} \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \le K|x - y| \quad \textit{for all} \quad x, y \in \mathbf{R} \textit{ and } t \in [0,T].$$

There is a set S that consists of real numbers satisfying that $\sigma_j \in C^{0,2}([0,T] \times (\mathbf{R} \setminus S))$ for $j = 1, 2, \cdots, r$, and $\sum_{j=1}^r \sigma_j$ is positive on $[0,T] \times (\mathbf{R} \setminus S)$.

Then,

$$\mu \circ X(t)^{-1}\big|_{\mathbf{R} \setminus S}$$

is absolutely continuous to one-dimensional Lebesgue measure restricted on $\mathbf{R} \setminus S$ for all t in $[0,T]$.

Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of $P(\phi)_2$ Hamiltonian on finite volume

Shigeki Aida
Osaka University

In this talk, we discuss the semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a $P(\phi)_2$-Hamiltonian on a finite volume interval. Let $I = [-l/2, l/2]$ $(l > 0)$ and $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ be the Laplace operator with periodic boundary condition on $L^2(I, dx)$. Let $\tilde{A} = (m^2 - \Delta)^{1/4}$ and define

$$H^s(I, dx) = \left\{ h \in \mathrm{D}(\tilde{A}^{2s}) \mid \|h\|_{H^s} := \|\tilde{A}^{2s} h\|_{L^2(I,dx)} \right\}.$$

In particular set $H = H^{1/2}(I, dx)$. Let (W, H, μ) be the associated abstract Wiener space. For example, $W = H^{-s_0}(I, dx)$ for any positive s_0. Note that W is the space of Schwartz distributions. Let $A = \Phi \circ \tilde{A} \circ \Phi^{-1}$, where $\Phi : L^2(I, dx) \to H$ is the natural unitary transformation. A is a self-adjoint operator on H. Let $-L_A$ be the generator of the following Dirichlet form:

$$\mathcal{E}_A(f, f) = \int_W \|ADf(w)\|_H^2 d\mu.$$

Let $P(u) = \sum_{k=0}^{2N} a_k u^k$ be a polynomial function with $a_{2N} > 0$ and $N \geq 2$. Let g be a periodic positive smooth function on $\mathbb{R}$ such that $g(x + l) = g(x)$ for all x. We define the potential function on W by

$$V_\lambda(w) = \lambda : V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) :, \tag{1}$$

$$: V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) : = \int_I : P\left(\frac{w(x)}{\sqrt{\lambda}}\right) : g(x)dx, \tag{2}$$

where $\lambda > 0$ and $: P(w(x)) :$ is defined by the Wick product with respect to μ. $\lim_{n\to\infty} \int_I : P\left(\frac{w_n(x)}{\sqrt{\lambda}}\right) : g(x)dx$ exists in $L^2(\mu)$ and we denote the limit by $: V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) :$. Here note that we cannot define $\int_I w(x)^k g(x)dx$ for $k \geq 2$. The operator $(-L_A + V_\lambda, \mathfrak{F}C_A^\infty(W))$ ($\mathfrak{F}C_A^\infty(W)$ denotes the set of smooth cylindrical functions) is essentially self-adjoint in $L^2(\mu)$ and we denote the self-adjoint extension by $-L_A + V_\lambda$. $-L_A + V_\lambda$ is called a $P(\phi)_2$ Hamiltonian on a finite volume interval I. Physically λ is the inverse of the Planck constant $\hbar$ and our problem is to determine the semi-classical limt of the lowest eigenvalue $E_0(\lambda)$ of $-L_A + V_\lambda$ as $\lambda \to \infty$ in terms of the potential function U which is given below.

Definition 1 Let $U(h) = \frac{1}{4}\|Ah\|_H^2 + V(h)$ for $h \in \mathrm{D}(A)$ and $U(h) = +\infty$ for $h \notin \mathrm{D}(A)$. Here $V(h) = \int_I P(h(x))g(x)dx$ and $h \in H$.

It is easy to see that $U(h)$ is a smooth functional on $H^1(I, dx)$. The following is our main theorem.

