A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory: Fixed point theorems on partial randomness[1]

Kohtaro Tadaki (Chuo University)

Algorithmic information theory (AIT, for short) is a framework to apply information-theoretic and probabilistic ideas to recursive function theory. One of the primary concepts of AIT is the *program-size complexity* $H(s)$ of a finite binary string s, which is defined as the length of the shortest binary input for a universal algorithm to output s. By the definition, $H(s)$ is thought to represent the amount of randomness of a finite binary string s. In particular, the notion of program-size complexity plays a crucial role in characterizing the *randomness* of an infinite binary string, or equivalently, a real.

In this talk, we develop a statistical mechanical interpretation of AIT by introducing the notion of thermodynamic quantities, such as partition function, free energy, energy, statistical mechanical entropy, and specific heat, into AIT. We investigate the properties of these quantities by means of program-size complexity from the point of view of algorithmic randomness. It is then discovered that, in the interpretation, the temperature plays a role as the partial randomness of the values of all these thermodynamic quantities, which include the temperature itself. Here the notion of partial randomness is a stronger representation of the compression rate by means of program-size complexity. Reflecting this self-referential nature of the partial randomness of the temperature, we obtain fixed point theorems on partial randomness.

We first review some basic notation and definitions which will be used in this talk. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ is the set of natural numbers, and $\mathbb{N}^+$ is the set of positive integers. $\mathbb{R}$ is the set of reals. $\{0,1\}^*$ is the set of finite binary strings. For any $s \in \{0,1\}^*$, $|s|$ is the *length* of s. A subset S of $\{0,1\}^*$ is called *prefix-free* if no string in S is a prefix of another string in S. For any partial function f, the domain of definition of f is denoted by $\operatorname{dom} f$. We write "r.e." instead of "recursively enumerable." We say that a real α is *computable* if there exists a computable sequence $\{a_n\}$ of rationals such that $|\alpha - a_n| < 2^{-n}$ for all $n \in \mathbb{N}$. For any $\alpha \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}^+$, we denote by $\alpha \restriction n \in \{0,1\}^*$ the first n bits of the base-two expansion of $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ with infinitely many zeros, where $\lfloor \alpha \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to α. For example, in the case of $\alpha = 5/8$, $\alpha \restriction 6 = 101000$.

A *computer* is a partial recursive function $C\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ such that $\operatorname{dom} C$ is a prefix-free set. For any computer C and any $s \in \{0,1\}^*$, $H_C(s)$ is defined by $H_C(s) = \min\{\, |p| \mid p \in \{0,1\}^* \;\&\; C(p) = s \,\}$ (may be ∞). A computer U is said to be *optimal* if for each computer C there exists $d \in \mathbb{N}$ such that, for every $s \in \{0,1\}^*$, $H_U(s) \le H_C(s) + d$. There exists an optimal computer. We choose a particular optimal computer U as the standard one for use, and define $H(s)$ as $H_U(s)$, which is referred to as the *program-size complexity* of s.

Let T be an arbitrary real with $0 < T \le 1$. In 2002, Tadaki introduced several notions of the partial randomness of a real by parameterizing the notions of randomness of a real by a real T, as follows. Let $\alpha \in \mathbb{R}$. We say that α is *weakly Chaitin T-random* if $Tn \le H(\alpha \restriction n) + O(1)$. On the other hand, we say that α is *T-compressible* if $H(\alpha \restriction n) \le Tn + o(n)$. Thus, if α is weakly Chaitin T-random and T-compressible, then $\lim_{n\to\infty} H(\alpha \restriction n)/n = T$, i.e., the *compression rate* of α equals to T. Furthermore, we say that α is *Chaitin T-random* if $\lim_{n\to\infty} H(\alpha \restriction n) - Tn = \infty$. Obviously, if α is Chaitin T-random, then α is weakly Chaitin T-random. However, in 2005 Reimann and Stephan showed that, in the case of $T < 1$, the converse does not necessarily hold.

We introduce the notion of thermodynamic quantities into AIT as follows.

Definition 1 (thermodynamic quantities in AIT)**.** *We choose a particular enumeration $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ of the countably infinite set $\operatorname{dom} U$. Let T be any real with $T > 0$.*

(i) The partition function $Z(T)$ at temperature T is defined as $\lim_{k\to\infty} Z_k(T)$ where

$$Z_k(T) = \sum_{i=1}^{k} 2^{-\frac{|p_i|}{T}}.$$

[1]This work was supported both by SCOPE from the Ministry of Internal Affairs and Communications of Japan and by KAKENHI, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (20540134).

(ii) The free energy $F(T)$ at temperature T is defined as $\lim_{k\to\infty} F_k(T)$ *where*

$$F_k(T) = -T\log_2 Z_k(T).$$

(iii) The energy $E(T)$ at temperature T is defined as $\lim_{k\to\infty} E_k(T)$ *where*

$$E_k(T) = \frac{1}{Z_k(T)} \sum_{i=1}^{k} |p_i|\, 2^{-\frac{|p_i|}{T}}.$$

(iv) The statistical mechanical entropy $S(T)$ at temperature T is defined as $\lim_{k\to\infty} S_k(T)$ *where*

$$S_k(T) = \frac{E_k(T) - F_k(T)}{T}.$$

(v) The specific heat $C(T)$ at temperature T is defined as $\lim_{k\to\infty} C_k(T)$ *where $C_k(T) = E'_k(T)$, the derived function of $E_k(T)$.* □

The thermodynamic quantities in AIT have the following properties.

Theorem 2 (properties of $Z(T)$ and $F(T)$)**.** *Let $T \in \mathbb{R}$.*

(i) If $0 < T \le 1$ and T is computable, then each of $Z(T)$ and $F(T)$ converges and is weakly Chaitin T-random and T-compressible.

(ii) If $1 < T$, then $Z(T)$ and $F(T)$ diverge to ∞ and $-\infty$, respectively. □

Theorem 3 (properties of $E(T)$, $S(T)$, and $C(T)$)**.** *Let $T \in \mathbb{R}$.*

(i) If $0 < T < 1$ and T is computable, then each of $E(T)$, $S(T)$, and $C(T)$ converges and is Chaitin T-random and T-compressible.

(ii) If $1 \le T$, then both $E(T)$ and $S(T)$ diverge to ∞. In the case of $T = 1$, $C(T)$ diverges to ∞.[2] □

The fixed point theorems on partial randomness are given as follows.

