

## $d$ -Complete poset の linear extension を一様に生成する確率アルゴリズム

KENTO NAKADA

### 1. はじめに

C.Greene, A.Nijenhuis, H.S.Wilf は、1979 年の論文 [2] で、Young diagram の linear extension (reverse standard tableau) を確率的に生成するランダムウォークに基づくアルゴリズム (GNW-algorithm) を考案した。このアルゴリズムが linear extension を一様に生成することから、linear extension の総数を与える hook length formula の別証明が得られる。本講演では  $d$ -complete poset (simply-laced generalized Young diagram) と呼ばれる Young diagram を含むかなり大きなクラスの poset に対して GNW-algorithm が適用できることを解説する。したがって特に、このアルゴリズムから  $d$ -complete poset の linear extension の総数を与える hook length formula が得られる。これは D. Peterson の (証明が公開されていない) hook formula [1] を simply-laced の場合に証明するものである。なお本研究は、大阪大学情報科学研究科 研究生 岡村修志の修士論文を改良したものであり、また、岡村修志との共同研究である。

### 2. (一般化された) GNW-ALGORITHM

有向グラフ  $\Gamma = (V; A)$  が与えられているとする。

$v \in V$  に対して、 $\phi(v) := \{a \in A \mid a \text{ は } v \text{ から出る arrow}\}$  とおく。

GNW-algorithm は 2 段階の procedure からなる。

まず、次の確率アルゴリズムを考える:

- Procedure CHW( $\Gamma$ )

10: Chose an element  $v \in V(\Gamma)$  with a probability  $\frac{1}{\#V(\Gamma)}$ .

20: **if**  $\#\phi(v) = 0$  **then** OUTPUT  $v$ ; **STOP**

**else** Chose an element  $a \in \phi(v)$  with a probability  $\frac{1}{\#\phi(v)}$ ; PUT  $v := t(a)$ ; **GOTO** 20

*Remark 1.* このアルゴリズムは要するに、 $\Gamma$  の頂点をランダムに選び、そこからランダムウォークを行い、停まったらその頂点を出力せよ、という意味である。

さらに次の確率アルゴリズムを考える:

- Procedure GNW( $\Gamma$ )

10: **if**  $\#V(\Gamma) = 0$  **then** **STOP**

**else** **RUN** Procedure CHW( $\Gamma$ ) ( Procedure CHW( $\Gamma$ ) から得られる OUTPUT を  $v$  とする ); Put  $\Gamma := \Gamma - v$  ( $\Gamma$  における  $V(\Gamma) - \{v\}$  による誘導部分グラフ); **GOTO** 10

この確率アルゴリズムによって  $\Gamma$  の頂点列  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_d)$  が確率的に選ばれる。この確率を  $\text{Prob}_\Gamma(\mathcal{B})$  と書く。ただし、ここで  $d = \#V(\Gamma)$ 。

*Definition 1.*  $\Gamma$  の頂点列  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_d)$  が  $\Gamma$  の linear extension であるとは if  $v_p \rightarrow v_q$ , then we have  $p > q$ , ( $p, q \in \{1, \dots, d\}$ ) を満たすことである。 $\Gamma$  の linear extension の全体を  $\mathcal{L}(\Gamma)$  と書く。

**Proposition 2.1.** Procedure GNW( $\Gamma$ ) が確率的に生成する頂点列  $(v_1, \dots, v_d)$  は  $\Gamma$  の linear extension である。

## 3. GENERALIZED YOUNG DIAGRAM の定義

Kac-Moody Lie 代数から以下の記号を用いる:

- $P$  : integral weight の集合,  
 $\Phi_+^\vee$  : positive real coroot の集合.

*Definition 2.*  $\lambda \in P$  が pre-dominant であるとは、次を満たすことである:

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta^\vee \in \Phi_+^\vee.$$

Pre-dominant integral weights のなす集合を  $P_{\geq -1}$  で表す.

*Definition 3.*  $\lambda \in P_{\geq -1}$  に対して、次で定義される集合  $D(\lambda)^\vee$  を  $\lambda$  の shape と呼ぶ:

$$D(\lambda)^\vee := \{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \}.$$

$\lambda$  が finite であるとは、 $\#D(\lambda)^\vee < \infty$  を満たすことである.

*Definition 4.* 以下によって、 $D(\lambda)^\vee$  を multi-di-graph とみなす.

- $D(\lambda)^\vee$  を頂点集合とみなす.
- $\beta^\vee < \gamma^\vee$  ( $\beta^\vee, \gamma^\vee \in D(\lambda)^\vee$ ) のとき、 $\gamma^\vee$  から  $\beta^\vee$  へ  $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle$  本の arrow を引く.

**Lemma 3.1.**  $\lambda \in P_{\geq -1}$ ,  $\beta^\vee, \gamma^\vee \in D(\lambda)^\vee$  は  $\beta^\vee < \gamma^\vee$  とする. このとき、次が成り立つ:

- (1)  $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 0, 1$ , or 2.
- (2) Dynkin diagram が simply-laced で、 $\lambda$  が finite のとき、 $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 0$ , or 1.

## 4. 主定理 (SIMPLY-LACED CASE)

*Definition 5.* Dynkin diagram が simply-laced で、 $\lambda \in P_{\geq -1}$  が finite のとき、 $(D(\lambda)^\vee; <)$  を d-complete poset (or, simply-laced generalized Young diagram) と呼ぶ.

**Theorem 4.1.** d-complete poset  $(D(\lambda)^\vee, <)$  における, GNW-algorithm は linear extension  $(\beta_1^\vee, \dots, \beta_d^\vee) \in \mathcal{L}(D(\lambda)^\vee)$  を次の確率で生成する:

$$(4.1) \quad \text{Prob}_{D(\lambda)^\vee}(\beta_1^\vee, \dots, \beta_d^\vee) = \frac{\prod_{\gamma^\vee \in D(\lambda)^\vee} (1 + \#\phi(\gamma^\vee))}{d!}.$$

**Corollary 4.2.**  $\text{Prob}_{D(\lambda)^\vee}()$  は一様分布である.

*Proof.* (4.1) の右辺は linear extension に依存していないから. □

**Corollary 4.3.**

$$\#\mathcal{L}(D(\lambda)^\vee) = \frac{d!}{\prod_{\gamma^\vee \in D(\lambda)^\vee} (1 + \#\phi(\gamma^\vee))}.$$

*Proof.* Corollary 4.2 から従う. □

## REFERENCES

- [1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S.Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.
- [3] S. Okamura, K. Nakada, *Greene-Nijenhuis-Wilf algorithm for a simply-laced generalized Young diagram*, preprint.
- [4] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of  $\lambda$ -minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets*, J.Algebraic Combin. **9** (1999), 61-94.