Theorem 2 *Assume* (A1) *and* (A2).
(A1) $U(h)$ $(h \in H^1(I, dx))$ *is a non-negative function and has finitely many zero point set* $N = \{h_1, \ldots, h_n\}$.
(A2) *Suppose* (A1). *The Hessian* $\frac{1}{2}D^2U(h_i) \in L(H^1(I, dx), H^1(I, dx))$ *is a strictly positive operator for all* $1 \le i \le n$.

Let $E_0(\lambda) = \inf \sigma(-L_A + V_\lambda)$. *Then*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_0(\lambda) = \min_{1 \le i \le n} E_i, \tag{3}$$

where E_i *is the lowest eigenvalue of* $-L_A + Q_{v_i}(w)$ *and* $Q_{v_i}(w) = \int_I : w(x)^2 : v_i(x)dx$, $v_i(x) = \frac{1}{2}P''(h_i(x))g(x)$. *Explicitly,*

$$\begin{aligned} \inf \sigma(-L_A + Q_{v_i}) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{A}_{v_i}^2 - \tilde{A}^2 - 2\tilde{A}^{-1}M_{v_i}\tilde{A}^{-1}\right) && (4) \\ &= -\frac{1}{4}\| \left(\tilde{A}_{v_i}^2 - \tilde{A}^2\right)\tilde{A}^{-1}\|^2_{L_{(2)}(L^2(I,dx))}, && (5) \end{aligned}$$

where $\tilde{A}_{v_i} = (m^2 - \Delta + 4v_i)^{1/4}$ *and* tr *denotes the trace in* $L^2(I, dx)$.

References

[1] S. Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space : I. Unbounded one particle Hamiltonians, submitted, 2008.

[2] S. Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space : II. $P(\phi)_2$-model on a finite volume, to appear in Journal of Functional Analysis.

[3] A. Arai, Trace formula, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, J. Funct. Anal. **136**, (1996), 510–547.

[4] J. Dereziński and C. Gérard, Spectral and scattering theory of spatially cut-off $P(\varphi)_2$ Hamiltonians, Commn. Math. Phys. **213** (2000), no.1, 39–125.

[5] W.J. Eachus and L. Streit, Exact solution of the quadratic interaction Hamiltonian, Reports on Mathematical Physics **4**, No. 3, 161–182, 1973.

[6] L. Rosen, Renormalization of the Hilbert space in the mass shift model, J. Mathematical Phys. **13** (1972), 918–927.

[7] B. Simon, Continuum embedded eigenvalues in a spatially cutoff $P(\phi)_2$ field theory, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 223–226.

[8] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton University Press, New Jersey, (1974).

ギャンブル戦略とマルチンゲール

Alexander Novikov(University of Technology, Sydney),
鍛治俊輔 (大阪大学)

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $\{X_k, k \geq 1\}$ is an i.i.d. sequence of random variables satisfying the following condition with positive constant U

$$E(X_k) = 0, \; X_k \leq U, P(X_k = U) = p > 0. \tag{1}$$

We shall consider the following versions of the so-called Oscar's strategy and martingales:

$$Y_0^{(1)} = 1, Y_k^{(1)} = Y_{k-1}^{(1)} + I\{X_{k-1} > 0\}, M_0^{(1)} = 0, M_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(1)} X_k;$$

$$Y_0^{(2)} = 1, Y_k^{(2)} = \min(Y_k^{(1)}, \frac{b - M_{k-1}^{(2)}}{C}), M_0^{(2)} = 0, M_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(2)} X_k,$$

where C is a minimal possible gain in all games (assuming it is positive). Consider the first passage times

$$\tau_b^{(i)} = \inf\{n \geq 1 | M_n^{(i)} \geq b\}, i = 1, 2.$$

In gambling terms $M_n^{(i)}$ might be considered as a total capital of a gambler at time n, while $\{Y_k^{(i)}, k \geq 1\}$ is a strategy or, sequence of stakes in a series of games with random results X_k. Then $\sup_{n<\tau_b^{(i)}} (M_n^{(i)})^- = -\inf_{n<\tau_b^{(i)}} (M_n^{(i)})$, where $x^- = \max\{-x, 0\}$, is the maximal loss of the gambler prior to reaching the prescribed level b.