Theorem 4 (fixed point theorem by partition function)**.** *For every $T \in (0,1)$, if $Z(T)$ is computable then T is weakly Chaitin T-random and T-compressible.* □

Theorem 5 (fixed point theorem by free energy)**.** *For every $T \in (0,1)$, if $F(T)$ is computable then T is weakly Chaitin T-random and T-compressible.* □

Theorem 6 (fixed point theorem by energy)**.** *For every $T \in (0,1)$, if $E(T)$ is computable then T is Chaitin T-random and T-compressible.* □

Theorem 7 (fixed point theorem by statistical mechanical entropy)**.** *For every $T \in (0,1)$, if $S(T)$ is computable then T is Chaitin T-random and T-compressible.* □

References

[1] K. Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory. Local Proceedings of Computability in Europe 2008 (CiE 2008), pp. 425–434, June 15-20, 2008, University of Athens, Greece. Extended and Electronic Version Available: `http://arxiv.org/abs/0801.4194v1`

[2] K. Tadaki, Fixed point theorems on partial randomness. To appear in the Proceedings of the Symposium on Logical Foundations of Computer Science 2009 (LFCS'09), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Vol.5407, January 3-6, 2009, Deerfield Beach, Florida, USA.

[2] It is still open whether $C(T)$ diverges or not in the case of $T > 1$.

ジャンプ型確率過程に対する感応度解析*

竹内　敦司† （大阪市立大・理）

2008 年 12 月 17 日（水）

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし，$T > 0$ とする．$\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の Lévy 測度 $\nu(dz)$ は $\mathbb{R}_0$ 上の Lebesgue 測度に関して C^1 級の密度関数 $g(z)$ をもち，

- 任意の $p > 1$ に対して，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}_0} \left\{ |z| I_{(|z|\le 1)} + |z|^p I_{(|z|>1)} \right\} \nu(dz) < \infty$,
- $0 < \alpha < 2$ が存在して，$\displaystyle\liminf_{\rho \searrow 0} \rho^{-\alpha} \int_{|z|\le\rho} |z|^2 \nu(dz) > 0$,
- $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = 0$

を満たすとする．$\{W_t\,;\, t \in [0,T]\}$ を 1 次元 Brown 運動，dJ を平均測度が $d\hat{J} := dt\, \nu(dz)$ の，$[0,T] \times \mathbb{R}_0$ 上の Poisson 配置とし，$d\tilde{J} = dJ - d\hat{J}$，$d\bar{J} = I_{(|z|\le 1)}\, d\tilde{J} + I_{(|z|>1)}\, dJ$ とおく．

$-1 \le \varepsilon, \delta, \gamma \le 1$ とし，$a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R})$，$b, \beta \in C_b^{\infty,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0)$ は条件

- 各 γ に対して，$\displaystyle\inf_{y\in\mathbb{R}} \inf_{z\in\mathbb{R}_0} \left| 1 + \left[b'_z + \gamma \beta'_z \right](y) \right| > 0$,
- 各 δ, γ に対して，$\displaystyle\inf_{y\in\mathbb{R}} \left([a_1 + \delta\, \alpha_1](y) \right)^2 > 0, \quad \inf_{y\in\mathbb{R}} \inf_{z\in\mathbb{R}_0} \left([\partial_z b_z + \gamma \partial_z \beta_z](y) \right)^2 > 0$

を満たすものとする．$x \in \mathbb{R}$ に対して，確率微分方程式：$x_0 = x$,

$$dx_t = [a_0 + \varepsilon\, \alpha_0](x_t)\, dt + [a_1 + \delta\, \alpha_1](x_t) \circ dW_t + \int_{\mathbb{R}_0} [b_z + \gamma \beta_z](x_{t-})\, d\bar{J} \tag{1}$$

を考える．係数に対する条件より，各 $t, \varepsilon, \delta, \gamma$ に対して，写像 $x \longmapsto x_t$ は C^1 級の修正をもち，その微分 $Z_t := \partial_x x_t$ は可逆で，$U_t := 1/Z_t$ は確率微分方程式：$U_0 = 1$,

$$\begin{aligned} dU_t = {} & -U_t \left[a'_0 + \varepsilon\, \alpha'_0 \right](x_t)\, dt - U_t \left[a'_1 + \delta\, \alpha'_1 \right](x_t) \circ dW_t \\ & - \int_{\mathbb{R}_0} U_{t-} \left[\frac{b'_z + \gamma \beta'_z}{1 + b'_z + \gamma \beta'_z} \right](x_{t-})\, d\bar{J} + \int_{|z|\le 1} U_t \left[\frac{\left(b'_z + \gamma \beta'_z \right)^2}{1 + b'_z + \gamma \beta'_z} \right](x_t)\, d\hat{J} \end{aligned} \tag{2}$$

を満たす．さらに，次の補題も成り立つ．

* 「確率論シンポジウム」（2008 年 12 月 16 日〜12 月 19 日，東京工業大学）

†E-mail：`takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp`

補題 1 写像 $\varepsilon \mapsto x_t$，$\delta \mapsto x_t$，$\gamma \mapsto x_t$ は C^1 級の修正をもち，各微分は次のように表される．

$$\partial_\varepsilon x_t = Z_t \int_0^t U_s \alpha_0(x_s)\,ds, \quad \partial_\delta x_t = Z_t \int_0^t U_s \alpha_1(x_s) \circ dW_s,$$
$$\partial_\gamma x_t = Z_t \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} U_{s-} \left[\frac{\beta_z}{1+b'_z+\gamma\beta'_z} \right](x_{s-})\,d\bar{J} - \int_0^t \int_{|z|\le 1} U_s \left[\frac{\left(b'_z+\gamma\beta'_z\right)\beta_z}{1+b'_z+\gamma\beta'_z} \right](x_s)\,d\hat{J} \right\}.$$

Malliavin 解析を用いると，x_T は C^∞ 級密度関数 $p_T(\varepsilon,\delta,\gamma,x;y)$ をもつことが分かる．この講演では，$p_T(\varepsilon,\delta,\gamma,x;y)$ の各パラメータに関する微分について調べることを目標とする．

ランダムでない関数 $\kappa : \mathbb{R}_0 \to (0,+\infty)$ は有界性および正則性について良い条件を満たしているものとし，以下の記号を用意する．

$$A_t = t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \kappa(z)\,dJ,\ L_t^x = \int_0^t \frac{Z_s}{[a_1+\delta\alpha_1](x_s)}\,dW_s,\ v_z(t) = \left[\frac{1+b'_z+\gamma\beta'_z}{\partial_z b_z + \gamma \partial_z \beta_z} \right](x_t)\,Z_t \kappa(z),$$
$$V_t^x = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \frac{\partial_z \{g(z)\,v_z(s)\}}{g(z)}\,d\tilde{J},\ K_t^x = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \partial_z \kappa(z)\,v_z(s)\,dJ,$$
$$L_t^\varepsilon = \int_0^t \left[\frac{\alpha_0}{a_1+\delta\alpha_1} \right](x_s)\,dW_s,\ \Lambda_t^\delta = \int_0^t U_s \alpha_1(x_s) \circ dW_s,\ L_t^\delta = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\Lambda_s^\delta}{[a_1+\delta\alpha_1](x_s)}\,dW_s,$$
$$L_t^\gamma = -\int_0^t \left[\frac{\int_{|z|\le 1} \beta_z \nu(dz)}{a_1+\delta\alpha_1} \right](x_s)\,dW_s,\ V_t^\gamma = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \frac{1}{g(z)} \partial_z \left\{ g(z) \left[\frac{\beta_z}{\partial_z b_z + \gamma \partial_z \beta_z} \right](x_{s-}) \right\} d\tilde{J}.$$