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN, PARTIALLY SUPPORTED BY GCOE, KYOTO UNIVERSITY

E-mail address: nakada@kurims.kyoto-u.ac.jp

# Concentration under scaling limits for weakly pinned random walks

乙部 達志 (東大数理, D3)

## 1. 目的

本講演では,  $\delta$ -ピンニングポテンシャル (原点へのジャンプ) を加えた  $d$ -次元ランダムウォークを考え, 対応する大偏差原理の速さ関数が最小解を 2 つ持つ場合に, 大数の法則型の極限定理について論じる. 平均 0 の Gauss 的ランダムウォーク (以下で  $p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\{-|x|^2/2\}$  としたもの) に対する同様の問題は [1] で議論されているが, 本講演ではより一般のランダムウォークについて論じる. なお, 本講演は舟木直久氏との共同研究に基づくものである.

## 2. 動機

大偏差原理が示されれば, 一般論から大偏差原理の速さ関数 (界面の総表面張力) の最小解が唯一の場合は大数の法則が成立する事が分かっている. そこで, 大偏差原理の速さ関数の最小解が 1 つでない場合は大数の法則がどうなるのかといった自然な疑問が出てくる. 問題の物理的な意味は, 「水滴の形など界面の形は総表面張力が最小となるものが現れるが, 総表面張力が最小となる界面の形が 1 つでない時, 界面はどのような形になるのだろうか?」という興味深い問題である. この事は, 大偏差原理の精密化をする事により決定する事が出来る. 本講演はランダムウォークモデルであるが,  $d = 1$  の時には界面モデルとみることが出来る.

## 3. モデルと結果

$D = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  とし,  $D_N = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$  とおく. このとき, 微視的な位置を表す変数  $\phi = \{\phi_i \in \mathbb{R}^d, i \in D_N\}$  に対して, 巨視的な位置を表す変数  $\{h^N(t); t \in D\}$  を次で定義する.

$$h^N(t) = \frac{[Nt] - Nt + 1}{N} \phi_{[Nt]} + \frac{Nt - [Nt]}{N} \phi_{[Nt]+1}, \quad t \in D.$$

また,  $a, b \in \mathbb{R}^d, \varepsilon \geq 0$  として  $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$  上の Markov 連鎖の分布を次で定義する.

$$\mu_N^{a,b,\varepsilon}(d\phi) = \frac{1}{Z_N^{a,b,\varepsilon}} \left( \prod_{i=1}^N p(\phi_i - \phi_{i-1}) \right) \delta_{aN}(d\phi_0) \prod_{i=1}^{N-1} (\varepsilon \delta_0(d\phi_i) + d\phi_i) \delta_{bN}(d\phi_N),$$
$$\mu_N^{a,F,\varepsilon}(d\phi) = \frac{1}{Z_N^{a,F,\varepsilon}} \left( \prod_{i=1}^N p(\phi_i - \phi_{i-1}) \right) \delta_{aN}(d\phi_0) \prod_{i=1}^N (\varepsilon \delta_0(d\phi_i) + d\phi_i).$$

仮定 1.  $p: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  は次を満たす.

1.  $\int_{\mathbb{R}^d} p(x) dx = 1,$
2.  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} p(x) < \infty,$
3. Cramér 条件:  $\Lambda(\lambda) \equiv \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda \cdot x} p(x) dx < \infty, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d,$
4.  $\Lambda^*(v) \equiv \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{\lambda \cdot v - \Lambda(\lambda)\} < \infty, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$

定理 1. (1) Free energy が存在する:  $\forall \varepsilon \geq 0$  に対して,

$$\xi^{D,\varepsilon} = \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{Z_N^{0,0,\varepsilon}}{Z_N^{0,0,0}}, \quad \xi^{F,\varepsilon} = \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{Z_N^{0,F,\varepsilon}}{Z_N^{0,F,0}}.$$

(2)  $0 \leq \exists \varepsilon_c^D \leq \exists \varepsilon_c^F$  s.t.  $\xi^{D,\varepsilon} > 0 \iff \varepsilon > \varepsilon_c^D$  (従って,  $\xi^{D,\varepsilon} = 0 \iff 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c^D$ ),  
 $\xi^{F,\varepsilon} > 0 \iff \varepsilon > \varepsilon_c^F$  (従って,  $\xi^{F,\varepsilon} = 0 \iff 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c^F$ ).

(3)  $d = 1, 2$  の時,  $\varepsilon_c^D = 0$ .  $d \geq 3$  の時,  $\varepsilon_c^D > 0$ .

(4) (i)  $m \equiv \int_{\mathbb{R}^d} xp(x)dx = 0 \iff \varepsilon_c^D = \varepsilon_c^F$ . さらにこの時,  $\forall \varepsilon \geq 0$  に対して,  $\xi^{D,\varepsilon} = \xi^{F,\varepsilon}$ .

(ii)  $m \neq 0 \iff \varepsilon_c^D < \varepsilon_c^F$ . さらにこの時,  $\forall \varepsilon > \varepsilon_c^D$  に対して,  $\xi^{F,\varepsilon} < \xi^{D,\varepsilon}$ .

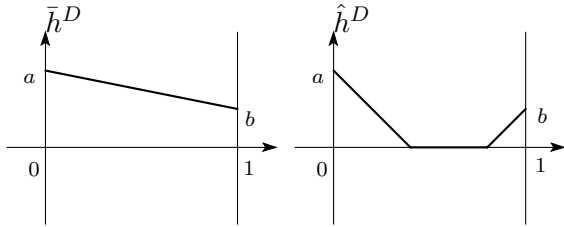
**定理 2.**  $\mu_N = \mu_N^{a,b,\varepsilon}, \mu_N^{a,F,\varepsilon}$  の下,  $h^N = \{h^N(t), t \in [0, 1]\}$  に対して  $N \rightarrow \infty$  とした時,  $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$  上で大偏差原理が成り立つ. (規格化していない) 速さ関数  $\Sigma = \Sigma^{D,\varepsilon}, \Sigma^{F,\varepsilon}$  の形:

$$\Sigma(h) = \int_0^1 \Lambda^*(\dot{h}(t))dt - \xi|\{t \in [0, 1]; h(t) = 0\}|,$$

ここで,  $\xi = \xi^{D,\varepsilon}, \xi^{F,\varepsilon}$ .

