論　説

可微分写像の特異ファイバーのトポロジー

佐　伯　修

1　序

本稿で述べる結果の多くは [39, 40, 43, 44] に基づいている[1]．また，本論説は微分位相幾何学，特に可微分写像の特異点論に関わるものであり，多様体やその間の写像は C^∞ 級であるものとする．

1.1　背景

多様体間の可微分写像 $f : M \to N$ が与えられたとする．定義域多様体 M の点 x が**特異点**であるとは，そこでの f の微分写像 $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ (これは可微分写像 f の線形近似と考えられる) が全射でも単射でもないときをいう．微分写像が全射あるいは単射であれば，$x \in M$ や $f(x) \in N$ のまわりで適当に局所座標を取ることにより，写像 f は点 x のまわりで，ユークリッド空間の間の射影や包含写像とみなせることがわかる (本質的には陰関数の定理)．しかし，特異点のまわりではそのように写像の線形近似だけからは局所的な振る舞いを特定することは不可能である．なお，f の特異点全体の集合を $S(f)$ と書き，f の**特異点集合**と呼ぶ．

多様体が与えられたとき，その上の可微分写像の特異点が多様体の微分位相幾何学的性質と深く関わることは古くから知られている．卑近な例で言うと，たとえば 3 次元の物体を人間が目で見てその形を認識するためには輪郭が重要であるが，それは物体の表面から網膜への写像の特異点のなす集合 (あるいはその像) と理解できる．もう少し数学的な例で言えば，多様体上に Morse 関数が与えられると，その特異点 (あるいは臨界点[2]) からもとの多様体の位相幾何学的な情報が豊富に得られることが知られている[3]．

本論説では，単に写像の特異点だけではなく，特異点を含むファイバー (f による 1 点の逆像全体) も考えると，より多くの位相幾何学的情報が得られることを解説したい．

1.2　特異ファイバーとは

多様体間の可微分写像 $f : M \to N$ を引き続き考える．本稿では次元の差 $\dim N - \dim M$ を写像 f の**余次元**[4] と呼ぶことにする．余次元は整数であって，負にもなり得る．値域多様体 N の点 y に対して逆像 $f^{-1}(y)$ を考えると，f の余次元が 0 以上であればこれは一般に[5] 離散点からなる．ところが f の余次元が負のときは，逆像 $f^{-1}(y)$ は一般に正の次元を持った集合となる．本論説の表題にある**特異ファイバー**とは，この逆像に沿った写像芽

$$f : (M, f^{-1}(y)) \to (N, y) \tag{1.1}$$

のことを指す．写像芽の正確な定義は §3 で述べるが，要するに単に 1 点の逆像という集合だけを考えるのではなく，そのまわりでの写像の振る舞いも合わせて考える，ということである．

なお，写像による 1 点の逆像すべてを考えるのではなく，そこに含まれる特異点のみを考える研究はこれまでにあった．すなわち，**多重写像芽**

$$f : (M, f^{-1}(y) \cap S(f)) \to (N, y) \tag{1.2}$$

の研究である[6)]．特異ファイバーはこうした多重写像芽よりも多くの情報を含んでおり，実際そのことを示す具体的な結果も得られている[7)]．

1.3 何の役に立つのか

上で定義したように特異ファイバーは値域の点を指定するごとに定まる．したがって，与えられた写像に対して，値域の点がその上に乗っている特異ファイバーにより ‘色づけ’ され，それにより値域多様体に ‘模様’ が入ることになる．与えられた写像が一般的な場合，この ‘模様’ に現れる ‘パーツ’ のうち[8)] 特別な特異ファイバーに対応するもののみを考えると，値域多様体の部分集合ができてサイクルとなり (これを**幾何的サイクル**と呼ぶ) ホモロジー類を表すことがわかる．このホモロジー類の Poincaré 双対として現れるコホモロジー類が，定義域多様体や与えられた写像の位相的情報を持っていると期待される (§4 参照)．