定理 1 ([2], [3]) $\mathbb{E}\left[|\varphi(x_T)|^2 \right] < \infty$ を満たす関数 φ に対して，次のことが成り立つ．

$$\partial_x \mathbb{E}[\varphi(x_T)] = \mathbb{E}\left[\varphi(x_T) \left\{ \frac{L_T^x - V_T^x}{A_T} + \frac{K_T^x}{(A_T)^2} \right\} \right],$$
$$\partial_\varepsilon \mathbb{E}[\varphi(x_T)] = \mathbb{E}[\varphi(x_T)\,L_T^\varepsilon],$$
$$\partial_\delta \mathbb{E}[\varphi(x_T)] = \mathbb{E}\left[\varphi(x_T)\,L_T^\delta \right] + \int_0^T \frac{dt}{(T-t)^2} \mathbb{E}\left[\{\varphi(x_T) - \varphi(x_t)\} \int_t^T \frac{Z_s \left\{ \Lambda_s^\delta - \Lambda_t^\delta \right\}}{[a_1+\delta\alpha_1](x_s)} dW_s \right],$$
$$\partial_\gamma \mathbb{E}[\varphi(x_T)] = \mathbb{E}\left[\varphi(x_T) \left\{ L_T^\gamma - V_T^\gamma \right\} \right].$$

参考文献

[1] Gobet, E. (2004), Revisiting the Greeks for European and American Options, World Sci. Publ., 53-71.

[2] Takeuchi, A. (2008), The Bismut-Elworthy-Li type formulae for stochastic differential equations with jumps, *submitted*.

[3] Takeuchi, A. (2008), Sensitivity analysis for jump-type stochastic differential equations depending on parameters, *preprint*.

Riemann zeta 過程に関する関数型極限定理の一般化

髙信 敏 (金沢大学理工研究域数物科学系)

§1　はじめに

$\zeta(\cdot)$ を Riemann zeta 関数とするとき，$\sigma > 1$ に対して $\zeta_\sigma(t) := \frac{\zeta(\sigma+\sqrt{-1}t)}{\zeta(\sigma)}$ は無限分解可能分布の特性関数となる．この分布を μ_σ と表わしパラメータ σ の Riemann zeta 分布とよぶ．$\sigma > 1$ を時間パラメータとする確率過程で，時刻 σ での周辺分布が μ_σ であるものを Riemann zeta 過程とよぶとき，Ehm [1] は，この中で 'Lévy 過程' となるものを構成し，これに関する関数型極限定理を見出した．

当講演では，我々は彼の設定を一般化する．$\zeta(\cdot)$ のところを，完全乗法的な非負数論的関数 $a(\cdot)$ を係数にもつ Dirichlet 級数 $\eta(\cdot;a)$ に換えて，これに対応する 'Lévy 過程' な $\eta(\cdot;a)$-過程について，Ehm と同じタイプの関数型極限定理が成り立つことを報告する．

§2　'Lévy 過程' な $\eta(\cdot;a)$-過程

$a : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ は完全乗法的な数論的関数で次の 2 つの条件を仮定する:

$$^\exists\tau > 0 \ \text{ s.t. } \sum_{p\le x} \frac{a(p)\log p}{p} = \big(\tau + o(1)\big)\log x \quad \text{as } x\to\infty, \tag{1}$$

$$\sup_p a(p) < 2. \tag{2}$$

ここで $a(\cdot)$ が完全乗法的とは，任意の $m,n \in \mathbb{N}$ に対して $a(mn) = a(m)a(n)$ が成り立つときを云う．Mertens の第 1 定理:

$$\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \quad \text{as } x\to\infty \quad \text{(cf. [2, Theorem 425])}$$

より，$a(\cdot) = 1$ は確かに上の例である．また $\tau < 2$ にも注意．

以下，$a(\cdot)$ は (1) と (2) をみたすものとして fix する．

定義 1. (1) と (2) より

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{a(p)}{p^\sigma}} < \infty \ \text{ if } \sigma > 1, \quad \prod_p \frac{1}{1-\frac{a(p)}{p}} = \infty$$

であることが分かるので，$s = \sigma + \sqrt{-1}t$ $(\sigma > 1, t \in \mathbb{R})$ に対して

$$\eta(s;a) := \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{a(p)}{p^s}}$$

と定義できる．なお，第 2 式は，$a(\cdot)$ の完全乗法性から来ていることに注意．(第 1 式は $\eta(s;a)$ の Dirichlet 級数表示，第 2 式は Euler 積表示である．)

$a(\cdot) = 1$ のときは $\eta(\cdot;1) = \zeta(\cdot)$ である！

定義 2. $\sigma \in (1,\infty)$ に対して

$$\eta_\sigma(t;a) := \frac{\eta(\sigma+\sqrt{-1}t;a)}{\eta(\sigma;a)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

と定義する．これは無限分解可能分布 $\mu_\sigma(dx;a)$ の特性関数である．$\mu_\sigma(\cdot;a)$ を σ をパラメータとする $\eta(\cdot;a)$-分布とよぶことにする．

定義 3. $\{Y_p\}_{p:\text{素数}}$ を適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された独立な幾何過程列とするとき

$$Z(\sigma; a) := \sum_p Y_p\Big(\frac{a(p)}{p^\sigma}\Big) \log p, \quad \sigma \in (1, \infty)$$

と定義する．なお，確率過程 $\big(Y(u)\big)_{0\le u<1}$ が幾何過程とは次の (a) ～ (d) をみたすときを云う:
(a) 各 $u \in [0,1)$ に対して，$Y(u)$ は非負整数値確率変数．$u = 0$ のときは $Y(0) = 0$.
(b) $[0,1) \ni u \mapsto Y(u) \in \mathbb{R}$ は右連続で単調非減少.
(c) $\big(Y(u)\big)_{0\le u<1}$ は Lévy 過程.
(d) $0 \le u < v < 1$ に対して

$$E\big[e^{\sqrt{-1}t(Y(v)-Y(u))}\big] = \frac{1-ue^{\sqrt{-1}t}}{1-u}\frac{1-v}{1-ve^{\sqrt{-1}t}}.$$

Claim 1. $\big(-Z(\sigma; a)\big)_{1<\sigma<\infty}$ は backwards Lévy 過程で，各時刻 σ での周辺分布は $\mu_\sigma(\cdot; a)$ である．即ち
(i) $(1,\infty) \ni \sigma \mapsto Z(\sigma; a) \in [0,\infty)$ は左連続で単調非増加.
(ii) $Z(\sigma+; a) = Z(\sigma; a)$ a.s. $({}^\forall\sigma > 1)$, $Z(1+; a) = \infty$ a.s., そして $Z(\infty; a) = 0$.
(iii) 任意の $\infty > \sigma_0 > \sigma_1 > \cdots > \sigma_n > 1$ に対して

$$\big\{Z(\sigma_0; a), Z(\sigma_1; a) - Z(\sigma_0; a), \ldots, Z(\sigma_n; a) - Z(\sigma_{n-1}; a)\big\} \text{ は独立.}$$

(iv) $-Z(\sigma; a)$ の分布 $= \mu_\sigma(\cdot; a)$.

