

モース関数の特異ファイバーと曲面束の特性類

佐伯 修*

(九州大学大学院数理学研究院)

1 はじめに

本稿の内容は、北海道大学大学院理学研究科の山本卓宏（やまもと たかひろ）氏との共同研究です。また、第6節については、北海道大学大学院理学研究科の大本亨氏も込めた3人での共同研究です。

2005年9月6日の研究集会当日は台風14号が九州地方を襲い、航空機が全便欠航となってしまったため、やむなく講演をキャンセルさせていただきました。関係者の方々には多大なるご迷惑をおかけしてしまい、誠に申し訳ございませんでした。この場を借りて深くお詫び申し上げます。

そのお詫びの気持ちも込めて、この原稿を書かせていただきます。

なお、講演用のOHPシートは既に作ってありました。このまま誰にも見られずに闇に葬り去られてしまうのもかわいそうだと思い、勝手ながら私のホームページに置かせていただきました (<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/res.html> の「まぼろしの講演」を参照して下さい)。ご興味がおありの方はご覧いただければ幸いです。

あともう一つお詫びがあります。本稿では「モース関数」という言葉で、 C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数であって、すべての臨界点が非退化であり、臨界点での値はすべて異なるもの、を表すことにします。そうすると、本稿の表題にあります「モース関数」とは実は意味が異なります。ですので本来、集会での講演タイトルは「ジェネリックな関数の特異ファイバーと曲面束の特性類」などとすべきでした。軽率なタイトルを付けてしまったことをお詫び致します。

なお、本稿においては多様体はすべて C^∞ 級であり、その間の写像はすべて C^∞ 級であると仮定します。つまり（特別な場合を除いて） C^∞ 級カテゴリーで話を進めることにします。

本稿と深く関連するものに[21]があります¹。そちらも合わせて参照していただけると理解が深まると思います。

*e-mail: saeki@math.kyushu-u.ac.jp, home page: <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki>

¹これは佐伯のホームページからも入手できます。

2 S^1 束

では内容の説明に入ります。本稿では、閉曲面をファイバーとする曲面束の特性類が、全空間上のジェネリックな関数を取ったときに、それを各ファイバーに制限して得られる関数の特異点の情報から得られる、という話をしたいと思います。そのためにまず、ファイバーが円周である S^1 束について知られている結果の復習から始めましょう。なお、この節の内容については Kazarian の論文 [11, 12, 13] をご参照下さい。

まず $\pi: E \rightarrow B$ を向き付けられた C^∞ 級 S^1 -束とします²（したがって特に B は C^∞ 級多様体です）。このとき、 C^∞ 級関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ をジェネリック（正確な定義は述べません）に取ります。底空間 B の点 y に対し、 f を y 上のファイバーに制限して得られる関数

$$f|_{\pi^{-1}(y)}: \pi^{-1}(y) \cong S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

を簡単のため f_y と表すことにします。これにより、全空間 E 上の関数 f は、 $y \in B$ でパラメータづけられた関数族ともみなすことができます。

なお、 B が正の次元を持っているときは、仮りに f が十分にジェネリックでも、各 f_y はモース関数³であるとは限らないことに注意して下さい。そこで、

$$\Sigma(f) = \{y \in B \mid f_y \text{ はモース関数ではない}\}$$

と置いて、これを f の**分岐図式**(bifurcation diagram) と呼びます。

たとえば B が曲面のときには、 $\Sigma(f)$ の局所的な形として、図 1 のようなものが現れます（これすべてを尽くしているわけではありません。図 1 にあるのは単なる例です）。（ $\Sigma(f)$ 以外の絵 ($\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(11)(11)}$ 等) は、その近くの $\Sigma(f)$ の点に対応する S^1 上の関数を説明するためのものです。）

S^1 束の特性類を得るために、 S^1 上の C^∞ 級関数 $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ について、次のような性質 (*) を考えます。

(*) g は最大値を取る点をちょうど 2 つ、最小値を取る点もちょうど 2 つ持ち、それらは非退化臨界点で、しかも S^1 上で「互い違いに」並んでいる⁴。

そして、

$$\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f) = \{y \in \Sigma(f) \mid f_y \text{ は性質 (*) を満たす}\}$$

と定義します。すると、底空間の曲面 B が向き付けられているときは、上で定義した $\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f)$ の各点に、符号 ($= \pm 1$) が定義できることがわかります。

このとき、次が成り立つことが知られています。

² C^∞ 級のファイバー束が向き付けられているとは、各ファイバーが矛盾なく向き付けられているときを言います。

³第 1 節でも述べたように、 C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数が**モース関数**であるとは、すべての臨界点が非退化で、かつ臨界点での値がすべて異なるときを言います。たとえば [15] 等を参照して下さい。