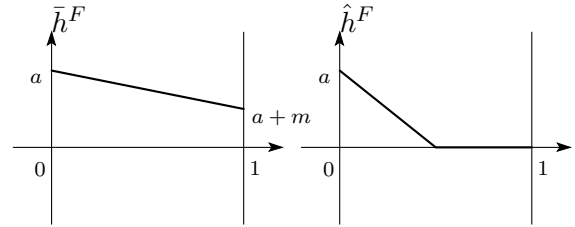
• 以下は  $d = 1$  の時の  $\Sigma(h)$  の最小解の形

Dirichlet case



Free case

$\xi^{F,\varepsilon} > \Lambda^*(0)$



**注意 3.**  $\xi^{F,\varepsilon} = \Lambda^*(0)$  かつ  $t \in [0, 1]$  が存在して  $a = -tm$  の時は, 連続無限個の最小解がある.

記号. 「 $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\|h^N - h^*\|_\infty \leq \delta) = 1, \forall \delta > 0$ 」を「 $h^N \rightarrow h^*$ 」と書き, 「 $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\|h^N - h^*\|_\infty \leq \delta) = c \in (0, 1), \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\|h^N - h^{**}\|_\infty \leq \delta) = 1 - c, \forall \delta > 0$ : 十分小」を「 $h^N \rightarrow h^*$  と  $h^{**}$  の共存」と書く事にする. ただし,  $\mu_N^{a,b,\varepsilon}, \mu_N^{a,F,\varepsilon}$  を代表して  $\mu_N$  と書いた.

**定理 4.** (Dirichlet case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e.  $\Sigma^{D,\varepsilon}(\hat{h}^D) = \Sigma^{D,\varepsilon}(\bar{h}^D)$ ) を考える.  $\mu_N^{a,b,\varepsilon}$  の下で

- ( $d = 1$ )  $h^N \rightarrow \hat{h}^D$ .
- ( $d = 2$ )  $h^N \rightarrow \bar{h}^D$  と  $\hat{h}^D$  の共存.
- ( $d \geq 3$ )  $h^N \rightarrow \bar{h}^D$ .

**定理 5.** (Free case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e.  $\Sigma^{F,\varepsilon}(\hat{h}) = \Sigma^{F,\varepsilon}(\bar{h})$ ) を考える.  $\mu_N^{a,F,\varepsilon}$  の下で

- ( $d = 1$ )  $h^N \rightarrow \bar{h}^F$  と  $\hat{h}^F$  の共存.
- ( $d \geq 2$ )  $h^N \rightarrow \bar{h}^F$ .

## 参考文献

- [1] E. BOLTHAUSEN, T. FUNAKI AND T. OTOBE, *Concentration under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks*, to appear in Probab. Theory Relat. Fields, 2009.

# Positivity of the Lyapunov exponent for brownian directed polymer in random environment in dimension 1

Pierre Bertin

November 26, 2008

The brownian directed polymer model is defined in terms of a 1-dimensional Brownian motion  $(\{\omega_t\}_{t \geq 0}, \{P^x\}_{x \in \mathbb{R}})$  and of a space-time Poisson random measure  $\eta$ , i.e. on  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  under  $Q$ . We also define the filtration

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{\eta(A \cap ([0, t] \times \mathbb{R}); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))\}.$$

To define the polymer measure for time interval  $[0, t]$  with parameter  $\beta$ , we let  $V_t$  denote a tube around the graph  $\{(s, \omega_s)\}_{0 \leq s \leq t}$  of the Brownian path,

$$V_t = V_t(\omega) = \{(s, x); s \in (0, t], x \in [\omega_s - 1/2, \omega_s + 1/2]\}$$

and now we can define

$$\mu_t^x(d\omega) = \frac{\exp(\beta\eta(V_t))}{Z_t^x} P^x(d\omega),$$

$$Z_t^x = P^x[\exp(\beta\eta(V_t))]$$

The goal of this talk is to study the asymptotic behavior of  $Z_t^x$  and to decide if the random environment make a qualificative difference.

**Proposition 1** *if we note  $\lambda = e^\beta - 1$ , then the normalized partition function*

$$W_t = e^{-\lambda t} Z_t$$

*is a  $\mathcal{G}_t$ -martingale.*

The martingale  $W_t$  is positive, so the following limit exists  $Q$ -a.s.:

$$W_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$$

and by Kolmogorov's 0-1 law, either  $Q[W_\infty = 0] = 1$  or  $Q[W_\infty > 0] = 1$ . F.Comets and N.Yoshida have proved in [1] that in dimension one, whenever  $\beta > 0$  the former case  $Q[W_\infty = 0] = 1$  applies.

The purpose of this talk is to discuss a much stronger result.

**Theorem 2** *If  $\beta > 0$ , then there exists a non random constant  $c = c(\beta)$  such that  $Q$ -a.s.*

$$W_t = O(e^{-ct})$$

*In other words, the partition function decays strictly faster than its expectation.*

To prove this theorem we show that for  $\theta$  in  $(0, 1)$ ,  $Q[W_t^\theta] = O(e^{-c't})$ , and the result follows from the Borel-Cantelli lemma. In order to do that, we adapt the same proof for directed random walk, that one can find in [2], i.e. we develop  $W_{s+t}^\theta$  knowing the position of the particle at time  $s$ , and we try to show that if  $s$  is large enough,  $Q[W_{s+t}^\theta] \leq kQ[W_t^\theta]$  where  $k$  is a constant smaller than one. The principal difficulty is that the position at time  $s$  is a continuous distribution on  $\mathbb{R}$ , and in order to match the proof in the discrete case, we try to control it by some fixed points disposed regularly.

## References

- [1] F.Comets, N.Yoshida : Brownian Directed Polymers in Random Environment
- [2] N.Yoshida : Phase transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions

# 無限次元ランダム行列の積で記述される粒子系の相転移<sup>1</sup>

吉田伸生<sup>2</sup> (京都大学大学院理学研究科)

We consider a discrete-time stochastic growth model on  $d$ -dimensional lattice. The growth model describes various interesting examples such as oriented site/bond percolation, directed polymers in random environment, time discretizations of binary contact path process. We first investigate the regular/slow growth phase transition in terms of the growth rate of the total population. Then, we explain that the regular/slow growth phase transition is related to the delocalization/localization transition of the spatial distribution of the population.

## 1 The set-up

Let  $A = (A_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$  be a random matrix and let  $A_1, A_2, \dots$  be its independent copies, defined on a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Here are the set of assumptions we assume for  $A$ :

$$0 \leq A_{x,y} \in \mathbb{L}^2(P) \text{ for all } x, y \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.1)$$

$$A_{x,y} = 0 \text{ a.s. if } |x - y| > r_A \text{ for some non-random } r_A \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

$$(A_{x+z,y+z})_{x,y \in \mathbb{Z}^d} \stackrel{\text{law}}{=} A \text{ for all } z \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.3)$$

$$\text{The columns } \{A_{\cdot,y}\}_{y \in \mathbb{Z}^d} \text{ are independent.} \quad (1.4)$$

$$\text{The set } \{x \in \mathbb{Z}^d; \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} a_{x+y} a_y \neq 0\} \text{ contains a linear basis of } \mathbb{R}^d, \quad (1.5)$$

where  $a_y = P[A_{0,y}]$ .