§3 $\big(Z(\sigma; a)\big)_{1<\sigma<\infty}$ に関する関数型極限定理

次が，我々の主定理である:

定理 1. $\varphi : (1,\infty) \to (0,\infty)$ を C^1 級，狭義単調減少で

$$\varphi(1+) = \infty,\ \varphi(\infty) = 0,\ \varphi(\sigma) \sim \frac{1}{(\sigma-1)^2} \quad \text{as } \sigma \searrow 1$$

なるものとする．$\tau > 0$ を (1) に現われる定数,

$$n^{(\tau)}(dsdu) := \frac{\tau}{2} e^{-\frac{u}{\sqrt{s}}} s^{-\frac{3}{2}} dsdu, \quad s, u > 0$$

を mean measure にもつ $(0,\infty) \times (0,\infty)$ 上の Poisson random measure を $N^{(\tau)}(dsdu)$ とする．このとき，次の収束が成り立つ:

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{T}} Z\big(\varphi^{-1}(Tt); a\big)\Big)_{t\ge0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(\int_0^{t+}\int_{(0,\infty)} uN^{(\tau)}(dsdu)\Big)_{t\ge0}$$
$$\text{in } D\big([0,\infty) \to \mathbb{R}\big) \text{ as } T \to \infty.$$

参考文献

[1] W. Ehm, A Riemann zeta stochastic process, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **345** (2007), 279–282.

[2] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 6th edition, Oxford Univ. Press, 2008.

[3] K. Itô, *Stochastic processes*, Springer, 2004.

[4] Y. Kasahara and S. Watanabe, Limit theorems for point processes and their functionals, *J. Math. Soc. Japan*, **38** (1986), 543–574.

一次元広義拡散過程のｈ変換

嶽村 智子（奈良女子大学大学院　人間文化研究科）

区間 $I = (l_1, l_2)$ 上の尺度関数 s, スピード測度関数 m, 消滅測度関数 k によって導かれる一次元広義拡散過程を X とし, その作用素を $\mathcal{G}_{s,m,k}$ とする. $p(t,x,y)$ を X の m に関する推移確率密度とする.

$\beta \geq 0$ に対して, $\mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$ を正の β-調和関数, すなわち, $\mathcal{G}h = \beta h$ を満たす h の全体の集合とする, $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$ に対して,

$$p^*_h(t,x,y) = e^{-\beta t} p(t,x,y)/h(x)h(y)$$

とおくと

命題. ある一次元広義拡散過程 Y が存在して, 尺度関数 s_h とスピード密度関数 m_h が次で与えられ, 作用素が $\mathcal{G}_{s_h,m_h,0}$ となり, $p^*_h(t,x,y)$ がこの m_h に関する推移確率密度となる.

$$s_h(x) = \int_c^x h(x)^{-2}\,ds(x), \quad m_h(x) = \int_c^x h(x)^2\,dm(x), \quad c \in I. \tag{1}$$

$h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k}$ に対して, H^*_h を $H^*_h : \mathcal{G}_{s,m,k} \mapsto \mathcal{G}_{s_h,m_h,0}$ $(H^*\mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s_h,m_h,0})$ とおく. この変換は, [3] の中で扱われている h 変換の逆変換に対応している. はじめにこの事を示し, $\mathcal{G}$ の再帰性, 過渡性と h 変換された $\mathcal{G}$ の再帰性, 過渡性との関係について述べる. また, 端点での境界の状態についての結果についても紹介する.

[3] の中で扱われている関数の空間を $\mathcal{H}^o_{s,m,0} = \{h |\ \mathcal{G}_{s,m,0}h \leq 0,\ h > 0\}$ とする. $h \in \mathcal{H}^o_{s,m,0}$ に対して, $p^o(t,x,y) = p(t,x,y)/h(x)h(y)$ とすると上の命題と同様にこれを推移確率密度としてもつ一次元広義拡散過程が存在し, 尺度関数, スピード測度関数は (1) で, 消滅測度は $dk_h = -hD_s h$ で与えられる. $h \in \mathcal{H}^o_{s,m,0}$ に対して H^o_h を $H^o_h : \mathcal{G}_{s,m,0} \mapsto \mathcal{G}_{s_h,m_h,k_h}$ とすると, 次が成り立つ.

命題. (i) $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$ に対して, $h^{-1} \in M^o_{s^*_h}$, $H^o_{h^{-1}} H^*_h \mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s,m,k+\beta m}$
特に, $\beta = 0$ の時 $H^o_{h^{-1}} H^*_h \mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s,m,k}$ となる.
(ii) $h \in M^o_h$. に対して $h^{-1} \in \mathcal{H}^*_{s^o_h,m^o_h,k^o_h,o}$, $H^*_{h^{-1}} H^o_h \mathcal{G}_{s,m,0} = \mathcal{G}_{s,m,0}$ となる.

$\mathcal{G}_{s,m,k}$ の全体の集合を G とする. また G^R を G の要素で再帰的な作用素全体の集合とし, G^T を過渡的な作用素全体の集合とする, すなわち,

$$G^R = \{\mathcal{G}_{s,m,k} : k = 0,\ s(l_1) = -\infty,\ s(l_2) = \infty\}, \quad G^T = G \setminus G^R.$$

これらに対して次が成り立つ.
命題. (i) $\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^R$ ならば $\mathcal{H}^o_{s,m,0} = \mathcal{H}^*_{s,m,0,0} = \{$ 正定数関数 $\}$.
(ii) $\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^R$, $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,0,\beta}$ $\beta > 0$ ならば $H^*_h\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^T$
(iii) $\mathcal{G}_{s,m,k} \in G^T$ $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$, $\beta \geq 0$ ならば $H^*_h\mathcal{G}_{s,m,k} \in G^T$ 次に l_i の境界の状態について述べる.