⁴つまり、 S^1 をある向きに従ってたどってゆくと、最大値、最小値、最大値、最小値、という順番で点を通ることになる、ということ。

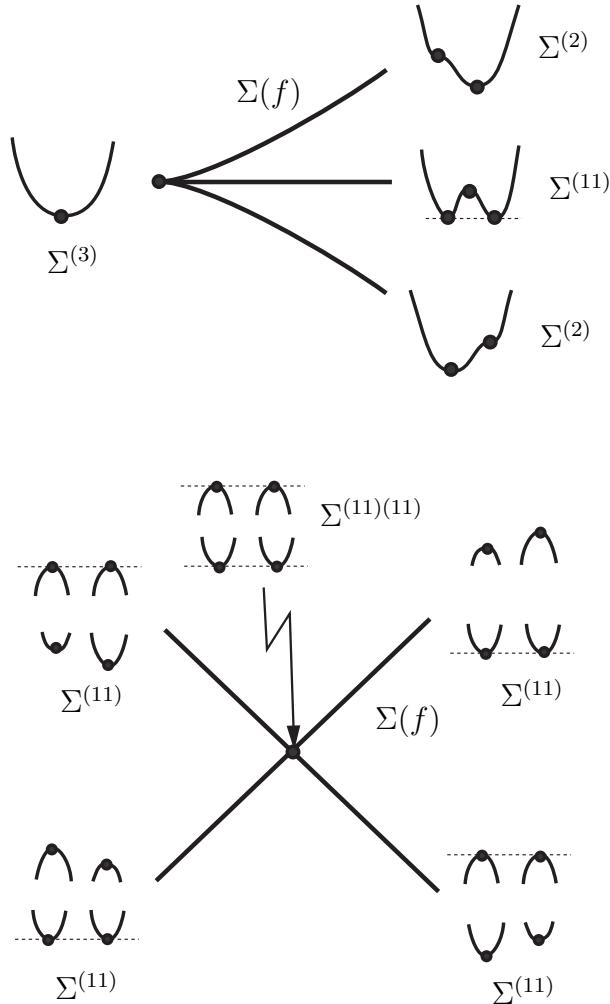


図 1: 曲面上の S^1 束に現れる分岐図式の例

定理 2.1 (Kazarian [11, 12, 13]) 向き付けられた閉曲面上の、向き付けられた C^∞ 級 S^1 束のオイラー数⁵は、 $\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f)$ の点の符号の総和に等しい。

B の部分集合としての $\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f)$ は、ジェネリックな関数 f の選び方によって変わりますが、その符号和は f によらない、ということになります。

なお B が一般次元の多様体でも、同様の主張が成り立つことが知られています。またオイラー類 $e \in H^2(B; \mathbb{Z})$ に対し、 e^n ($n \in \mathbb{N}$) を与える公式（漸化式）も知られています。

では曲面束のときには似たことが成り立つのでしょうか？それが本稿の主題です。

⁵ S^1 束のオイラー類を $e \in H^2(B; \mathbb{Z})$ としたとき、クロネッカーリング $\langle e, [B] \rangle \in \mathbb{Z}$ のことを S^1 束のオイラー数といいます。ここで $[B] \in H_2(B; \mathbb{Z})$ は B の基本類です。

3 曲面束

慣例に従って, Σ_g を種数 g ($g \geq 0$) の向き付け可能な閉曲面とします. そして, $\pi : E \rightarrow B$ を C^∞ 級の Σ_g 束で, 向き付けられているものとします. 前節と同様に, ジェネリックな C^∞ 級関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ を取り,

$$\Sigma(f) = \{y \in B \mid f_y \text{ はモース関数ではない}\}$$

と置きます (ここで $y \in B$ に対して, f_y は f の, ファイバー $\pi^{-1}(y)$ への制限です).

底空間 B が曲面のとき, $\Sigma(f)$ の局所的な形は図 2 のいずれかであることが知られています. (左に並んでいる絵が $\Sigma(f)$ の形を表し, その右の絵は対応する Σ_g 上の関数を記述しています. 臨界点の指数は一般には図とは異なります. 図では一例を示しているに過ぎません. また, カスプとは, 生成消滅臨界点 (birth-death critical point) に対応します. さらに一番下の絵では, 一組の臨界点での値が一致する代わりにカスプが対応するものもあります (一番上の絵の場合に相当します) ので, 本当は合計で 3 通りの場合があります.)

そこで,

$$\Sigma^T(f) = \{y \in \Sigma(f) \mid f_y \text{ の各臨界点は非退化で, } f_y \text{ は}$$

図 3 の形の特異ファイバーをちょうど一つ持つ\}

と置きます. この特異ファイバーについては図 4 も参照して下さい. なお, ここで言う「特異ファイバー」とは, 臨界値の逆像 (あるいはその連結成分) と理解して下さい. 図 3 の形の特異ファイバーは臨界点をちょうど 3 つ含んでおり, それらはすべて指数 1 の非退化臨界点です.

以下, B は向き付けられた曲面とします. このとき, $\Sigma^T(f)$ の各点 y に次のような符号 $\text{sign}(y) = \pm 1$ が定義できます.