We define a Markov chain  $N_t = (N_{t,y})_{y \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , with values in  $[0, \infty)^{\mathbb{Z}^d}$  by

$$N_{t,y} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{t-1,x} A_{t,x,y}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Here and in the sequel, we suppose that the initial state  $N_0$  is non-random,  $\neq 0$ , and  $\in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ . If we regard  $N_t \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}^d}$  as a row vector, (1.6) can be interpreted as

$$N_t = N_0 A_1 A_2 \cdots A_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

## 2 Results

We look at the growth rate of the “total number” of particles:

$$|N_t| = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N_{t,y} \quad t = 1, 2, \dots$$

which will be kept finite for all  $t$  by our assumptions. It is easy to show that  $|N_t|/|a|^t$  is a martingale, where

$$|a| = \sum_y a_y, \quad a_y = P[A_{0,y}], \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>2008年、12月「確率論シンポジウム」予稿

<sup>2</sup>[e-mail] nobuo@math.kyoto-u.ac.jp, [URL] <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo>

so that  $|a|^t$  can be considered as the mean growth rate of  $|N_t|$ . We first investigate whether the limit:

$$|\overline{N}_\infty| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} |N_t|/|a|^t \quad (2.2)$$

vanishes almost surely or not. Our results on the positivity of (2.2) can be summarized as follows (cf. [Yo08a]):

- i) If  $d \geq 3$  and the matrix  $A_t$  is not “too random”, then,  $|\overline{N}_\infty| > 0$  with positive probability.
- ii) In any dimension  $d$ , if the matrix  $A_t$  is “random enough”, then,  $|\overline{N}_\infty| = 0$ , almost surely. Moreover, the convergence is exponentially fast.
- iii) For  $d = 1, 2$ ,  $|\overline{N}_\infty| = 0$ , almost surely, under mild assumptions on  $A_t$ . Moreover, the convergence is exponentially fast for  $d = 1$ .

We will refer i) as *regular growth phase*, and ii)—iii) as *slow growth phase*. In the regular growth phase,  $|N_t|$  grows as fast as its mean growth rate with positive probability, whereas in the slow growth phase, the growth of  $|N_t|$  is slower than its mean growth rate almost surely. There is a close connection between the growth rate of  $|N_t|$  and the spatial distribution of the particles:

$$\rho_t(x) = \frac{N_{t,x}}{|N_t|} \mathbf{1}_{\{|N_t| > 0\}}, \quad x \in \mathbb{Z}^d \quad (2.3)$$

as  $t \nearrow \infty$ . The connection is roughly as follows (with some technical assumptions disregarded).

- (iv) The regular growth implies that, conditionally on the event  $\{|\overline{N}_\infty| > 0\}$ , the spatial distribution (2.3) has a Gaussian scaling limit together with the *delocalization property*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \rho_t(x) = 0, \quad \text{in probability.} \quad (2.4)$$

cf. [Na08].

- (v) In contrast to (iv) above, the slow growth triggers the *path localization* (cf. [Yo08b]). In the slow growth phase, there exists  $c \in (0, 1)$  such that,

$$\{|N_t| > 0 \text{ for all } t \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \rho_t(x) \geq c, \text{ i.o.} \right\} \quad \text{a.s.} \quad (2.5)$$

## 参考文献

- [Na08] Nakashima, M.: The Central Limit Theorem for Linear Stochastic Evolutions, preprint, (2008).
- [Yo08a] Yoshida, N.: Phase Transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions, to appear in J. Stat. Phys.,(2008).
- [Yo08b] Yoshida, N.: Localization for Linear Stochastic Evolutions, preprint, arXiv:0810.4218, (2008).



# Linear Stochastic Evolutions と Dual Process

京都大学大学院理学研究科数学教室 中島誠

ランダム媒質中の Directed Polymer に関しては多くの研究がされており、その中に中心極限定理がある [1, 2]。本講演ではその一般化したモデルとそれに似た構造を持つモデルに関する中心極限定理が成立するための十分条件を話す。

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上に i.i.d. 行列値確率変数列  $\{A_t = (A_{t,x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}; t \in \mathbb{N}\}$  を定義する。さらに  $A_t$  には次の条件を仮定する。

- i) 各成分は非負
- ii) 各  $t \geq 1$  に対して列ベクトル  $(A_{t,x,y})_{x \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $y \in \mathbb{Z}^d$  は独立
- iii) すべての  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対して  $E[A_{1,x,y}^2] < \infty$
- iv) ある定数  $r_A > 0$  が存在して、 $|x - y| > r_A$  であれば  $A_{t,x,y} = 0$   $P$ -a.s.
- v) ある  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対して  $A_{1,x,y}$  は定数でない。
- vi)  $(s, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$  に対して、 $(A_t \circ \theta_{s,z})_{t \in \mathbb{N}^*} \stackrel{\text{law}}{=} (A_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$

ここで  $A_t \circ \theta_{s,z} = (A_{t+s,x+z,y+z})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ .

$A_t$  に対して Markov chain  $N_t = (N_{t,y})_{t \in \mathbb{Z}^d}$  を次のように帰納的に定義する。

$$N_{t,y} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{t-1,x} A_{t,x,y}$$
$$N_{0,x} = \delta_x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

このように定義した Markov chain を linear stochastic evolutions と呼ぶことにする。この Markov chain にはランダム環境中の Directed Polymer 以外にも様々なモデルが含まれる (Oriented Site Percolation, Binary Contact Path Process など)。

また dual process と呼ばれる Markov chain を導入することで invariant measure が求まる [4]。Dual process は次のように定義される。

$$M_{t,y} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A_{t,y,x} M_{t-1,x}$$

この構造は linear stochastic evolutions の定義の  $A_{t,x,y}$  の仮定 ii) を次のものに変えたものと考えられる。

- ii)' 各  $t \geq 1$  に対して行ベクトル  $(A_{t,x,y})_{y \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$  は独立

Dual process のこの構造のみに注目すると別のモデルを扱うことも出来る (ランダム環境中の random walk、Oriented bond percolation 上の directed random walk)。

$a_y = E[A_{1,0,y}]$ ,  $b_y = E[A_{1,y,0}]$  として  $\bar{N}_{t,y} = N_{t,y}/|a|^t$ ,  $\bar{M}_{t,y} = M_{t,y}/|b|^t$  とおくと  $|\bar{N}_t|, |\bar{M}_t|$

はマルチンゲールである。ここで  $|\cdot|$  は  $\ell^1$ -ノルムである。

定理 1

$d \geq 3$ ,  $\sup_{t \geq 1} E[|\bar{N}_t|^2] < \infty$  とすると任意の有界連続関数  $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{y - mt}{\sqrt{t}}\right) \frac{N_{t,y}}{|N_t|} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\nu(x) \quad P\text{-a.s. on } \{|\bar{N}_\infty| > 0\}$$