[1] に従い l_i の境界の状態を次のように呼ぶ.

$$\begin{array}{lll} (s,m,k)\text{-regular} & \text{if} & J_{s,m+k}(l_i) < \infty, J_{m+k,s}(l_i) < \infty, \\ (s,m,k)\text{-exit} & \text{if} & J_{s,m+k}(l_i) < \infty, J_{m+k,s}(l_i) = \infty, \\ (s,m,k)\text{-entrance} & \text{if} & J_{s,m+k}(l_i) = \infty, J_{m+k,s}(l_i) < \infty, \\ (s,m,k)\text{-natural} & \text{if} & J_{s,m+k}(l_i) = \infty, J_{m+k,s}(l_i) = \infty. \end{array}$$

ここで, $J_{\mu,\nu}(x) = \int_{l_i}^c d\mu \int_x^c d\nu$ とする. 境界の状態に対して次が成り立つ.
定理. $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$, $i = 1, 2.$ に対して次が成り立つ.
(i) l_i を (s,m,k) -regular または exit と仮定する. もし $h(l_i) = 0$ ならば, l_i は (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -entrance. もし $0 < h(l_i) < \infty$ ならば, l_i は (s,m,k) -regular の時 (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -regular ,(s,m,k) -exit の時 (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -exit となる.
(ii) l_i を (s,m,k) -entrance と仮定する.
もし $0 < h(l_i) < \infty$ ならば, l_i は (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -entrance. もし $h(l_i) = \infty$ ならば, l_i は $|m^*_h(l_i)| < \infty$ の時 (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -regular, $|m^*_h(l_i)| = \infty$ のとき (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -exit .
(iii) l_i を (s,m,k) -natural と仮定する. もし $h(l_i) = 0$ ならば, l_i は $|J_{m_h,s_h}(l_i)| < \infty$ の時 (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -entrance,$|J_{m_h,s_h}(l_i)| = \infty$ の時 (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -natural. もし $h(l_i) = \infty$ ならば, l_i は $|J^*_{s_h,m_h}(l_i)| < \infty$ のとき (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -exit , $|J^*_{s_h,m_h}(l_i)| = \infty$ のとき (s^*_h, m^*_h, k^*_h) -natural となる.

参考文献

[1] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. of Math., **55** (1952), 468–519.

[2] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] M. Maeno, One-dimensional h-path generalized diffusion processes, Ann. Reports of Graduate School of Humanities and Sciences Nara Women's University, **21** (2005), 167–185.

対称安定過程に対するFeynman-Kac killingの処罰問題

神戸大理　　矢野 孝次*
京大数理研　矢野 裕子

Roynette–Vallois–Yor (cf. [2]) はブラウン運動に様々な重み (Γ_t) をかけて正規化したものの長時間極限定理を処罰問題 (penalisation problems) と呼んだ．すなわち，適当な条件の下で確率測度の収束

$$\frac{\Gamma_t \mathrm{d}W_x}{W_x[\Gamma_t]} \xrightarrow{t\to\infty} \mathrm{d}W_x^\Gamma \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{1}$$

を示し，かつ極限で得られる確率測度 W_x^Γ を特徴づける，という問題である．ここで，測度の族 $\{\mu_t\}$ と μ に対し $\mu_t \to \mu$ along $(\mathcal{F}_s)$ が成り立つとは，任意の $s>0$ と任意の有界 $\mathcal{F}_s$-可測汎関数 F_s に対し $\mu_t[F_s] \to \mu[F_s]$ が成り立つことを言う．

Najnudel–Roynette–Yor ([1]) は

$$\mathscr{W} = (\text{const.}) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} Q^{(u)} \bullet P_0^{\mathrm{s3B}} \tag{2}$$

で与えられる universal な σ-有限測度を導入し，多くのクラスの重み過程に対する処罰問題が統一的に理解できることを示した．

本講演では，Feynman-Kac killing の場合に的を絞り，ブラウン運動に対する処罰問題の対称安定過程への一般化を [3] に沿って述べる．この研究は Marc Yor 氏 (Paris VI) との共同研究である．

$(X_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ を一次元 α-安定過程の canonical representation とする．指数 α は $1<\alpha\le 2$ を満たすと仮定する．このとき原点は正則かつ再帰的となり，局所時間 $L(t,x)$ および周遊測度 $\boldsymbol{n}$ が対応する (周遊とは excursion のことを指す)．このとき，P_x^0 を原点死滅過程の分布とすると $P_x^0[|X_t|^{\alpha-1}] = |x|^{\alpha-1}$ が成り立ち，また $\boldsymbol{n}[|X_t|^{\alpha-1}]$ の値は有限でかつ $t>0$ に依らない．このことから，P_x^0 および $\boldsymbol{n}$ のマルコフ性によって

$$\mathrm{d}P_x^h|_{\mathcal{F}_t} = \frac{|X_t|^{\alpha-1}}{|x|^{\alpha-1}} \mathrm{d}P_x^0|_{\mathcal{F}_t}, \qquad \text{if } x \neq 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{d}P_0^h|_{\mathcal{F}_t} = (\text{const.})|X_t|^{\alpha-1} \mathrm{d}\boldsymbol{n}|_{\mathcal{F}_t} \tag{4}$$

を満たす確率測度の族 $\{P_x^h : x \in \mathbb{R}\}$ が well-defined である．

Najnudel–Roynette–Yor ([1]) にならい，σ-有限測度 $\mathscr{P}$ を

$$\mathscr{P} = (\text{const.}) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/\alpha}} Q^{(u)} \bullet P_0^h \tag{5}$$

で定義する．ここで，$Q^{(u)}$ は 0 から 0 への長さ u のピン止め過程の分布 $P_x(\cdot|X_u=0)$ であり，$Q^{(u)} \bullet P_0^h$ は 2 つの過程を独立に走らせて繋いでできる過程の分布である．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathscr{P}$ の下での $(x+X_t : t \ge 0)$ の分布を $\mathscr{P}_x$ と書く．

*URL: http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/

$\mathbb{R}$ 上の非負測度 $V(\mathrm{d}x)$ に対し，重み過程 $(\mathcal{E}_t^V)$ を

$$\mathcal{E}_t^V = \exp - \int L(t,x)V(\mathrm{d}x) \tag{6}$$

で定義する．

定理 1. $0 < \int (1+|x|^{\alpha-1})V(\mathrm{d}x) < \infty$ を仮定する．このとき次が成り立つ:

(i) $\dfrac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{\boldsymbol{n}(R>t)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x \quad \text{along } (\mathcal{F}_s)$;

(ii) $\dfrac{P_x[\mathcal{E}_t^V]}{\boldsymbol{n}(R>t)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{P}_x[\mathcal{E}_\infty^V] =: \varphi_V(x)$;

(iii) $(\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x)|_{\mathcal{F}_t} = \varphi_V(X_t)\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}$.

定理 1 によって，処罰問題の答えは次のように与えられる:

$$\frac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x}{\varphi_V(x)} =: \mathrm{d}P_x^V \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{7}$$

ここで，極限測度 P_x^V は次で特徴づけられる:

$$\mathrm{d}P_x^V|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\varphi_V(X_t)}{\varphi_V(x)} \mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}. \tag{8}$$

定理 1 の証明においては次のことが重要な役割を果たす:

(i) 原点からの最終脱出時刻による積分分解公式;

(ii) meander の P_0^h への収束;

(iii) $0 < \mathscr{P}[\mathcal{E}_\infty^V] < \infty$.