まず, $c \in \mathbb{R}$ を図 3 の特異ファイバーに対応する臨界値とします. 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, $f^{-1}(c - \varepsilon)$ の連結成分数と, $f^{-1}(c + \varepsilon)$ の連結成分数を比べたとき, 前者の方が大きいならば \mathbb{R} には通常の向きを入れ, そうでないなら通常とは逆の向きを入れることにします.

次に, 上で定めた \mathbb{R} の向きと $\pi^{-1}(y) \cong \Sigma_g$ の向きを使って, $f_y^{-1}(c)$ の非特異部分に向きが入ります. (たとえば, $f_y^{-1}(c)$ の向きに, \mathbb{R} の向きを並べたものがファイバーの Σ_g の向きに一致するようにすれば OK です.) するとその向きにより, $f_y^{-1}(c)$ に含まれる 3 つの臨界点 (それらを p_1, p_2, p_3 としましょう) に, 図 5 のように, 自然に円順列が定まることがわかります (図の場合は, p_1, p_2, p_3 の順です).

一方, $\Sigma(f)$ は点 y の近くで 3 本の線分が一点 y で交わっているような形をしています (図 2 の上から 3 番目の図で, 臨界点の指数をすべて 1 にしたものに相当します). そして各臨界点 p_i は, このうちの 1 本に対応します (たとえば, p_1 は, 点 p_2 と点 p_3 に対応する臨界点での値が一致してしまうような関数に対応する底空間の点の集まり, に対応します).

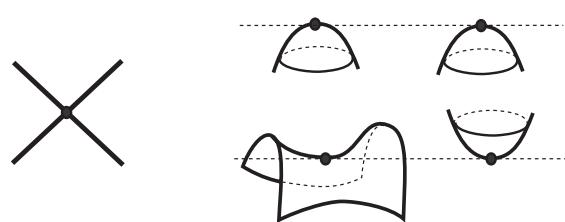
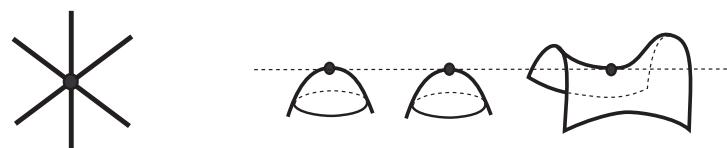
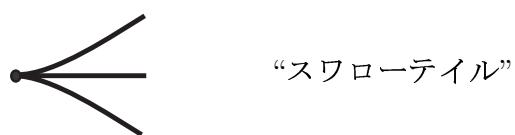
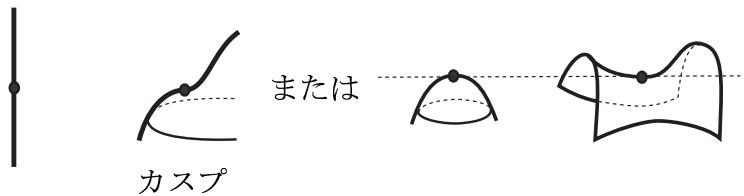