Theorem 1 Let $\{X_k, k \geq 1\}$ satisfy (1), $E(X_k^2) = \sigma^2 < \infty$, $E(X_k^-)^3 < \infty$. Then

$$\lim_{x\to\infty} P\{\sup_{n<\tau_b^{(1)}} (M_n^{(1)})^- > x\} x = E(M_{\tau_b^{(1)}}^{(1)}) < \infty$$

and

$$\lim_{n\to\infty} P\{\tau_b^{(1)} > n\} n^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi m \, \sigma^2}} E(M_{\tau_b^{(1)}}^{(1)}) < \infty,$$

where $m = \frac{1}{3}(P(X_1 > 0))^2$.

On the other hand, note that for the simple games with $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$ the sequence $\{Y_k^{(2)}, k \geq 1\}$ is the classical Oscar's strategy having the property $M^{(2)}_{\tau_b^{(2)}} = b$ for positive integer b. It was shown in Novikov[4] that for the above games

$$P\{\tau_b^{(2)} > n\} \asymp n^{-3/2}$$

is valid. In this presentation we find new asymptotics of $\sup_{n<\tau_b^{(2)}}(M_n^{(2)})^-$ and $\tau_b^{(2)}$.

Theorem 2 Let $\{X_k, k \geq 1\}$ satisfy $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ and set $C = 1$. Then

$$\lim_{x\to\infty} P\{\sup_{n<\tau_b^{(2)}}(M_n^{(2)})^- > x\}x = b$$

and

$$\lim_{n\to\infty} P\{\tau_b^{(2)} > n\}n^{3/2} = \sqrt{\frac{24}{\pi}}E(M^{(1)}_{\tau_b^{(2)}}) < \infty.$$

References

[1] Feller, W. (1970). An Introduction to Probability and its Applications. Vol. 2. Wiley.

[2] Kaji, S. : On the tail distributions of the supremum and the quadratic variation of a cádlág local martingale. Séminaire de Probabilités XXXXI, Springer(2007), accepted.

[3] Liptser, R.S. and Novikov, A.A. : On tail distributions of supremum and quadratic variation of local martingales. Stochastic Calculus to Mathematical Finance, The Shiryaev Festschrift, Springer(2006), pp.421-432.

[4] Novikov, A.A. : Martingales, tauberian theorem, and strategies of gambling. Theory of Prob., Appl. Vol.41, No.4(1996), pp.716-729.

[5] Shiryayev, A.N. : Probability. Springer-Verlag

ランダムウォークから量子ウォークへのクロスオーヴァー

瀬川悦生 (横浜国立大学大学院工学府)

1　はじめに

ランダムウォーク, ブラウン運動が様々な現象を記述し, またアルゴリズムにおいてその有用性が示されているように, 量子ウォークはランダムウォークの量子版として, 量子探索アルゴリズムなどにしばしば適用され, その効力が証明されている [1]. この講演では, Brun *et al.* (2003) [2] により考案された M 階テンソル積コインを用いた $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォーク (M-CQW) を扱い, 量子的な挙動と古典的な挙動のクロスオーバーを与える極限定理を紹介する [3].

2　量子ウォークとランダムウォーク

量子ウォークでは粒子の状態が位置と内部状態の直積で記述される. 状態に対する時間発展ユニタリ作用素 U は, 粒子の内部状態への作用 C と, 粒子の内部状態に従って, 粒子を最近接格子へ移動させる作用 S で与えられ, $U = S \cdot C$ となる. さらに, 時刻 t, 場所 x で観測される確率は時刻 t, 場所 x での内部状態のノルムの 2 乗で定義する. M-CQW では内部状態が $(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ で記述され, 時刻 $t = j \pmod M$ のとき, S, C は以下のように作用する. 場所 x 上で内部状態 $|\xi_{M-1}, \dots, \xi_0\rangle \quad (|\xi_k\rangle \in \{|-1\rangle, |1\rangle\})$ を持つ状態に対して,

$$C|x, \xi_{M-1}, \dots, \xi_j, \dots, \xi_0\rangle = |x, \xi_{M-1}, \dots, H\xi_j, \dots, \xi_0\rangle,$$
$$S|x, \xi_{M-1}, \dots, \xi_j, \dots, \xi_0\rangle = |x + \xi_j, \xi_{M-1}, \dots, \xi_j, \dots, \xi_0\rangle.$$

但し, H は 2 次元アダマール行列とする.

