多種粒子系のスペクトルギャップ

白滝桂太郎

r 種類に色分けされた正方格子上の粒子達にそれぞれの飛躍率を設定し、互いに排他的な振る舞いをしている状況を考える。その時に流体力学極限の下で現れる極限の方程式を考える事が目標である。本発表では特に Current を Gradient で置き換える議論に於いて必要な Spectral Gap に焦点を絞ることにする。結果を述べるためにいくつか記号を定義する。

0.1 記号

$$\Omega_N := \{x \in \mathbf{N}^d : max_{1\le i\le d}|x_i| \le N\} \quad \partial\Omega_N := \Omega_N \setminus \Omega_{N-1}$$

$$\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r} := \{\eta \in \{1,\cdots,r\}^{\Omega_N} | \sum_{x\in\Omega_N} \eta_i(x) = K_i \ i = 1,\cdots,r\} \text{ 上の一様分布}$$

$$\mathcal{F}_N := \sigma(\eta(x), x \in \partial\Omega_N)$$

以下のことを示すことが目標となる。

結果 1 (Spectral Gap)

$\sum_{i=1}^{r} K_i \le N^d - 1$ を満たす $K_i,\ i = 1,\cdots,r$ に対して N, K_i に依存しない正定数 C が存在して

$Var(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}f) \le CN^2\mathcal{D}(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}, f)$ が任意の $f : \{1,\cdots,r\}^{\Omega_N} \to \mathbb{R}$ に対して成立する。

0.2 先行研究

Quastel[1] によって既に次のことが知られている。

結果 2 (Spectral Gap for The Diffusion of two Color)

$\sum_{i=1}^{r} K_i \le N^d(1-\delta)$ を満たす $K_i,\ i = 1,\cdots,r$ に対して

$$Var(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}f) \le C(\delta)N^2\mathcal{D}(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}, f)$$
$$for\ any\ \ f : \{1,\cdots,r\}^{\Omega_N} \to \mathbb{R}$$

(※ここで $C(\delta)$ は δ のみに依存した定数。因みに Quastel はこれを二種粒子系に対して示した。)

すなわち空間に volume order での空白の存在を仮定した時に関する Spectral Gap は既に知られている。

ここでは、ひとつの空白点の存在を仮定すれば十分であることを示す。議論の大筋は Kipnis - Landim[2] に依り、帰納法である。技術的には Ω_N を Ω_{N-1} と $\partial\Omega_N$ に分けて帰納法によりこの二つの領域間の粒子のやり取りを Dilichlet Form で評価することに帰着される。

式で書くと以下の通り：

$$Var(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}f) = E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[\{f - E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[f]\}^2]$$
$$E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[\{f - E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[f|\mathcal{F}_n]\}^2] + E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[\{E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[f|\mathcal{F}_n] - E_{N^d,K_1,\cdots,K_r}[f]\}^2]$$

ここで第一項は帰納法により $C(N-1)^2\mathcal{D}(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}, f)$ で評価できる。第二項を $CN\mathcal{D}(\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}, f)$ で評価する事が目標となる。

第二項を評価するにはよく知られた手法をもちいる。すなわち $x \in \Omega_{N-1}$ と $y \in \partial\Omega_N$ の粒子の交換を $O(N)$ のステップで実現することを考える。

0.3　アイデアと方針

空白がたった一つの場合、二つのサイト間の粒子の入れ替えを考えると粒子が r 種類ある事と粒子の挙動が排他的であるためにどうしても回りの様子を変えてしまう。いかにして配置 (configration) を変えずに入れ替えたい粒子達だけを動かすかが考えるべきことである。また二つのサイトのペア毎の入れ替えを考えると隣のサイトの状況を変えてしまうためにどうしても不具合が生じる。この為入れ替えたい粒子のサイトと隣のサイトを一度に考える必要がある。(詳しくは講演で話す事にします。)

0.4　Remark and Comment

Spectral Gap はミクロな視点での結果である。ミクロに空白がたった一つしかないという現象は一見マクロに空白が何もないというように感じる。しかし例えば初期分布を $\nu_{\rho_1,\cdots,\rho_r}, \sum_{i=1}^{r}\rho_i = 1$ となる多項分布と設定した時に粒子数で条件付けた条件付け確率測度は $\nu_{N^d,K_1,\cdots,K_r}$ で $\sum_{i=1}^{r} K_i = N^d$ となるものしか現れない。従って数学的には、ミクロに空白が存在するという状況はマクロにも空白が存在するということになる。このことから空白がたった一つの場合の Spectral Gap が主張できるということは自然であることも分かる。

参考文献

[1] J. Quastel: Diffusion of color in the cismple exclusion $Comm.Pure.Appl.Math., Vol.XLV, 623-679, 1992.$

[2] C.Kipnis -C.Landim: Scaling Limit of Interacting Perticle System, *Springer* 1999.

[3] T.Funaki:Private Communication.

[4] Y.Nagahata:Private Communication.