図 2: 曲面上の Σ_g 束に現れる分岐図式の形

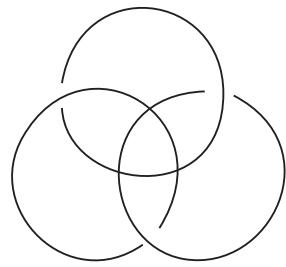


図 3: $\Sigma^T(f)$ の定義に登場する, Σ_g 上の関数の特異ファイバー

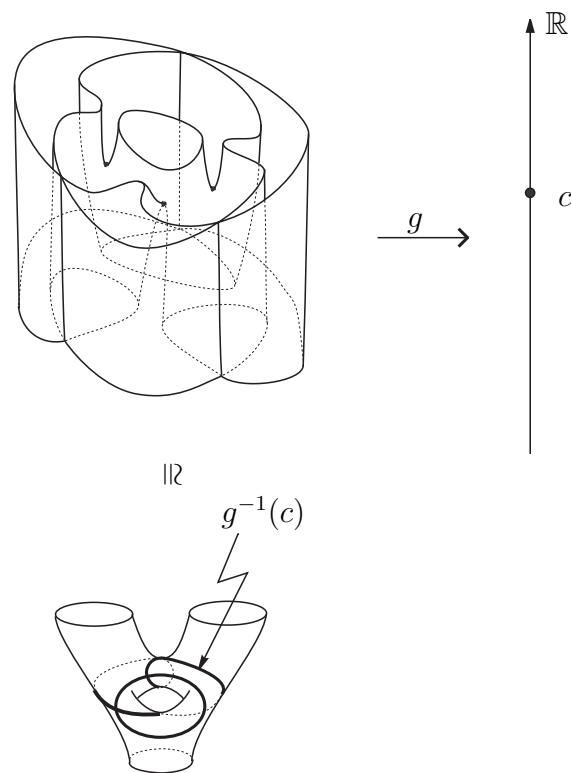


図 4: 図 3 の特異ファイバーの近傍

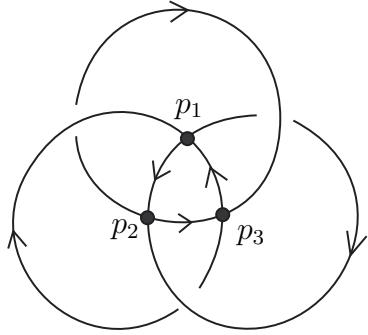


図 5: 3つの臨界点の円順列

すると、3本の線分が交わっている点のまわりを、先の円順列の向きにまわることにより、点 y の近くで B の向きが定まります。ところで B はもともと向き付けられていたので、このような手続きで得られた向きがもともとの B の向きと一致していれば $\text{sign}(y) = +1$ 、そうでなければ $\text{sign}(y) = -1$ と定めることにします。

この定義が well-defined であり、次の性質を満たすことが容易に確かめられます。

1. Σ_g ファイバーの向きを逆にすると、符号は -1 倍される。
2. B の向きを逆にしても、符号は -1 倍される。

このとき、次のことを証明できます。

定理 3.1 向き付けられた閉曲面 B 上の向き付けられた C^∞ 級 Σ_g 束 π に対し、

$$\langle e_1(\pi), [B] \rangle \in \mathbb{Z}$$

は、 $\Sigma^T(f)$ の点の符号の総和の 3 倍に等しい。ここで、 $e_1(\pi) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ は、曲面束 π の第 1 Mumford-Morita-Miller 類を表し、 $[B] \in H_2(B; \mathbb{Z})$ は B の基本類を表す。

念のため、 $e_1(\pi)$ 、より一般に $e_i(\pi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ ($i \geq 0$) の定義を復習しておきましょう。上のような曲面束 $\pi : E \rightarrow B$ に対し、 ξ を E の接束の 2 次元部分束で、 π のファイバーに接するベクトル全体からなるものとします。これは自然に向き付けられた、2 次元ベクトル束となるので、オイラー類 $e \in H^2(E; \mathbb{Z})$ が定まります。そこで

$$e_i(\pi) = \pi_!(e^{i+1}) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$$

と定め、これを曲面束 π の**第 i Mumford-Morita-Miller 類**と呼びます（たとえば [16] 参照）。ここで、

$$\pi_! : H^{2i+2}(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2i}(B; \mathbb{Z})$$

は、 π の誘導する Gysin 準同型写像です。 $e_i(\pi)$ は向き付けられた Σ_g 束の特性類となる（すなわち、束写像に対する自然性が成立する）ことが容易にわかります。

4 定理 3.1 の証明

$\pi : E \rightarrow B$ を、向き付けられた閉曲面 B 上の、向き付けられた Σ_g 束とし、 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ をジェネリックな C^∞ 級関数とします。このとき、

$$F = (\pi, f) : E \rightarrow B \times \mathbb{R} \quad (4.1)$$

を考えると、これは C^∞ 級写像であって、さらにいわゆる **安定写像**(stable map) となることがわかります⁶。

安定写像に対しては次が知られていました。

定理 4.1 (佐伯-山本 [20]) M を向き付けられた 4 次元閉多様体、 N を 3 次元多様体とし、 $F : M \rightarrow N$ を安定写像とする。このとき図 3 の形の特異ファイバーに符号 ($= \pm 1$) が定義でき、その符号の総和は M の符号数 (signature) $\text{sign}(M)$ に等しい。

一方、(4.1) の F の図 3 型の特異ファイバーは、符号も込めて、 $\Sigma^T(f)$ の点と一対一に対応することがわかります。

さらに、

$$\langle e_1(\pi), [B] \rangle = 3 \text{sign}(E)$$

となることが知られていました（たとえば [16] を参照）。

以上のことと組み合わせると、定理 3.1 が容易に従います。

では次に、底空間 B が必ずしも曲面とは限らない、一般次元の多様体の場合を考えてみましょう。 $\pi : E \rightarrow B$ を C^∞ 級で向き付けられた Σ_g 束とします（特に B は C^∞ 級の多様体とします）。以前と同様に $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ を十分にジェネリックな関数とすると、 $\Sigma^T(f)$ は B の余次元 2 の正則部分多様体⁷となることがわかります。しかも、 $\Sigma^T(f) \subset B$ の法束には、次のように自然に向きを入れることができることもわかります⁸。

部分多様体 $\Sigma^T(f)$ の管状近傍を $\Sigma^T(f)$ 上の 2 次元円板束と見たときの一つのファイバーを Δ とします。すると、

$$\pi|_{\pi^{-1}(\Delta)} : \pi^{-1}(\Delta) \rightarrow \Delta$$

⁶ 安定写像についてはたとえば [5, 8, 9, 17] 等を参照して下さい。

⁷ これは必ずしも閉部分多様体とは限りませんので注意が必要です。

⁸ このように、部分多様体に対してその法束に向きが定まっているとき、その部分多様体は **co-oriented** である、と言うこともあります。

は向き付けられた Σ_g 束です。しかも Δ の中心 $\Delta \cap \Sigma^T(f)$ 上に、図 3 型の特異ファイバーが乗っかっていることがわかります。そこで、そのファイバーの符号が +1 となるように Δ に向きを入れることができます。これにより円板束に、したがって $\Sigma^T(f)$ の法束に向きが自然に定まることになります。