ここで扱う量子ウォークとランダムウォークの挙動の違いを記述する重要な性質は以下の通りである. この量子ウォークの時刻 t で観測された場所を $X_t^{[M]}$, 対称ランダムウォークを $\widetilde{X}_t$ とする. $\widetilde{X}_t$ は中心極限定理により $\widetilde{X}/\sqrt{t} \Rightarrow \widetilde{\mathscr{X}}$ $(t \to \infty)$. 但し, $\widetilde{\mathscr{X}}$ は平均 0, 分散 1 の正規分布に従い, “$\Rightarrow$” は弱収束を意味する. 一方, $M = 1$ の時, $X_t^{[1]}/t \Rightarrow \mathscr{Z}$ $(t \to \infty)$ で, $\mathscr{Z}$ は分布が対称になる条件を満たす初期量子ビットの場合, 以下の密度関数を持つ極限分布に従う [4, 5].

$$\rho(x) = \frac{I_{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}(x)}{\pi(1 - x^2)\sqrt{1 - 2x^2}}.$$

但し, $I_A(x)$ は定義関数で, $I_A(x) = 1$ $(x \in A)$, $\ 0$ $(x \notin A)$. 以下ではこの弱収束の時間のスケーリングのオーダーの意味での, 量子と古典のクロスオーバーを考える.

3　結果

M-CQW $X_t^{[M]}$ の弱収束の時間に関するスケーリングのオーダーが 3 つの量, 初期量子状態 Φ_0, M, そして $d \equiv [t/M]$ の関係で決まることが以下の補題により与えられる.

命題 1 Φ_0 の純粋状態として, $\Phi_0 = \phi_0^{\otimes M} = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]^{\otimes M}$ で与え, 混合状態として確率 $(1/2)^M$ で $\bigotimes_{j=0}^{M-1} |\xi_j\rangle$ が与えられるものとする [6]. 但し, T は転置を意味し, $|\xi_j\rangle \in \{|1\rangle, |-1\rangle\}$ $(j \in \{0, \dots, M-1\})$.

(1) M を固定した下での長時間極限を考える. Φ_0 をそれぞれ, 純粋状態, 混合状態で与える. このとき,

$$\Phi_0 \text{ が純粋状態の場合, } X_t^{[M]}/t \Rightarrow Y^{[M]}, \text{ 混合状態の場合, } X_t^{[M]}/t \Rightarrow Z^{[M]} \quad (t \to \infty).$$

(2) d を固定した下での長時間極限を考える. このとき, 各 d において以下が成立する.
$d = 0$ の場合： Φ_0 が純粋状態, 混合状態いずれの場合でも, $X_t/\sqrt{t} \Rightarrow \widetilde{\mathscr{X}}$ $(t \to \infty)$.

$d \geq 2$ の場合： Φ_0 が純粋状態の場合, $X_t^{[M]}/t \Rightarrow W_d \ (t \to \infty)$.

Φ_0 が混合状態の場合, $X_t^{[M]}/\sqrt{t} \Rightarrow Z_d \ (t \to \infty)$.

但し, $Y^{[M]}$, $Z^{[M]}$, W_d, Z_d の測度の具体的な形は省略する ([3] を参照).

以下の主定理は, 次のような 3 つのクラスにおいてスケーリングのオーダーの意味での古典から量子への推移を表すことを示している.