ここで  $m = (m_1, \dots, m_d)$  は  $m = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} ya_y/|a|$  で定義され、 $\nu$  は平均 0、共分散が  $\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j d\nu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (x_i - m_i)(x_j - m_j)a_x/|a|$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  で与えられる正規分布の確率測度。

定理 2

$d \geq 3$ ,  $\sup_{t \geq 1} E[|\bar{M}_t|^2] < \infty$  とする。さらに、次の非退化性

$$\text{ある } y, \tilde{y} \in \mathbb{Z}^d, y \neq \tilde{y} \text{ に対して } E[A_{1,y,0}A_{1,\tilde{y},0}] \neq 0,$$

を仮定する。このとき任意の有界連続関数  $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{y - m't}{\sqrt{t}}\right) \frac{M_{t,y}}{|M_t|} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\nu'(x) \quad P\text{-a.s. on } \{|\bar{M}_\infty| > 0\}$$

ここで  $m' = (m'_1, \dots, m'_d)$  は  $m' = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} yb_y/|b|$  で定義され、 $\nu'$  は平均 0、共分散が  $\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j d\nu' = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (x_i - m'_i)(x_j - m'_j)b_x/|b|$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  で与えられる正規分布の確率測度。

注 ランダム環境中の branching random walk に対しても同じような表現が可能である。このことを使って中心極限定理を証明することが出来る。

## 参考文献

- [1] Bolthausen, Erwin :A note on the diffusion of directed polymers in a random environment. Comm. Math. Phys. 123 (1989), no. 4, 529–534.
- [2] Comets, Francis; Shiga, Tokuzo; Yoshida, Nobuo :Probabilistic analysis of directed polymers in a random environment: a review. Stochastic analysis on large scale interacting systems, 115–142, Adv. Stud. Pure Math., 39, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [3] Nakashima Makoto :Central Limit Theorem for Linear Stochastic Evolutions in preparation.
- [4] Yoshida, Nobuo :Phase Transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions, preprint, 2008, to appear in J. Stat. Phys

# Critical behavior and limit theorems for long-range oriented percolation in high dimensions

北海道大学創成科学共同研究機構

坂井 哲<sup>1</sup>

次のような  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  上の有向パーコレーション ( oriented percolation ) を考える :

- $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  上の有向ペア  $b = ((u, n), (v, n + 1))$  (ただし  $u, v \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_+$ ) を「ボンド」と呼び、その端点を  $\underline{b} = (u, n), \bar{b} = (v, n + 1)$  と表わす .
- 各ボンドは「開いている」か「閉じている」のどちらかとする . また、 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  上の 2 点  $(x, n), (y, l)$  が等しい (すなわち  $x = y, n = l$ ) か、或いはその 2 点が  $l - n$  本の開いたボンドの列  $(b_1, b_2, \dots, b_{l-n})$  (ただし  $\underline{b}_1 = (x, n), \bar{b}_{l-n} = (y, l)$ , かつ全ての  $i \geq 1$  で  $\bar{b}_i = \underline{b}_{i+1}$ ) で繋がるとき、 $(x, n) \rightarrow (y, l)$  と表わす .
- 各ボンド  $((u, n), (v, n + 1))$  は、他のボンドたちとは独立に、確率  $pD(v - u)$  で開くものとする .  $D$  は  $\mathbb{Z}^d$  上対称な確率分布で、したがって  $p \geq 0$  は 1 点から湧き出す開いたボンドの数の期待値である .  $\mathbb{P}_p$  を有向パーコレーションの確率測度とし、その期待値を  $\mathbb{E}_p$  で表わす .

これから専ら考える量として、2 点関数とその Fourier-Laplace 変換を次のように定義する :

$$\varphi_p(x, n) = \mathbb{P}_p((o, 0) \rightarrow (x, n)), \quad Z_p(k; n) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ik \cdot x} \varphi_p(x, n), \quad \hat{\varphi}_p(k, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Z_p(k; n).$$

これらは、 $\mathcal{C}_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : (o, 0) \rightarrow (x, n)\}, \mathcal{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$  とすると、 $Z_p(0; n) = \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}_n|], \hat{\varphi}_p(0, 1) = \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}|]$  と表わせる .  $\hat{\varphi}_p(0, z)$  の右辺の収束半径を  $|z| = m_p$  と表わす .

本講演では、 $\mathbb{R}^d$  上対称な非負有界関数  $h$  で  $h(x) \sim \exists C_h |x|^{-d-\alpha}$  (ただし  $\alpha > 0$ ) なる関数を用いて、

$$D(x) = \frac{h(x/L)}{\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} h(y/L)} \quad (x \in \mathbb{Z}^d),$$

(ただし  $L < \infty$  は格子間隔を調節するパラメーター) とした有向パーコレーションを考える . このモデルは次のような相転移を示すことが知られている : ある  $p_c = p_c(d, \alpha, L) \geq 1$  が存在して、

$$\chi_p := \hat{\varphi}_p(0, 1) \begin{cases} < \infty & (p < p_c), \\ = \infty & (p \geq p_c), \end{cases} \quad \Theta_p := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = \infty) \begin{cases} = 0 & (p \leq p_c), \\ > 0 & (p > p_c). \end{cases}$$

我々が知りたいことは、臨界点近傍における諸量の特異な振る舞いや極限定理である . 特に、

$$\chi_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \Theta_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p - p_c)^\beta, \quad m_p - m_{p_c} \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^\tau, \\ \mathbb{P}_{p_c}(|\mathcal{C}| \geq n) \underset{n \uparrow \infty}{\approx} n^{-1/\delta}, \quad Z_{p_c}(0; n) \underset{n \uparrow \infty}{\approx} n^\eta,$$

(今は  $f \approx g$  の意味を特定しないでおく) と予想される臨界現象は本当に起こるのか、臨界指数  $\gamma, \beta, \delta, \tau, \eta$  の値はどのように  $d, \alpha, L$  に依存するのか、更に臨界点  $p_c$  直上ではどんな極限定理が成り立つか、ということを知りたい .

我々は [4] において、次の結果を得た :

定理 1 .

$d > 2(\alpha \wedge 2)$  に対し、或る  $L_0 = L_0(d, \alpha) < \infty$  があって、次のステートメントが全ての  $L \geq L_0$  で成り立つ : 或る  $C = C(d, \alpha, L) < \infty$  が存在し、任意の  $p \in (0, p_c), k \in [-\pi, \pi]^d, m < m_p, \theta \in [-\pi, \pi]$  で、

$$|\hat{\varphi}_p(k, me^{i\theta})| \leq \frac{C}{1 - \hat{D}(k) + p(m_p - m) + |\theta|}.$$

<sup>1</sup><http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>

定理 1 で現れた  $2(\alpha \wedge 2)$  はこのモデルの上部臨界次元で,  $d \leq 2(\alpha \wedge 2)$  では上述のような  $|\hat{\varphi}_p(k, me^{i\theta})|$  に対する単純な上限は成り立たないと考えられている [8].