すると、次のことを証明することができます。

定理 4.2 $\pi : E \rightarrow B$ を C^∞ 級の向き付けられた Σ_g 束とする。するとジェネリックな C^∞ 級関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $\Sigma^T(f)$ の閉包 $\overline{\Sigma^T(f)}$ は、 B 内の (closed support の) co-oriented なサイクルをなし、それが表すホモロジー類のポアンカレ双対

$$[\overline{\Sigma^T(f)}]^* \in H^2(B; \mathbb{Z})$$

(これは、 $\overline{\Sigma^T(f)}$ との交点数を取ることによって定まるコホモロジー類と同じことである) に対して、

$$3[\overline{\Sigma^T(f)}]^* = e_1(\pi) \in H^2(B; \mathbb{Z})$$

が、torsion を法として成り立つ。

5 一般論 I

上のようにして、 S^1 束や Σ_g 束の特性類を、全空間上のジェネリックな関数の特異点の情報を用いて記述できたわけですが、 $\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f)$ にしても $\Sigma^T(f)$ にしても、その定義を天下り的に与えてしまったので、どうも狐につままれたような印象をお持ちの読者も多いことかと思います。そこでここでは、こうした $\Sigma_{\text{extr}}^{(11)(11)}(f)$ や $\Sigma^T(f)$ のようなものをいかにして見つけたら良いか、ということについて少し説明したいと思います。

まず M を C^∞ 級多様体とし、 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ で、 M 上の実数値 C^∞ 級関数全体のなす空間を表すことにします⁹。今、

$$\mathcal{G} \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$$

を、ジェネリックな関数のなす部分空間とします¹⁰。そして、 \mathcal{G} の元に対するある「同値関係」を用意します（たとえば、「同じ特異ファイバーを持つ」といった、幾何学的に意味のある同値関係を用いるのが普通です）。

次に $\pi : E \rightarrow B$ を C^∞ 級の M 束とします。 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ をジェネリックな C^∞ 級関数とすると、各 $y \in B$ に対して $f_y = f|_{\pi^{-1}(y)}$ が（ある意味で） \mathcal{G} の元とみなせることができます。そこで、 \mathcal{G} の各同値類 α に対して、

$$\alpha(f) = \{y \in B \mid f_y \in \alpha\}$$

⁹この空間にはいわゆるホイットニー C^∞ 位相を入れて位相空間と普通はみなします。詳しくは [5, 8, 9, 17] 等を参照して下さい。

¹⁰通常は、 \mathcal{G} が $C^\infty(M, \mathbb{R})$ の中で稠密、あるいは開かつ稠密であることだけではなく、補空間が「無限余次元」を持つことをも要請します。

と置きます。すると、「良い同値関係」を選んでおけば、 $\alpha(f)$ が B の（必ずしも連結とは限らない）正則部分多様体となり、しかもその余次元が一定であることがわかります。この余次元は π や f の取り方によらないこともわかるので、これを α の **余次元** と呼んで、 $\kappa(\alpha)$ と書くことにします。

こうして、底空間 B が $\alpha(f)$ によって分割 (stratify) されることがわかります。

では、これらを用いてコチェイン複体を構成しましょう。 κ 次元のコチェイン群 C^κ としては、余次元 κ の同値類全体で張られる（形式的）な \mathbb{Z}_2 ベクトル空間を考えます。

次に、 $\kappa(\alpha) + 1 = \kappa(\beta)$ なる同値類 α, β に対して、その **結合係数** $[\alpha : \beta] \in \mathbb{Z}_2$ を、 $\beta(f)$ に隣接する $\alpha(f)$ の“枚数”の 2 を法とした剰余類として定義します。（正確な定義についてはたとえば [19] を参照して下さい。）この結合係数も π や f の取り方によらず定まります。そして線形写像 $\delta : C^\kappa \rightarrow C^{\kappa+1}$ を、

$$\delta(\alpha) = \sum_{\kappa(\beta)=\kappa+1} [\alpha : \beta] \beta$$

となるように定めます。

すると $\delta \circ \delta = 0$ となることが確かめられるので、こうしてコチェイン複体

$$C^* : 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \dots$$

が構成されました。このようにして得られたコチェイン複体のことを、ここでは **普遍複体** と呼ぶことにします。

なお、これは Vassiliev[22] や Kazarian[10, 11] が考えたものの単純な一般化に相当します（大本 [18] も参照して下さい）。

いずれにせよ、こうしてコチェイン複体が得られましたので、そのコホモロジー群 H^* を考えることができます。ではその幾何学的意味はいったい何なのでしょうか？

それにお答えするために、まず $c \in C^\kappa$ を κ 次元のコチェインとします。これは

$$c = \sum_{\kappa(\alpha)=\kappa} n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_2)$$