定理 1 $\mathcal{W}^{(\beta)}$ は以下の密度関数を持つスケーリングされた逆正弦定理に対応する分布に従うものとする.

$$s^{(\beta)}(x) = \frac{2^\beta I_{(-2^{-\beta}, 2^{-\beta})}(x)}{\pi\sqrt{1-(2^\beta x)^2}}.$$

また, $0 < \theta \leq 1$ とする. このとき, 以下が成立する.

(1) Φ_0 が純粋状態で, $t = M + M^\beta \ \ (0 \leq \beta \leq 1)$ を満たしながら $t \to \infty$ とするとき,

$$X_t^{[M]}/t^\theta \Rightarrow I_{\{0\leq\beta\leq 1/2, \theta=1/2\}}(\beta,\theta)\widetilde{\mathcal{X}} + I_{\{1/2\leq\beta=\theta<1\}}(\beta,\theta)\mathcal{W}^{(0)} + I_{\{\beta=\theta=1\}}(\beta,\theta)\mathcal{W}^{(1)} + I_A(\beta,\theta)\delta_0.$$

(2) Φ_0 がはじめの M^β ビットは純粋状態で残りのビットは混合状態で与えられ $(0 \leq \beta \leq 1)$, $t = 2M$ を満たしながら $t \to \infty$ とするとき,

$$X_t^{[M]}/t^\theta \Rightarrow I_{\{0\leq\beta\leq 1/2, \theta=1/2\}}(\beta,\theta)\widetilde{\mathcal{X}} + I_{\{1/2\leq\beta=\theta\leq 1\}}(\beta,\theta)\mathcal{W}^{(\beta)} + I_A(\beta,\theta)\delta_0.$$

(3) Φ_0 が混合状態で与えられ, $d = t^\beta$, $M = t^{1-\beta} \ \ (0 \leq \beta \leq 1)$ とおく. $t \to \infty$ とするとき,

$$X_t^{[M]}/t^\theta \Rightarrow I_{\{\beta=0,\theta=1/2\}}(\beta,\theta)\widetilde{\mathcal{X}} + I_{\{\theta=(\beta+1)/2\}}(\beta,\theta)\widetilde{\mathcal{X}}\mathcal{Z} + I_{\{\beta=\theta=1\}}(\beta,\theta)\mathcal{Z} + I_B(\beta,\theta)\delta_0.$$

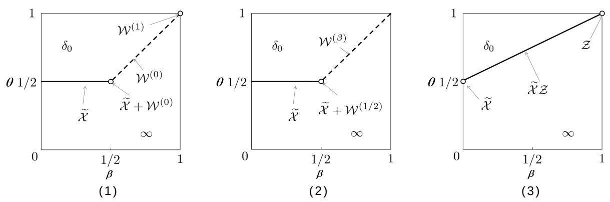

図 1 (1) (2) (3) の場合の極限分布に関する相図. また, (1) (2) (3) の式中の A, B は図中の δ_0 の領域に対応する. ここで, "∞" と記述された領域では定義されない.

命題 1 と定理 1 と同様の方法から, 容易に Brun *et al.* (2003) [2] の結果が導ける.

参考文献

[1] A. Ambainis, International Journal of Quantum Information **1** (2003) pp.507-518.

[2] T. A. Brun, H. A. Carteret, A. Ambainis, Physical Review A **67** (2003) 062317.

[3] E. Segawa, N. Konno, International Journal of Quantum Information **6** (2008) in press.

[4] N. Konno, Quantum Information Processing **1** (2002) pp.345-354.

[5] N. Konno, Journal of the Mathematical Society of Japan **57** (2005) pp.1179-1195.

[6] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[7] N. Konno, Quantum Walks, Lecture Notes in Mathematics **1954** pp.309-452, Springer (2008).

[8] 今野 紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).