定理 1 と [1, 2, 3] の結果を合わせれば, 次の系が得られる [4]:

系 2 .

$d > 2(\alpha \wedge 2)$  に対し, 或る  $L_0 = L_0(d, \alpha) < \infty$  があって,  $m_{p_c} = 1$  と次の関係式が全ての  $L \geq L_0$  で成り立つ:

$$\chi_p \underset{p \uparrow p_c}{\asymp} (p_c - p)^{-1}, \quad \Theta_p \underset{p \downarrow p_c}{\asymp} p - p_c, \quad m_p - 1 \underset{p \uparrow p_c}{\asymp} p_c - p, \quad \mathbb{P}_{p_c}(|\mathcal{C}| \geq n) \underset{n \uparrow \infty}{\asymp} n^{-1/2}.$$

ただし  $f \asymp g$  は,  $c_1 \leq f/g \leq c_2$  となる定数  $c_1, c_2 \in (0, \infty)$  が存在するということ.(この意味で  $\gamma = \beta = \tau = 1, \delta = 2$ .)

最近, 我々はこれらの結果を更におし進め, 次の極限定理を得た [4, 5]:

定理 3 .

$k \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$  に対し,

$$k_n = k \times \begin{cases} n^{-\frac{1}{\alpha \wedge 2}} & (\alpha \neq 2), \\ (n \log n)^{-1/2} & (\alpha = 2), \end{cases}$$

と表わす.  $d > 2(\alpha \wedge 2)$  に対し, 或る  $L_0 = L_0(d, \alpha) < \infty$  があって, 次のステートメントが全ての  $L \geq L_0$  で成り立つ:  $p \in (0, p_c]$  と  $d, \alpha, L$  に依存した定数  $C_1, C_2 \in (0, \infty)$  が存在し, 任意の  $k \in \mathbb{R}^d$  で,

$$Z_p(0; n) \sim C_1 m_p^{-n}, \quad \frac{Z_p(k_n; n)}{Z_p(0; n)} \sim \exp(-C_2 |k|^{\alpha \wedge 2}).$$

(最初の漸近的關係式と  $m_{p_c} = 1$  から,  $\eta = 0$  も分かる.)

我々の証明は, 有向パーコレーションに対するレース展開に基づいている. ただし, 従来のレース展開の解析法は, 例えば定理 3 のような漸近的振る舞いを証明しようとするとき,  $p \in (0, p_c]$  で  $D$  の台が有限である場合 [7] か, 或いは  $p = p_c$  直上で  $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^{2+\varepsilon} D(x) < \infty$  となる  $\varepsilon > 0$  が存在する場合 [6] に限られていた. 我々は [5] において, レース展開係数の分数冪モーメントを解析する新しい方法を発見し, それを  $p \in (0, p_c]$  の長距離有向パーコレーションに適用し, 定理 3 が上部臨界次元ギリギリまで成り立つことを証明した. 実は, 定理 3 の  $C_1, C_2$  はレース展開係数を用いて陽に書き下せるのだが, 特に  $C_2$  の表現が  $\alpha = 2$  で変わってしまう現象 (クロスオーバー) は興味深かった [5].

本講演では, これらの結果と証明のキーポイントを概観する.

## 参考文献

- [1] M. Aizenman and D.J. Barsky. *Comm. Math. Phys.* **108** (1987): 489–526.
- [2] M. Aizenman and C.M. Newman. *J. Stat. Phys.* **36** (1984): 107–143.
- [3] D.J. Barsky and M. Aizenman. *Ann. Probab.* **19** (1991): 1520–1536.
- [4] L.-C. Chen and A. Sakai. *Probab. Theory Relat. Fields* **142** (2008): 151–188.
- [5] L.-C. Chen and A. Sakai. To appear in *Probab. Theory Relat. Fields*.
- [6] R. van der Hofstad and G. Slade. *Probab. Theory Related Fields* **122** (2002): 389–430.
- [7] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. *J. Stat. Phys.* **78** (1995): 841–876.
- [8] A. Sakai. *J. Stat. Phys.* **106** (2002): 201–211.

# 無限粒子系からなる対称平衡過程の 大偏差原理と縮約原理

高橋陽一郎 (京大数理研)

Around 1974 M.Kac et al. pointed out the relationship between the scattering length in the scattering problem and the capacity in the probability theory. Based on the results by F.Spitzer et al. in 1960's they showed that the scattering length  $\Gamma(f)$  is given by the following asymptotics for Brownian motions if the dimension  $d \geq 3$ :

$$\Gamma(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} dx E_x \left[ 1 - \exp\left(-\int_0^t f(w(s)) ds\right) \right]$$

In 1974 T.Shiga and the author formulated the equilibrium process consisting of infinitely many independent copies of a Markovian particle as the Poisson measure on the configuration space over the path space.

If one knows these results and is familiar with the large deviation theory, it is quite natural to guess that the scattering length will be obtained from a contraction principle for the large deviation of an equilibrium processes.

It is true at least if the underlying process is symmetric and transient.

**Definition 1.** Let  $(P_x, x \in R)$  be a symmetric Markov process with nonatomic reversible measure  $\lambda$  and set  $\Lambda(\cdot) = \int_R \lambda(dx) P_x(\cdot)$ . The Poisson measure  $\pi_\Lambda$  will be called the symmetric equilibrium process.

Recall that

$$\int_{\Omega} \pi_\Lambda(d\omega) e^{-\langle \omega, F \rangle} = \exp\left(-\int_W (1 - e^{-F(w)}) \Lambda(dw)\right)$$

where

$$\langle \omega, F \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} F(w_i) \text{ if } \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{w_i}.$$

The symmetric equilibrium process is (naturally identified with) a symmetric Markov process on the configuration space  $Q = \{\xi = \sum \delta_{x_i}\}$  with reversible measure  $\pi_\lambda$ . The space  $L^2(Q, \pi_\lambda)$  is isomorphic to the Fock space  $\mathcal{F}$  which is identified with  $L^2_{sym}(\bigcup R^n, \lambda_*)$  where  $\lambda_* = \bigoplus \frac{1}{n!} \lambda^{\otimes n}$ . The isomorphism  $I : \mathcal{F} \rightarrow L^2(Q, \pi_\lambda)$  is obtained by Schmidt's orthogonalization from

$$\langle \xi_n, f_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \text{ distinct}} f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \quad n \geq 0$$

Let  $T_t$  be the transition semigroup of the underlying Markov process  $(P_x)_{x \in R}$  and set  $\mathcal{T}_t = \bigoplus T_t^{\otimes n}$

**Theorem 2.** The isomorphism  $I$  intertwines the transition semigroups  $\mathbf{T}^t$  of the equilibrium process and  $\mathcal{T}^t$ : for  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{T}^t I(\mathbf{f}) = I(\mathcal{T}^t \mathbf{f}).$$

The Dirichlet form of the underlying process is given by

$$\mathbf{e}(f, f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{R \times R} (f(x) - f(y))^2 \ell(t, dx dy).$$

if the limit exists where  $\ell(t, dx dy) = \lambda(dx)p(t, x, dy) = \lambda(dy)p(t, y, dx)$  and  $p(t, x, dy)$  is the transition probability.