という形をしています。そこで、 C^∞ 級 M 束 $\pi : E \rightarrow B$ とジェネリックな関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$c(f) = \{y \in B \mid f_y \in \alpha, n_\alpha \neq 0\}$$

と置きます（ここで、これまでと同様、 $f_y = f|_{\pi^{-1}(y)}$ です）。これは B の、余次元が κ の正則部分多様体の和集合となります。

このとき次が示せます。

補題 5.1 (1) $c \in C^\kappa$ がコサイクル (すなわち $\delta(c) = 0$) であるならば, $c(f)$ の閉包 $\overline{c(f)}$ は B の余次元 κ の \mathbb{Z}_2 サイクルとなる.

(2) $\overline{c(f)}$ の表すホモロジー類 $[\overline{c(f)}]_2 \in H_{\dim B-\kappa}(B; \mathbb{Z}_2)$ は, コホモロジー類 $[c] \in H^*$ のみによる.

上の補題により, $[c] \in H^*$ に対して, ホモロジー類 $[\overline{c(f)}]_2$ のポアンカレ双対 $[\overline{c(f)}]_2^* \in H^\kappa(B; \mathbb{Z}_2)$ が well-defined となります.

さらに次のことがわかります.

補題 5.2 (1) [束の同型類のみによること] $[\overline{c(f)}]_2^* \in H^\kappa(B; \mathbb{Z}_2)$ はジェネリックな関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ の選び方にはよらず, M 束 π の同型類のみによる. そこでこれを $[c](\pi)$ と書くことにする.

(2) [束写像に関する自然性] $\pi_i : E_i \rightarrow B_i$ ($i = 0, 1$) を二つの C^∞ 級 M 束とし, $\Phi : E_0 \rightarrow E_1$ を束写像とする (すなわち, Φ は C^∞ 級写像であって, ある C^∞ 級写像 $\varphi : B_0 \rightarrow B_1$ で, 図式

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\Phi} & E_1 \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B_0 & \xrightarrow{\varphi} & B_1 \end{array}$$

を可換にするものがあり, 任意の $y \in B_0$ に対して,

$$\Phi|_{\pi_0^{-1}(y)} : \pi_0^{-1}(y) \rightarrow \pi_1^{-1}(\varphi(y))$$

は微分同相写像である). このとき, $\varphi^* : H^\kappa(B_1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^\kappa(B_0; \mathbb{Z}_2)$ に対して

$$[c](\pi_0) = \varphi^*([c](\pi_1))$$

が成り立つ.

上の補題は要するに, 普遍複体のコホモジ一群 H^* の元が, M 束の特性類を誘導することを言っています.

注意 5.3 M や $\mathcal{G}(\subset C^\infty(M, \mathbb{R}))$, あるいは \mathcal{G} に入る同値関係によっては, $\alpha(f)$ の法束に向きが自然に付けられることがあります. そのような向きが付けられるもの (すなわち, co-orientable なもの) だけを用いれば, 上の議論はすべて \mathbb{Z} 係数でできることもわかっています.

上の理論を, 曲面束の場合に具体的に見てみましょう. そのため, $M = \Sigma_g$ とし, $\mathcal{G} \subset C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R})$ をジェネリックな関数の全体とします. そして, $f, h \in \mathcal{G}$ に対してそれらが次の条件を満たすときに同値であると定義します.

1. $\{f_t\}_{t \in D^k}$ を, $f = f_0$ なるジェネリックな関数族, $\{h_s\}_{s \in D^\ell}$ を, $h = h_0$ なるジェネリックな関数族¹¹としたとき, $k = \ell$ である.
2. $F : \Sigma_g \times D^k \rightarrow \mathbb{R} \times D^k$ を, $F(x, t) = (f_t(x), t)$ で, $H : \Sigma_g \times D^\ell \rightarrow \mathbb{R} \times D^\ell$ を, $H(x, s) = (h_s(x), s)$ で定めたとき, F と H は $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上で「同じ特異ファイバー」¹²を持つ.

この状況で co-orientable なものを \mathbb{Z} 係数で考えると次がわかります.

命題 5.4 普遍複体のコホモロジ一群 H^* について, $H^1 = 0$ であり, H^2 は図 3 型のファイバーをちょうど一つ持つような関数の同値類の総和であるサイクル c の表すコホモロジー類 $[c]$ によって生成される無限巡回群である.

図 3 型の特異ファイバーはこうして見つかるわけです.

そして実際, $[c] \in H^2$ は, 第 1 Mumford-Morita-Miller 類の $1/3$ 倍を誘導するわけです.

注意 5.5 (脱線) ここで, 特異点と特性類の相性の良さについて少し触れておきたいと思います.