二種粒子系の流体力学極限

佐々田槙子・白滝桂太郎（東京大学大学院数理科学研究科）

1 モデル

本講演では、二種粒子系の格子気体モデルの流体力学極限について報告する。粒子 A と粒子 B の二種の粒子からなる格子気体モデルを考える。離散 d 次元トーラス $\mathbb{T}_N^d := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d = \{0, 1..., N-1\}^d$ の各サイトに、粒子が合計一個以下しか存在できないという排他条件を課す。このとき、状態空間は、粒子 A がある状態を 1、粒子 B がある状態を-1 と表すと、$\chi_N^d := \{1, 0, -1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ となる。以下の生成作用素 $\mathcal{L}_N$ により定まる χ_N^d 上のマルコフ過程を η_t とする。

$$(\mathcal{L}_N f)(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|z|=1} A_{x,x+z} f(\eta), \qquad A_{x,y} f(\eta) = \begin{cases} C_+\{f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\} & \text{if} \quad (\eta(x), \eta(y)) = (1, 0) \\ C_-\{f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\} & \text{if} \quad (\eta(x), \eta(y)) = (0, -1) \\ C_A\{f(\eta^{x=0,y=0}) - f(\eta)\} & \text{if} \quad (\eta(x), \eta(y)) = (1, -1) \\ C_C\{f(\eta^{x=-1,y=1}) - f(\eta)\} & \text{if} \quad (\eta(x), \eta(y)) = (0, 0) \\ C_E\{f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\} & \text{if} \quad (\eta(x), \eta(y)) = (-1, 1) \end{cases}$$

ただし、

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{if } z \neq x, y \\ \eta(y) & \text{if } z = x \\ \eta(x) & \text{if } z = y \end{cases} \qquad \eta^{x=m,y=k}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{if } z \neq x, y \\ m & \text{if } z = x \\ k & \text{if } z = y \end{cases}$$

ここで、C_+, C_- は、それぞれ粒子 A、粒子 B の拡散のスピードを表す正の定数で、C_A は異種の粒子同士の対消滅 (annihilation)、C_C は空の 2 つのサイトに各種の粒子が 1 つずつ生成する対生成 (creation)、C_E は異種の粒子同士の位置の交換 (exchange) のスピードを表す非負の定数である。

- $C_A > 0, C_C > 0$ のとき $\Rightarrow$ 各種ごとの粒子数は保存されない $\Rightarrow$ $\sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta(x)$ が唯一つの保存量
- $C_A = C_C = 0$ のとき $\Rightarrow$ 各種ごとの粒子数が保存される $\Rightarrow$ 二つの保存量を持つ

2 生成・消滅のある系

$\forall t \geq 0$ に対し、$\mathbb{T}^d = [0, 1)^d$ 上の経験測度 (empirical measure) の列を $\pi_t^N(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_{N^2 t}(x) \delta_{\frac{x}{N}}(du)$ と表す。

定理 1. $C_A > 0, C_C > 0$ とする。$\pi_0^N(du)$ は、可測関数 $\rho_0 : \mathbb{T}^d \to [-1, 1]$ により定まる測度 $\rho_0(u)du$ に確率収束しているとする。この時、$\forall t > 0$ に対し、$\pi_t^N(du)$ は、次の偏微分方程式

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, u) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_{u_i} \{D_{i,j}(\rho(t, u)) \partial_{u_j} \rho(t, u)\} \\ \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

の解を密度にもつ測度 $\pi_t(du) = \rho(t, u)du$ に確率収束する。ここで、$\{D_{i,j}(\alpha)\}_{1 \leq i,j \leq d}$ は次をみたす正定値対称行列である：$\forall a \in \mathbb{R}^d$

$$a^*D(\alpha)a = \frac{1}{1-\Phi(\alpha)-\alpha^2}\inf_{g\in\mathcal{C}_0}\sum_{i=1}^{d} E_{\nu_\alpha}[(a_i\mathcal{U}_i + \nabla_{0,e_i}\Gamma_g)^2]$$

- D が滑らかな関数であることが [2] と同様に示せる
- D は対角行列となり、対角成分がすべて等しい行列となる
- $C_+ = C_- = C_A = C_C = 1, C_E = 0$ とした場合が、$\kappa = 2$ の generalized exclusion process である
- $C_+ + C_- = C_A + 2C_E$ (gradient condition) のもとでは、$D_{i,j}(\alpha) = \Psi'(\alpha)\delta_{i,j}$ となる。
- $d = 1$ の時、このモデルは界面の離散的なモデル（SOS モデル）と考えられる [Collet,Dunlop,Gobron]
- $\mathcal{C}_0$、ν_α、$\mathcal{U}_i$、∇_{0,e_i}、Γ_g、$\Phi(\alpha)$、$\Psi(\alpha)$ の定義は講演中に述べる