**Theorem 3.** (Contraction Principle). Let  $\rho$  be a nonnegative Radon measure on the base space  $R$ . Then,

$$\inf \left\{ \mathcal{E}(\Phi, \Phi) \mid \Phi \in \text{Dom}(\mathcal{E}), \|\Phi\| = 1, \Phi \geq 0, \int_{Q(R)} \pi_\lambda(d\xi) \Phi(\xi)^2 \xi = \rho \right\} = \mathbf{e}(1 - \phi, 1 - \phi)$$

if  $\rho$  is mutually absolutely continuous with respect to  $\lambda$  and its half density (i.e., the square root of the Radon-Nykodim density) is  $\phi = \sqrt{\frac{d\rho}{d\lambda}}$ . Here, the value of  $\mathbf{e}(1 - \phi, 1 - \phi)$  may be infinite.

One of the crucial keys to the proof is the following. Let  $\mathbf{f}^x$  be the function obtained from a function  $\mathbf{f}$  on  $\bigcup R^n$  by inserting  $x \in R$  in the first coordinate.

**Theorem 4.** The Dirichlet form  $\mathcal{E}$  of the equilibrium process is given by

$$\mathcal{E}(I(\mathbf{f}), I(\mathbf{f})) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{R \times R} \|\mathbf{f}^x - \mathbf{f}^y\|_{\mathcal{F}}^2 \ell(t, dx dy).$$

**Theorem 5.** Let  $\mu$  be a probability measure on  $Q(R)$  which is absolutely continuous with respect to the Poisson measure  $\pi_\lambda$  and  $I(\mathbf{f})$  be the half density of  $\mu$  with respect to  $\pi_\lambda$ . Then  $\mu$  admits a Radon measure  $\rho$  as its intensity if and only if (a)  $\rho$  is absolutely continuous with respect to  $\lambda$ , (b)  $\mathbf{f}^x \in \mathcal{F}$   $\lambda$ -a.e. $x$  and  $\|\mathbf{f}^x\|_{\mathcal{F}}$  belongs to  $L_{loc}^2(R, \lambda)$  as a function of  $x$  and (c) the half density of  $\rho$  w.r.t.  $\lambda$  is given by

$$\phi(x) = \|\mathbf{f} + \mathbf{f}^x\|_{\mathcal{F}}$$

Now the electrostatic capacity admits three variational formulas:

- (a)  $\text{cap}(K) = \inf\{\mathbf{e}(f, f) : f \geq 1 \text{ on } K\}$ .
- (b)  $1/\text{cap}(K) = \inf\{\langle G\mu, \mu \rangle : \mu(K) = 1\}$  (Gauss).
- (c)  $\text{cap}(K) = \inf\{\mathbf{e}(1 - \phi, 1 - \phi) - \int_K \phi(x)^2 dx\}$  (LDP).

The relationship among them can be clarified by a theorem " $\alpha\beta = 1$ " by T.Shirai and the author.

## 福山-高橋の間隙条件の最良性を示す反例 がみたす極限定理

高信 敏 (金沢大学理工研究域数物科学系)

$\{n_i\}_{i=1}^\infty$  を狭義単調増加な自然数列とすると、Lebesgue 確率空間上の確率変数列  $\{\sqrt{2} \cos 2\pi n_i t\}_{i=1}^\infty$  は正規直交系を成す。だから、実数列  $\{a_i\}_{i=1}^\infty$  with  $A_N := \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i^2} \nearrow \infty$  に対して、 $\{\frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^N a_i \cos 2\pi n_i t\}$  の分布  $\}_{N=1}^\infty$  は tight, 従って  $N \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^N a_i \cos 2\pi n_i t$  に対して何らかの極限定理が期待される。その中で、とくに中心極限定理

$$\frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^N a_i \cos 2\pi n_i t \text{ の分布} \rightarrow \text{標準正規分布} \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (1)$$

はどんな  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  に対して成り立つのであろうか？

これについては、次のような歴史がある。代表的なものを挙げると

- Kac [5] …… ‘ $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = \infty$ ’ + ‘ $a_n = 1 (\forall n)$ ’.
- Salem-Zygmund [6] …… ‘ $\frac{n_{i+1}}{n_i} > q (1 < q < \infty)$ ’ + ‘ $a_n = o(A_n)$ ’. これは明らかに上の条件の拡張である。これを **Hadarnard の間隙条件** という注1.
- Erdős [2] …… ‘ $\frac{n_{i+1}}{n_i} > 1 + \frac{c_i}{\sqrt{i}}$  &  $c_i \rightarrow \infty$ ’ + ‘ $a_n = 1 (\forall n)$ ’.
- 高橋 [7] …… ‘ $\frac{n_{i+1}}{n_i} > 1 + \frac{c_i}{\sqrt{i}}$  &  $c_i \rightarrow \infty$ ’ + ‘ $a_n = O(\frac{A_n}{\sqrt{n}})$ ’. この条件は明らかに上の Erdős の条件を良くしている。当講演ではこれを **Erdős の間隙条件** とよぶことにする。一般に Erdős の間隙条件は Hadarnard の間隙条件を含むとは限らないことに注意.
- 高橋 [8] …… ‘ $\frac{n_{i+1}}{n_i} > 1 + \frac{c}{i^\alpha} (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, c > 0)$ ’ + ‘ $a_n = o(\frac{A_n}{n^\alpha})$ ’. これを **高橋の間隙条件** という。  $\alpha = 0$  のときは明らかに Hadarnard の間隙条件であることに注意。一般に Erdős と高橋の間隙条件の間には implication はない。だから、それぞれは独立したものである.
- 福山-高橋 [4] …… ‘ $\exists \{\lambda(i)\}_{i=1}^\infty$ : 正数列 s.t.  $\lambda(i) > \lambda$  for some  $\lambda > 0, \lambda(i+1) - \lambda(i) = o(1), \frac{n_{i+1}}{n_i} > 1 + \frac{c}{\lambda(i)}$  for some  $c > 0, a_n = o(\frac{A_n}{\lambda(n)})$ ’, また ‘ $\exists \{\Lambda(i)\}_{i=1}^\infty$ : 正数列 s.t.  $\Lambda(i) \rightarrow \infty, \Lambda(i+1) - \Lambda(i) = O(1), \frac{n_{i+1}}{n_i} > 1 + \frac{c_i}{\Lambda(i)}$  &  $c_i \rightarrow \infty, a_n = O(\frac{A_n}{\Lambda(n)})$ ’. 前者は高橋タイプの間隙条件, 後者は Erdős タイプの間隙条件である.