まず, 多様体上のベクトル場について, その特異点での指数の総和が多様体のオイラー数に一致する, という古典的なポアンカレ-ホップの定理を思い出して下さい. オイラー数というのは一種の特性類ですから, 特性類のルーツは特異点にあり, と言っても良いのではないでしょうか.

この例からもわかるように, 特異点解消のための障害類を考えると自然に特性類につながることが良くあります. 複素ベクトル束のチャーン類などもそうですね.

ところで, ベクトル束のオイラー類について考えてみましょう. これは零切断と一般の切断の交点数と考えることができます. これは切断を取るたびに決まるのですが, 一旦切断の取り方によらないことを示すと, あとはほぼ自動的に「自然性」が従います. つまり, 特性類になることが従うわけです.

これと似たことが, 我々の普遍複体のコホモロジー類から誘導される不変量についても言えます. $[\overline{c(f)}]^*_2$ というコホモロジー類は, ジェネリックな関数 f を取るたびに定義できるのですが, ひとたび f によらないことが示せると, すぐに自然性が従います. こうして特性類が誕生するわけです.

6 一般論 II

この節の内容は, 山本卓宏氏, 大本亨氏との共同研究です.

¹¹ ジェネリックな関数族とは, ここではいわゆる普遍開折 (universal unfolding, または versal unfolding) を意味します.

¹² 「同じ特異ファイバー」の正確な定式化については, たとえば [19, 21] 等を参照して下さい.

これまで一貫して、束の底空間 B は多様体としてきました。そうすることでの分岐集合が意味を持ち、特性類へつながったのでした。では多様体とは限らない、一般の空間のときにはどのように定式化したら良いのでしょうか？あるいは、こうした話の全体像をもう少し理解しやすい形で定式化できないものでしょうか？そのためには、たとえば分類空間を持ち出し、特性類の計算に役立てることが考えられます。

この節では厳密なことは抜きにして、そのような事柄を、アイデアとして大体どのように考えていったら良いかについて、簡単に記述してみたいと思います。

以下 M を C^∞ 級多様体とし、 $G = \text{Diff } M$ を、 M の自己微分同相写像全体のなす位相群とします（位相はホイットニー C^∞ 位相を入れます）。 $EG \rightarrow BG$ を普遍主 G 束とし、 EG には右から G が自由に作用しているものとします。

一方、 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ で M 上の C^∞ 級関数全体のなす空間を表し、これに次により G を左から作用させます。

$$G \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \ni (\varphi, f) \mapsto f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

そして、

$$BC^\infty(M, \mathbb{R}) = EG \times_G C^\infty(M, \mathbb{R})$$

と置きます（これは $EG \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ への G の対角線作用による軌道空間のことです）。すると自然な射影

$$BC^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow BG$$

が $C^\infty(M, \mathbb{R})$ をファイバーとするファイバー束となります。

注意 6.1 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ は可縮なので、 $BC^\infty(M, \mathbb{R})$ は BG とホモトピー同値になることに注意しましょう。

さて、 $\pi : E \rightarrow B$ を、 M をファイバーとし、 $G = \text{Diff } M$ を構造群とするファイバー束とします。 B は多様体とは限らず、一般の位相空間です。今、関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ が、 π の各ファイバー上で C^∞ 級であったと仮定します。すると、 f により次の図式を可換にする写像 $\tilde{b}_f : B \rightarrow BC^\infty(M, \mathbb{R})$ が誘導されることが確かめられます（ここで、 $b : B \rightarrow BG$ は、 π に対応する分類写像です）。

$$\begin{array}{ccc} & & BC^\infty(M, \mathbb{R}) \\ & \nearrow \tilde{b}_f & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & BG. \end{array}$$

より正確に言うと, $y \in B$ に対し,

$$f_y = f|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \cong M \rightarrow \mathbb{R}$$

を $C^\infty(M, \mathbb{R})$ の元とみなしたものを「対応」させる写像が \tilde{b}_f です.

注意 6.1 により $BG \simeq BC^\infty(M, \mathbb{R})$ であったので, 準同型写像

$$\tilde{b}_f^* : H^*(BC^\infty(M, \mathbb{R})) = H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$$

が誘導されます. $H^*(BG)$ は M 束の特性類の空間とみなせますから, 結局これにより M 束の特性類が, $H^*(BC^\infty(M, \mathbb{R}))$ から誘導されることがわかります.

ところで, 定義により

$$BC^\infty(M, \mathbb{R}) = EG \times_G C^\infty(M, \mathbb{R})$$

でした. これはある意味で, 分類空間 BG を, 関数空間 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ を用いて「膨らませた」空間です. そうすることのメリットは, 関数空間 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ の分割(stratification)が使えることです. 実際, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ の余次元が有限の strata からなる G 不変なサイクルの双対が, $H^*(BC^\infty(M, \mathbb{R}))$ の元を定めると言えるのです.

ではどうやってこうしたサイクルを探したら良いのでしょうか?