3　生成・消滅のない系

$\forall t \geq 0$ に対し、$\mathbb{T}^d$ 上の経験測度の列を次のように定義する。

$$\pi_t^{N,1}(du) = \frac{1}{N^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} 1_{\{\eta_{N^2t}(x)=1\}}\delta_{\frac{x}{N}}(du), \qquad \pi_t^{N,2}(du) = \frac{1}{N^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} 1_{\{\eta_{N^2t}(x)=-1\}}\delta_{\frac{x}{N}}(du)$$

定理 2. $C_A = C_C = 0, C_E > 0$ とする。$\pi_0^{N,1}(du)$、$\pi_0^{N,2}(du)$ は、それぞれ可測関数 $\rho_0^1 : \mathbb{T}^d \to [0,1]$ と $\rho_0^2 : \mathbb{T}^d \to [0,1]$ により定まる測度 $\rho_0^1(u)du$、$\rho_0^2(u)du$ に確率収束しているとする。この時、$\forall t > 0$ に対し、$\pi_t^{N,1}(du)$、$\pi_t^{N,2}(du)$ はそれぞれ、次の連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \partial_t\rho^1(t,u) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d}\partial_{u_i}\{D_{i,j}(\rho^1(t,u),\rho^2(t,u))\partial_{u_j}\rho^1(t,u) + D_{i,d+j}(\rho^1(t,u),\rho^2(t,u))\partial_{u_j}\rho^2(t,u)\} \\ \partial_t\rho^2(t,u) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d}\partial_{u_i}\{D_{d+i,j}(\rho^1(t,u),\rho^2(t,u))\partial_{u_j}\rho^1(t,u) + D_{d+i,d+j}(\rho^1(t,u),\rho^2(t,u))\partial_{u_j}\rho^2(t,u)\} \\ \quad \rho^1(0,\cdot) = \rho_0^1(\cdot), \qquad \rho^2(0,\cdot) = \rho_0^2(\cdot) \end{cases}$$

の解を密度にもつ測度 $\pi_t^1(du) = \rho^1(t,u)du$、$\pi_t^2(du) = \rho^2(t,u)du$ に確率収束する。ここで、$\{D_{i,j}(\rho^1,\rho^2)\}_{1\leq i,j\leq 2d}$ は次をみたす行列で、DP は正定値対称行列である：$\forall a = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$a^*DPa = \inf_{g\in\mathcal{C}_0}\sum_{i=1}^{d} E_{\nu_{\rho^1,\rho^2}}[(a_i^1\mathcal{V}_i^1 + a_i^2\mathcal{V}_i^2 + \tilde{\nabla}_{0,e_i}\Gamma_g)^2] \quad \text{ただし } P(\rho^1,\rho^2) = \begin{pmatrix} \rho^1(1-\rho^1)I & -\rho^1\rho^2 I \\ -\rho^2\rho^1 I & \rho^2(1-\rho^2)I \end{pmatrix}$$

- D が滑らかな関数であることを仮定する
- $C_E = 0$ の場合についても流体力学極限の証明を計算中である
- spectral gap は r 種の異なる粒子の拡散と交換を考えた系で証明できる。流体力学極限を示すためには、D の定義域の境界付近での連続性の証明が課題
- $\mathcal{C}_0$、ν_{ρ^1,ρ^2}、$\mathcal{V}_i^1$、$\mathcal{V}_i^2$、$\tilde{\nabla}_{0,e_i}$、Γ_g の定義は講演中に述べる

参考文献

[1] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, 1999, Springer.

[2] Y. Nagahata, *Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process*, Stochastic Process. Appl., **116** (2006), 957–982.

[3] J. Quastel, *Diffusion of color in the simple exclusion process*, Comm. Pure. Appl. Math., **45** (1992), 623–679.