参考文献

[1] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. A global view of Brownian penalisations. *Monograph, submitted*, 2008.

[2] B. Roynette and M. Yor. Penalising brownian paths: Rigorous results and meta-theorems. *Monograph, to appear in Lecture Notes in Math.*, 2008.

[3] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *submitted*, arXiv:0807.4336. 2008.

対称安定過程の点への到達時刻分布について

神戸大理　　矢野 孝次*
京大数理研　矢野 裕子

ブラウン運動に対する点 a への到達時刻が a について片側 $\frac{1}{2}$-安定過程になることはよく知られている．この事実の一般化として，正の跳びを持たないレヴィ過程に対するレベル a の最小通過時刻が a について増加加法過程となることもよく知られている．本講演では，別の方向の一般化として，対称安定過程の点への到達時刻が持つ性質についていくつかの結果を報告する．この研究は Marc Yor 氏 (Paris VI) との共同研究 ([1]) である．

原点を出発する過程 $X = (X(t) : t \ge 0)$ に対し，点 $a > 0$ への到達時刻を

$$T_{\{a\}}(X) = \inf\{t > 0 : X(t) = a\} \tag{1}$$

と書く．また，点 $a > 0$ に到達する前に最後に原点を出た時刻を

$$G_{\{a\}}(X) = \sup\{t \le T_{\{a\}}(X) : X(t) = 0\} \tag{2}$$

と書き，

$$\Xi_{\{a\}}(X) = T_{\{a\}}(X) - G_{\{a\}}(X) \tag{3}$$

とおく．ここでは，過程 X が

$$\text{ブラウン運動 } B = (B(t) : t \ge 0)$$

の場合と

$$\text{指数 } 1 < \alpha < 2 \text{ の対称 } \alpha\text{-安定過程 } X_\alpha = (X_\alpha(t) : t \ge 0)$$

の場合との対比に興味がある．

ブラウン運動の点 $a \in \mathbb{R}$ への到達時刻 $T_{\{a\}}(B)$ は片側 $\frac{1}{2}$-安定分布に従う．すなわち，

$$E\left[\mathrm{e}^{i\theta \widehat{B}(T_{\{a\}}(B))}\right] = E\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta^2 T_{\{a\}}(B)}\right] = \mathrm{e}^{-a|\theta|}, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{4}$$

が成り立つ．ここで，$\widehat{B}$ は B の独立なコピーである．従って特に，$\widehat{B}(T_{\{a\}}(B)) \overset{\text{law}}{=} a\mathcal{C}$ が成り立つ．ただし，$\mathcal{C}$ はコーシー分布に従う確率変数を表す:

$$P(\mathcal{C} \in \mathrm{d}x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

次の定理はこの事実の拡張である．

定理 1. $\widehat{X}_\alpha(T_{\{a\}}(X_\alpha)) \overset{\text{law}}{=} a\mathcal{C}_\alpha$ が成り立つ．ただし，$\widehat{X}_\alpha$ は X_α の独立なコピーとし，

$$P(\mathcal{C}_\alpha \in \mathrm{d}x) = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{2\pi/\alpha}\frac{1}{1+|x|^\alpha}\mathrm{d}x. \tag{6}$$

---

*URL: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/`

$\mathcal{C}_\alpha$ の分布を α-コーシー分布と呼ぶことにする．コーシー分布が無限分解可能であることはよく知られているが，α-コーシー分布が無限分解可能であるか否かはよくわからない．この対比を過程のレベルで述べよう．ブラウン運動の到達時刻が成す過程 $(T_{\{a\}}(B) : a \geq 0)$ は増加加法過程をなす．実際，$h > 0$ のとき，ブラウン運動の経路の連続性によって

$$T_{\{a+h\}}(B) - T_{\{a\}}(B) = T_{\{h\}}(\theta_{T_{\{a\}}(B)}(B)) \tag{7}$$

が成り立つことに注意すると，ブラウン運動の強マルコフ性から求める結論が得られる．一方，対称 α-安定過程 $(1 < \alpha < 2)$ においては，経路が連続でないため，確率 1 で，$a \mapsto T_{\{a\}}(X_\alpha)$ が単調増加とならないのである．

この対比についてもうひとつ別の観点から述べよう．ブラウン運動に対しては次の公式がよく知られている:

$$E\left[\mathrm{e}^{-qG_{\{a\}}(B)}\right] = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\sqrt{2q}a}}{2\sqrt{2q}a}, \qquad E\left[\mathrm{e}^{-q\Xi_{\{a\}}(B)}\right] = \frac{\sqrt{2q}a}{\sinh(\sqrt{2q}a)}, \qquad q > 0. \tag{8}$$

ここで，$G_{\{a\}}(B)$ および $\Xi_{\{a\}}(B)$ の分布はともに無限分解可能であることに注意する．次の定理はこの事実の拡張である．

定理 2. $G_{\{a\}}(X_\alpha)$ の分布は無限分解可能であり，次の公式が成り立つ:

$$E\left[\mathrm{e}^{-qG_{\{a\}}(X_\alpha)}\right] = \frac{\{u_q^{(\alpha)}(0)\}^2 - \{u_q^{(\alpha)}(a)\}^2}{2h^{(\alpha)}(a)u_q^{(\alpha)}(0)}, \tag{9}$$

$$E\left[\mathrm{e}^{-q\Xi_{\{a\}}(X_\alpha)}\right] = \frac{u_q^{(\alpha)}(a)}{u_q^{(\alpha)}(0)} \cdot \frac{2h^{(\alpha)}(a)u_q^{(\alpha)}(0)}{\{u_q^{(\alpha)}(0)\}^2 - \{u_q^{(\alpha)}(a)\}^2}. \tag{10}$$

ただし，

$$u_q^{(\alpha)}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{q + |x|^\alpha}\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$h^{(\alpha)}(a) = \lim_{q \to 0+} \left\{u_q^{(\alpha)}(0) - u_q^{(\alpha)}(a)\right\} = C_\alpha |a|^{\alpha - 1}. \tag{12}$$

$\Xi_{\{a\}}(X_\alpha)$ の分布が無限分解可能であるか否かはよくわからない．

参考文献

[1] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes. *submitted*, arXiv:0811.2046. 2008.

2つの確率摂動を含む経済成長方程式

西岡 國雄 [*1]

1. 経済成長理論は,「急速で安定した経済成長の要因は何か?」を調べることが主要なテーマである. 現代の経済成長理論は, R. Solow の提唱した「新古典派の経済成長理論」を基礎としている.