ここで声を大にして云いたいことは、この2つの間隙条件が実は同等であること、即ち、与えられた  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  に対して、「 $\{\lambda(i)\}_{i=1}^\infty$  の存在性」と「 $\{\Lambda(i)\}_{i=1}^\infty$  の存在性」は同値であるということである。このことから、我々は同等な間隙条件を簡単に **福山-高橋の間隙条件** とよぶ。

今、上で挙げた間隙条件は (1) のための十分条件であるばかりか最良でもある:

- Erdős [2] は ‘ $a_n = 1 (\forall n)$ ’ のときに、 $0 < \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{i} (\frac{n_{i+1}}{n_i} - 1) < \infty$  で (1) が成立しない  $\{n_i\}$  が存在することを注意した。実際、彼は、具体的に

$$n_i := 2^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor + 1} + (i - \lfloor \sqrt{i} \rfloor^2) 2^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor + 1 - \lceil \log_2(2^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor + 1}) \rceil} \text{注2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

がそのようなものであると主張したが、その証明は与えなかった。これについては福山のノート [3] に書いてある。

- 高橋 [9] は、各  $c > 0, 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  に対して  $\frac{n_{i+1}}{n_i} \geq 1 + \frac{c}{i^\alpha}, A_N \sim \sqrt{\frac{\beta(\alpha)}{2}} N^\alpha, \#\{i; a_i = 1\} = \infty$  で (1) が成立しない  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  を構成した。ただし  $\beta(\alpha) = \frac{1}{c} (0 < \alpha < \frac{1}{2}), 2 \wedge (\frac{1}{c}) (\alpha = \frac{1}{2})$  である。

注1  $\lim_{i \rightarrow \infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty$  のとき、「 $\{n_i\}$  は間隙列である」という。間隙性を imply する条件を間隙条件とよぶ。

注2  $\lfloor \cdot \rfloor, \lceil \cdot \rceil$  はそれぞれ floor 関数, ceiling 関数である。

- 福山-高橋 [4] は, 正数列  $\{\lambda(i)\}_{i=1}^{\infty}$  が  $\lambda(i) \rightarrow \infty, \lambda(i+1) - \lambda(i) = o(1), \sum_i \frac{1}{\lambda(i)^2} = \infty$  をみたすとき,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(i) \left( \frac{n_{i+1}}{n_i} - 1 \right) = 1, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(i) \frac{a_i}{A_i} = 1$  で (1) が成立しない  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  を構成した. これは上の高橋の反例の一般化である.
- この3つの反例は, いずれも中心極限定理が成立しないことを主張するだけで, 代わりに極限定理については何も答えていないという弱みをもつ. この点を良くしたのが, Berkes [1] である. 彼は, ' $a_n = 1 (\forall n)$ ' のときに, 各  $A > 0$  に対して,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{i} \left( \frac{n_{i+1}}{n_i} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2A}}$  で

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^N \cos 2\pi n_i t \text{ の分布} \rightarrow \mu_{m_A, 0, \nu_A} \text{ as } N \rightarrow \infty$$

となる  $\{n_i\}$  を構成した. ただし  $\mu_{m_A, 0, \nu_A}$  については下の定理を参照.

我々は, Berkes に倣って次の結果を得た:

**定理 1.** 福山-高橋の構成した  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  に対して次の極限定理が成り立つ:

$$\frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^N a_i \cos 2\pi n_i t \text{ の分布} \rightarrow \mu_{m_{1/4}, 0, \nu_{1/4}} \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

ここで  $\mu_{m, \nu, \nu}$  は  $(m, \nu, \nu) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \{\text{Lévy 測度}\}$  に対して

$$\widehat{\mu_{m, \nu, \nu}}(\xi) = \exp \left\{ \sqrt{-1} m \xi - \frac{\nu \xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left( e^{\sqrt{-1} \xi t} - 1 - \frac{\sqrt{-1} \xi t}{1 + t^2} \right) \nu(dt) \right\}$$

となる無限分解可能分布を表わす. また,  $A > 0$  に対して, Lévy 測度  $\nu_A$  を

$$\nu_A(dt) := \frac{1}{A\pi} \left( \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t) \frac{F_+\left(\frac{t}{2\sqrt{A}}\right)}{t} + \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(t) \frac{F_-\left(\frac{|t|}{2\sqrt{A}}\right)}{|t|} \right) dt, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$m_A \in \mathbb{R}$  を

$$m_A := - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{t^3}{1 + t^2} \nu_A(dt)$$

とする. ただし  $F_{\pm}(t) := \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[t, \infty)}(\pm \frac{\sin x}{x}) dx, t > 0$ .

**注意 1.** 実は, 高橋が構成した  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  に対しても次の極限定理が成り立つ:

$$\frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^N a_i \cos 2\pi n_i t \text{ の分布} \rightarrow \mu_{m_{\beta(\alpha)}, 0, \nu_{\beta(\alpha)}} \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

講演では, 予稿で書けなかった福山-高橋の構成した  $\{n_i\}$  と  $\{a_i\}$  の定義を与える. そして, 定理 1 の証明のあらましを述べるつもりである.

## 参考文献

- [1] I. Berkes, Nongaussian limit distributions of lacunary trigonometric series, *Can. J. Math.* **43** (1991), 948–959.
- [2] P. Erdős, On trigonometric sums with gaps, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962), 37–42.
- [3] 福山克司, Lacunary Series, 集中講義ノート (九州大), 2002 年 7 月.
- [4] K. Fukuyama and S. Takahashi, The central limit theorem for lacunary series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 599–608.
- [5] M. Kac, Note on power series with big gaps, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 473–476.
- [6] R. Salem and A. Zygmund, On lacunary trigonometric series, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **33** (1947), 333–338.
- [7] S. Takahashi, On trigonometric series with gaps, *Tôhoku Math. J.* **17** (1965), 227–234.
- [8] ———, On lacunary trigonometric series, *Proc. Japan Acad.* **41** (1965), 503–506.
- [9] ———, On lacunary trigonometric series II, *Proc. Japan Acad.* **44** (1968), 766–770.