H^* を, 第 5 節の意味での普遍複体のコホモロジ一群とします. すると,

$$H^* \rightarrow H^*(BC^\infty(M, \mathbb{R}))$$

なる自然な準同型写像が構成できることがわかります. 実は, これが具体的な(コ)サイクルを探す, 一つの有効な手法を与えるのです.

注意 6.2 上の議論は, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ をすべて $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に置き換えて成り立つことに注意して下さい.

では具体的な例で上のことを見てみることにしましょう. $M = \Sigma_g$ と置き, これは向き付けられているものとします. $G = \text{Diff}^+ \Sigma_g$ を, Σ_g の向きを保つ自己微分同相全体のなす位相群とします. そして $C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) を考えてみることにしましょう. Σ_g 束の特性類を得るため,

$$\mathcal{E} = \{f \in C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n) \mid \text{ある } x \in \Sigma_g \text{ があって } df_x = 0 \text{ となる}\}$$

と置きます. (ここで df_x とは, C^∞ 級写像 $f : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}^n$ の点 x における微分 $df_x : T(\Sigma_g)_x \rightarrow T\mathbb{R}_{f(x)}^n$ のことで, $df_x = 0$ とはそれが零写像であることを意味します.) \mathcal{E} の $C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n)$ における余次元は $2n - 2$ に等しいことに注意して下さい. このとき次のことが(定義からほぼただちに) 成立します.

命題 6.3 (大本) $H^{2n-2}(BC^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) = H^{2n-2}(B\text{Diff}^+ \Sigma_g; \mathbb{Z})$ の同一視のもと, \mathcal{E} の双対コホモロジー類は, 第 $n - 1$ Mumford-Morita-Miller 類 e_{n-1} に一致する.

7 問題

最後にいくつかの未解決問題を挙げてこの稿の終わりとしたいと思います。

問題 7.1 向き付け不可能な曲面をファイバーとする曲面束の特性類の、特異点論的構成の具体例を与えるよ。

問題 7.2 ファイバー束ではなく（たとえばレフシェツト束のような）特異ファイバー束に対しても似たような議論は可能か？

問題 7.3 Igusa[6, 7], Klein[14] らによる higher Franz-Reidemeister torsion の理論や、Bismut, Lott, Goette[1, 2, 3, 4] らによる higher analytic torsion の理論（これらは M 束の特性類の理論である）との関係を明らかにせよ。

参考文献

- [1] J.-M. Bismut and S. Goette, *Families torsion and Morse functions*, Astérisque, No. 275, 2001.
- [2] J.-M. Bismut and J. Lott, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 291–363.
- [3] S. Goette, *Morse theory and higher torsion invariants I*, preprint, 2001, math.DG/0111222.
- [4] S. Goette, *Morse theory and higher torsion invariants II*, preprint, 2003, math.DG/0305287.
- [5] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [6] K. Igusa, *Higher Franz-Reidemeister torsion*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2002.
- [7] K. Igusa, *Axioms for higher torsion invariants of smooth bundles*, preprint, 2005, math.KT/0503250.
- [8] 泉屋周一, 石川剛郎『応用特異点論』共立出版, 1998.
- [9] 泉屋周一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩『幾何学と特異点』特異点の数理, 第1巻, 共立出版, 2001.

- [10] M. È. Kazaryan, *Hidden singularities and the Vasil'ev homology complex of singularity classes* (in Russian), Mat. Sb. **186** (1995), 119–128; English translation in Sb. Math. **186** (1995), 1811–1820.
- [11] M. È. Kazarian, *Singularities of functions on the circle and relative Morse theory*, preprint, Stockholm Univ., 1995.
- [12] M. E. Kazaryan, *Relative Morse theory of one-dimensional foliations, and cyclic homology* (in Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen **31** (1997), 20–31, 95; English translation in Funct. Anal. Appl. **31** (1997), 16–24.
- [13] M. E. Kazarian, *The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory*, Math. Scand. **82** (1998), 207–236.
- [14] J. Klein, *Higher Franz-Reidemeister torsion: low-dimensional applications*, Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991), pp. 195–204, Contemp. Math., 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [15] 松本幸夫『Morse 理論の基礎』岩波講座「現代数学の基礎」27巻, 岩波書店, 1997.
- [16] 森田茂之『特性類と幾何学』岩波講座, 現代数学の展開 7, 岩波書店, 1999.
- [17] 野口広, 福田拓生『初等カタストロフィー』共立出版, 1976 (復刊 2002年) .
- [18] T. Ohmoto, *Vassiliev complex for contact classes of real smooth map-germs*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. Math. Phys. Chem. **27** (1994), 1–12.
- [19] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [20] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, to appear in Geom. Topol. (available at <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/res.html>).
- [21] 佐伯修, 山本卓宏, *Theory of singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles* (in Japanese), リーマン面に関する位相幾何学 (2005年9月26日～9月29日, 東京大学大学院数理科学研究科) 予稿集, pp. 60–77.
- [22] V. A. Vassilyev, *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Translated from the Russian, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 3, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.