仮定 1. (i) 孤立した経済で, 唯一つの製品を生産する. この製品は消費もしくは資本として再投資される.
(ii) 時刻 t での生産量 $Y(t)$ は 資本量 $K(t)$ と 労働人口 $L(t)$ の関数である, i.e. $Y(t) = F(K(t), L(t))$.
(iii) F は**生産関数**とよばれ, $(K, L) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ で定義され, 以下の条件を満たす:

(1) 変数 K, L に関し, 非負の滑らかな 狭義凹関数 で $F(0, L) = 0 = F(K, 0)$,

(2) $\lim_{K\to\infty} \partial_K F(K, L) = 0, \quad \lim_{L\to\infty} \partial_L F(K, L) = 0.$ (効用逓減の法則)

(3) $\lim_{K\to 0} \partial_K F(K, L) = \infty, \quad \lim_{L\to 0} \partial_L F(K, L) = \infty.$ (Inada 条件)

(4) 任意定数 $a > 0$ にたいし $F(aK, aL) = a\,F(K, L)$, (線形同時性)

(iv) 資本 $K(t)$ の増加には, 一定の摩擦 λ が存在. また再投資率 s および 労働人口の増加率 n は一定. $\diamond$

注意 2. 生産関数の典型例は, Cobb-Douglus 関数 $F(K, L) = K^\alpha\ L^{1-\alpha}$ (定数 $0 < \alpha < 1$) である. また Inada 条件 (3) の妥当性に関しては種々の異論が提出されている. $\diamond$

Solow は 生産量 (GDP) $Y(t)$ や 資本量 $K(t)$ に代えて, それらを労働人口 $L(t)$ で割った,

$$\text{単位 GDP (per ca-pita GDP) } y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}, \qquad \text{単位資本量 } k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$$

を導入し, 仮定 1 の下で, それらが次の方程式の解となることを導いた.

$$\begin{aligned} &y(t) = f(k(t)), \qquad f(k) \equiv \frac{F(K, L)}{L} = F\big(\frac{K}{L}, 1\big), \\ &k'(t) = s\cdot f(k(t)) - \big(\lambda + n\big)\cdot k(t). \quad \text{(Solow 方程式)} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで f は非負の滑らかな狭義凹関数で, 以下を満たしている.

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0, \qquad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \quad \text{(Inada 条件)}.$$

定理 3 (Solow)**.** Solow 方程式 (5) には唯一の安定不動点 $k^* > 0$ が存在し, $\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*$ となる. なお k^* は **golden age** と呼ばれる. $\diamond$

2. 単位 GDP の成長率 $y'(t)/y(t)$ を Solow 方程式から計算すると,

$k(0)$	$0 \simeq k(0)$	$0 < k(0) < k^*$	$k(0) = k^*$	$k^* < k(0)$
growth rate $y'(t)/y(t)$	$\simeq \infty$	positve growth	0	negative growth

となる. Solow 方程式は, 日本, ドイツ, 韓国など幾つもの国での経済成長を上手く説明できたが,

(6) 最富裕国の米国の 100 年間の平均成長率は 2 %.

(7) 最貧国 (赤道アフリカ諸国) の 20 年間の平均成長率は負.

など, Solow 方程式では説明できない事態が出現した. この困難を克服するため, 近年幾つもの試みがなされている.

[*1] 中央大学商学部, 〒 192-0393 八王子市東中野 742-1, *E-Mail Adress* : nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

- Lucus, Romer などは“技術的進歩 $A(t)$”を提唱し, Uzawa, Mankew などは“教育による生産性の向上 $H(t)$”を導入した. これらを生産関数 F に組み込むことにより, (6) の説明には成功したが, (7) を上手く説明することは出来なかった.

- 一方 Merton は労働人口 $L(t)$ に, Cho-Cooley は技術的進歩 $A(t)$ に Brown 運動を持ち込み, Solow 方程式を SDE として定式化した. この場合, 単位資本量 $k(t,w)$ や 単位 GDP $y(t,w)$ は拡散過程となる. 彼らは, 労働人口増加率 n や 技術的進歩係数 g がある条件をみたすとき, $k(t,w)$ が再帰的であり, 不変測度が存在することを証明した.

3. 我々は, 労働人口 $L(t)$ と 技術的進歩 $A(t)$ の両者にそれぞれ独立な Brown 運動を持ち込む:

$$\begin{aligned} dL(t,w) &= n\,L(t,w)\,dt + \sigma_1\,L(t,w)\,dB_1(t,w),\\ dA(t,w) &= g\,A(t,w)\,dt + \sigma_2\,A(t,w)\,dB_2(t,w). \end{aligned}$$

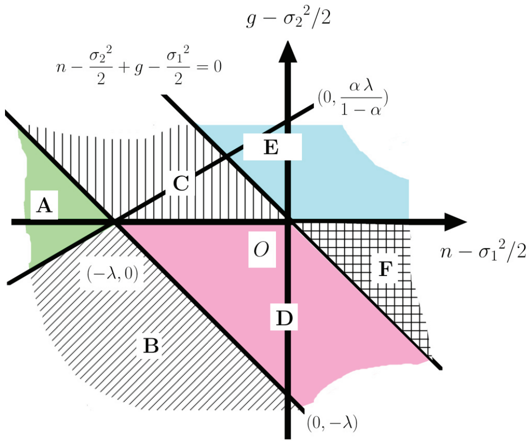
つぎに $x(t,w) \equiv \dfrac{K(t,w)}{A(t,w)\,L(t,w)}$ を導入し, それがつぎの SDE の解となることを示す.

$$dx(t,w) = \left\{s\,f(x(t,w)) - \left(\lambda + n + g - \sigma^2\right)x(t,w)\right\}dt + \sigma\,x(t,w)\,dW(t,w). \tag{8}$$

ここで, $\sigma \equiv \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}$, $W(t,w) \equiv \dfrac{-1}{\sigma}\left(\sigma_1\,B_1(t,w) + \sigma_2\,B_2(t,w)\right)$. 以下の結果が得られた:

- $\{x(t,w)\}$ の漸近挙動の分類. ここで $n, \cdots, \sigma_2$ の値により, “再帰性”や“0 への収束”などが出現する.

- 特に f を Cobb-Douglus 型 $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, とし, GDP $\{Y(t,w)\}$ および 単位 GDP $\{y(t,w)\}$ の成長率の時間平均の分類. すなわち, $(n - {\sigma_1}^2/2,\ g - {\sigma_2}^2/2)$ 平面を 6 つの領域 $A \sim F$ に分割すると, それらは定数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$ ($n, \cdots, \sigma_2$ から簡単に計算できる) に確率 1 で収束する.