Heat kernel for random walk trace on $\mathbb{Z}^3$ and $\mathbb{Z}^4$

白石大典 (京都大学大学院理学研究科数学教室 M1)

2008 年 12 月 8 日

$\mathbb{Z}^d$ 上のシンプルランダムウォークの軌跡の上を動くシンプルランダムウォーク X を考える。本講演では $d=4$ のときの熱核と $\max_{1\le k\le n}|X_k|$ の quenched な評価、及び $d=3$ のときの熱核の quenched な upper bound について報告する。

1 モデル

・$S=(S_n)_{n\ge0}$: 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された、原点から出発する $\mathbb{Z}^d$ 上のシンプルランダムウォーク

・$\mathcal{G}(\omega)=\big(V(\mathcal{G}(\omega)),E(\mathcal{G}(\omega))\big)$: ランダムウォークの軌跡 i.e.,

$$V(\mathcal{G}(\omega))=\{S_n(\omega):n\ge0\}\qquad E(\mathcal{G}(\omega))=\big\{\{S_n(\omega),S_{n+1}(\omega)\}:n\ge0\big\}$$

・$X=\big((X_n)_{n\ge0},P_x^{\mathcal{G}(\omega)},x\in V(\mathcal{G}(\omega))\big)$: $\mathcal{G}(\omega)$ 上のシンプルランダムウォーク
X を定義するために第 2 の可測空間 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ を用意し、X を $\Omega\times\overline{\Omega}$ 上に定義する。$\overline{\Omega}$ の要素を $\overline{\omega}$ で表わす。すなわち、ω が媒質のランダムネスを表わし、$\overline{\omega}$ がランダムウォーク $X(\omega)$ のランダムネスを表わす。

・$\mu_{\mathcal{G}(\omega)}(x)$: $\mathcal{G}(\omega)$ における x の次数

・$d_{\mathcal{G}(\omega)}(\cdot,\cdot)$: $\mathcal{G}(\omega)$ における graph distance

・$h_n^{\mathcal{G}(\omega)}(x,y):=P_x^{\mathcal{G}(\omega)}(X_n=y)\frac{1}{\mu_{\mathcal{G}(\omega)}(y)}$: 熱核

2 結果

Theorem 1
$d=4,{}^{\exists}c>0$, 各 $\delta\in(0,1)$ に対して次が成立する。

$${}^{\exists}\Omega_1\subset\Omega,P(\Omega_1)=1\ s.t.{}^{\forall}\omega\in\Omega_1,{}^{\exists}N_1(\omega)<\infty$$

$$n^{-\frac12}(\log n)^{-\frac32-\delta}\le h_{2n}^{\mathcal{G}(\omega)}(0,0)\le cn^{-\frac12}(\log n)^{-\frac16}\qquad {}^{\forall}n\ge N_1(\omega)$$

Theorem 2
$d=4$, 各 $\delta\in(0,1)$ に対して次が成立する。

$${}^{\exists}\Omega_2\subset\Omega,P(\Omega_2)=1\ ,{}^{\forall}\omega\in\Omega_2\text{に対して}{}^{\exists}N_2(\omega,\overline{\omega}),P_0^{\mathcal{G}(\omega)}(N_2(\omega,\overline{\omega})<\infty)=1,s.t.$$

$$n^{-\frac14}(\log n)^{\frac{1}{24}-\delta}\le\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\le n^{-\frac14}(\log n)^{\frac{13}{12}+\delta}$$

$$for\ all\ \overline{\omega} \in \{N_2(\omega,\overline{\omega}) < \infty\}\ and\ n \geq N_2(\omega,\overline{\omega})$$

ここで $|\cdot|$ はユークリッド距離を表わすものとする。

$Theorem\ \ 3$

$d=3,{}^{\exists}a>0$ があって次が成立する。

$$^{\exists}\Omega_3 \subset \Omega, P(\Omega_3)=1\ ,\ s.t.\ ^{\forall}\omega \in \Omega_3\ ^{\exists}N_3(\omega) < \infty$$

$$h_{2n}^{\mathcal{G}(\omega)}(0,0) \leq n^{-\frac{10}{19}}(\log n)^a \qquad ^{\forall}n \geq N_3(\omega)$$

ランダムウォークの軌跡の上を動くランダムウォークについては、広い範囲のグラフで成り立つ結果が [1] において与えられている。そこでは、グラフ上で非再帰的なランダムウォークを考えて、その軌跡の上のシンプルランダムウォークが確率 1 で再帰的になることを証明している。

その後 [2] において $\mathbb{Z}^d$ 上のシンプルランダムウォークの軌跡の上を動くシンプルランダムウォークの研究がなされた。そこでは $d \geq 5$ のときの熱核の quenched な評価と X の scaling limit がブラウン運動になることを示している。しかし [2] での $d=4$ の結果は熱核の annealed な結果にとどまっている。

今回の研究で、$d=4$ での quenched な結果が得られたということ、さらに $d=3$ での（sharp ではないが）quenched な upper bound の leading order が真に $\frac{1}{2}$ からずれているという結果が得られたということが、新しいことである。これによりこのモデルの臨界次元が 4 であるということが quenched level で分かったことになる。ちなみに $d=3$ の熱核の評価に関してシミュレーションの結果が [3] にある。今回の結果の証明の中で cut time、loop-erased random walk に関する評価を与え、それを用いている。これらの評価の中にも新しいものがいくつかあり、それ自身興味ある結果ではないかと考えている。

参考文献

[1] I. Benjamini ; O. Gurel-Gurevich ; R. Lyons, Recurrence of random walk traces. Ann. Probab. 35 (2007), no. 2, 732–738.

[2] A. D. Croydon, Random walk on the range of random walk. (2008). preprint.

[3] S. Havlin; G. H. Weiss; D. Ben-Avraham; and D. Movshovitz, Structure of clusters generated by random walks, J. Phys. A 17 (1984), L849-L853.

[4] G. F. Lawler, Intersections of random walks. Probability and its Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.

[5] D. Shiraishi, Heat kernel for random walk trace on $\mathbb{Z}^3$ and $\mathbb{Z}^4$, in preparation.