$(g - {\sigma_1}^2/2,\ n - {\sigma_2}^2/2)$	$\in$ A	$\in$ B	$\in$ C
Mean growth rate of $\{Y(t,w)\}$	$\to \gamma_1$ $a.s.$ negative growth	$\to \gamma_1$ $a.s.$ negative growth	$\to \gamma_2$ $a.s.$ negative growth
Mean growth rate of $\{y(t,w)\}$	$\to \gamma_3$ $a.s.$ positive growth	$\to \gamma_3$ $a.s.$ negative growth	$\to \gamma_4$ $a.s.$ positive growth

$(g - {\sigma_1}^2/2,\ n - {\sigma_2}^2/2)$	$\in$ D	$\in$ E	$\in$ F
Mean growth rate of $\{Y(t,w)\}$	$\to \gamma_2$ $a.s.$ negative growth	$\to \gamma_2$ $a.s.$ positive growth	$\to \gamma_2$ $a.s.$ positive growth
Mean growth rate of $\{y(t,w)\}$	$\to \gamma_4$ $a.s.$ negative growth	$\to\to \gamma_4$ $a.s.$ positive growth	$\to \gamma_4$ $a.s.$ negative growth

Ergodicity of the Wonham filter

渡辺 有佑 *

2008 年 12 月 17 日

直接観測不可能な現象を表す確率過程（系過程、signal）を、雑音で汚染されたデータ（観測過程、observation）をもとにして、順次推定する問題を一般にフィルタリングの問題といい、観測データに基づく系過程の各時点における条件付き確率分布をフィルターという。ここでは、系過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は有限状態空間 $\mathcal{E}^d = \{e_1, \cdots, e_d\}$ に値をとる Markov chain（ Q-matrix $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1\le i,j\le d}$, 初期分布 β ）とし、観測過程 $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は次の $\mathbb{R}^N$ 値連続 semimartingale として考える：

$$Y_t = \int_0^t g(X_s)ds + \sigma W_t.$$

ここに、$g : \mathcal{E}^d \longrightarrow \mathbb{R}^N$、$\sigma \in \mathbb{M}^{N\times N}$ は非退化行列、$W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は X と独立な N 次元標準 Brown 運動である。この場合、フィルター

$$p_t = (p_t^1, \cdots, p_t^d)^*, \qquad p_t^i = P(X_t = e_i|\mathcal{Y}_t), \qquad \mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s : 0 \le s \le t)$$

は次の Wonham の確率微分方程式に駆動される確率過程であることが知られている (cf. 国田 [1])：

$$\begin{aligned} dp_t &= \Lambda^* p_t dt + \mathrm{diag}(p_t)[E_d - \mathbf{1}_d p_t^*]\mathbf{g}^*(\sigma\sigma^*)^{-1}[dY_t - p_t(g)dt], \\ p_0 &= \beta. \end{aligned}$$

ここに、$E_d \in \mathbb{M}^{d\times d}$ は単位行列、$\mathbf{1}_d = (1, \cdots, 1)^* \in \mathbb{R}^d$、$\mathbf{g} = \big(g^\nu(e_j)\big) \in \mathbb{M}^{N\times d}$、$p_t(g) = \sum_{j=1}^d g(e_j)p_t^j$ である。さらに、過程：

$$\mathbb{B}_t = \sigma^{-1}(Y_t - \int_0^t p_s(g)ds)$$

は $\mathcal{Y}_t$ 可測な N 次元標準 Brown 運動であり、p_t は次の（境界の無い）単体上の拡散過程となる：

$$\mathcal{S}_o^{d-1} = \{p \in \mathbb{R}^d : p^i + \cdots + p^d = 1, \;\; p^1 > 0, \cdots, p^d > 0\}$$

($\beta \in \mathcal{S}_o^{d-1}$ の仮定の下で)。

p_t の <u>漸近挙動</u> に関する先行研究は少なくないが（cf.[2], [3], [4]）、それらは p_t が状態空間 $\mathcal{E}^d$ 上の確率測度に値をとる確率過程であるとの観点に立脚するものである。我々は上記のように、p_t は単体 $\mathcal{S}_o^{d-1}$ 上の拡散過程であるとする立場を採る。そうすると、

どのような条件の下で p_t は $\mathcal{E}^d$ 上でエルゴード的（正再帰的）か？

という疑問が生じる。本講演ではこの問題に関する一つの結果を与える。それは次の定理である：

*大阪大学基礎工学研究科　博士後期課程 1 年　長井研究室　 watanabe@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

THEOREM. 系過程 X 自身がエルゴード的であり、かつ $\mathrm{rank}(G) = d-1$ ならばフィルター p_t は単体 $\mathcal{S}_o^{d-1}$ 上のエルゴード的拡散過程である。ただし、

$$G = \Big(g^\nu(e_j) - g^\nu(e_d)\Big)_{\substack{1\le\nu\le N\\ 1\le j\le d-1}} \in \mathbb{M}^{N\times(d-1)}.$$

この定理の証明のアウトラインは以下の通り：
(I) **単体 $\mathcal{S}_o^{d-1}$ から $\mathbb{R}^{d-1}$ への座標変換。** 楕円型 2 階微分作用素 $L = \frac{1}{2}a^{ij}(x)D_{ij} + b^i(x)D_i$（から生成される $\mathbb{R}^m$ 上の拡散過程）のエルゴード性を係数 $a^{ij}(\cdot), b^i(\cdot)$ から判定する既知の方法に訴えるため、Wonham SDE の拡散係数と‘‘相性のよい’’座標変換 $\mathcal{S}_o^{d-1} \ni p \mapsto y \in \mathbb{R}^{d-1}$ を用いて p_t を $\mathbb{R}^{d-1}$ 上の拡散 y_t に変換し、その生成作用素

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1} a^{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} + \sum_{i=1}^{d-1} U^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

を求める。
(II) **作用素 $L = \frac{1}{2}a^{ij}(x)D_{ij} + b^i(x)D_i$ のエルゴード性判定法の拡張。** Bhattacharya による判定法（cf.[5]）を拡張する。拡張された判定法の内容を大雑把に述べると：「L に対して‘‘適切な’’スカラー場 ψ を見出すことが出来るならば、L はエルゴード的である。」
(III) **$\mathcal{L}$ のエルゴード性の証明。** y_t の生成作用素 $\mathcal{L}$ の拡散係数 a^{ij} が非退化なるための（g に関する）条件を求める。その後、或るスカラー場 ψ を提示し、系過程 X のエルゴード性の仮定の下で ψ が $\mathcal{L}$ に対して (II) の意味で‘‘適切’’であることを証明する。

参考文献

[1] 国田寛、確率過程の推定、産業図書、1976.

[2] H.Kunita, Asymtotic Behavior of the Nonlinear Filtering Errors of Markov Processes, J.Multivariate Anal.,1 (1971),pp.365-393.

[3] P.Baxendale, P.Chigansky, R.Liptser, Asymtotic stability of the Wonham filter: ergodic and nonergodic signals, SIAM J. Control Optim. 43 (2) (2004), pp. 643-669.

[4] P. Chigansky, An ergodic theorem for filtering with applications to stability, Systems & Control Letters, Vol 55 (2006) No. 11 pp 908-917.

[5] R.N.Bhattacharya, Criteria for recurrence and existence of invariant measures for multidimensional diffusions, Ann. Probab., 6 (1978), pp. 541-553.