もう少し詳しく説明しよう．二つの同次元の閉多様体[9)] M_0, M_1 が**同境**とは，それらの非交和 $M_0 \cup M_1$ が，次元が一つ高いコンパクト多様体 W の境界となるときをいう．同様に，二つの多様体から共通の多様体 N への二つの写像 $f_0 : M_0 \to N(= N \times \{0\})$, $f_1 : M_1 \to N(= N \times \{1\})$ が**同境**とは，定義域多様体が同境であって，与えられた写像の非交和 $f_0 \cup f_1 : M_0 \cup M_1 \to N \times \{0, 1\}$ が，定義域多様体の同境を与える多様体 W から $N \times [0, 1]$ への写像に拡張するときをいう．実は，特別な特異ファイバー (あるいはそのいくつかの組み合わせ) に対して上のようにして定まる N のコホモロジー類を考えると，それは写像の同境不変量を与えることがわかる (§5 参照)．すなわち，同境な写像に対応するコホモロジー類は一致するのである．

ではどのような ‘パーツ’ を考えたらそのように意味のある量を取り出すことができるのであろうか？この問いに答えるために，特異ファイバーから形式的に作られるコチェイン複体を構成する．これが**特異ファイバーの普遍複体**である (§4 参照)．そのコホモロジーを計算することにより，どういう ‘パーツ’ を組み合わせれば良いかがわかるのである．なおこうした普遍複体は，それ以前に Vassiliev [56] らにより特異点に対して定義されていたものの類似である．

なお上では，与えられた可微分写像を特異ファイバーの ‘同値類の族’ と考えたとき，それをパラメータ付ける空間が値域多様体であるとみなしている．そこで幾何的サイクルが値域多様体にできた．今度は特異ファイバーではなく，定義域多様体の各点における写像芽の ‘同値類の族’ と考えると，今度は定義域多様体がパラメータ空間となる[10)]．こうして，特異ファイバーの代わりに特異点そのものに注目すると，値域ではなく定義域多様体のコホモロジー類が得られることになる．これについては既存の研究がかなりあり，たとえばそれは多様体の特性類の多項式 (これは **Thom 多項式**と呼ばれる [6, 16, 19, 50]) で書け，しかもその多項式は普遍的であって特別な多様体や写像にはよらないことも知られていた．この場合，得られるのは写像の同境不変量ではなくホモトピー不変量である．

言い換えると，一般的な写像に対して，定義域多様体内で特異点 (に付随するコホモロジー類) に着目すると写像のホモトピー不変量が得られ，値域多様体で特異ファイバー (に付随するコホモロジー類) に着目すると写像の同境不変量が得られるわけである．

多様体も写像も同境による分類は古典的に知られている．ただしそうした古典的な話では写像の特異点に着目することはまったくなく，どんな特異点でも許していた．視点を変えて今度は特異点 (あるいは特異ファイバー) を特別なものだけに制限して考えると，実は話はそれほど単純ではないことが最近になってわかってきている．

特異写像[11] の同境分類[12] について，Rimányi–Szűcs [35] は写像の余次元が正の場合に，特異点の自己同型群の分類空間を貼り合わせてゆく方法で特異写像の**分類空間**を構成した．これにより，与えられた値域多様体への特異写像の同境分類は，その多様体から分類空間への写像のホモトピー分類に原理的には帰着されることになる．後に Kazarian [18, 19] により，分類空間の別の観点からの構成法も発見され，そのコホモロジー環の構造もかなりわかってきている．しかし許される特異点を制限してしまうと対応する分類空間の構造はいまだに詳しくはわかっていない．たとえば筆者は [38] において，極大，極小非退化臨界点のみを許す Morse 関数の同境分類が，高次元ではホモトピー球面の微分同相分類に一致することを示した ([36] も参照)．このことは，特異点を制限することにより多様体の可微分構造に関する情報まで得られる可能性を示唆している．

1.4 応用

特異ファイバーの理論はこれまでに様々な状況に応用されてきている．特異点に着目して得られてきた結果，あるいは多重写像芽に着目して得られてきた結果は，特異ファイバーの状況に一般化することが原理的には可能である．

まず曲面束の特性類への応用がある．多様体上の曲面束の全空間上に可微分関数が与えられると，これは底空間によりパラメータ付けられた，曲面上の関数の族とみなすことができる．こうした関数に現れる特異ファイバーを考えることにより底空間が ‘色づけ’ でき，こうして底空間のコホモロジー類が定義できる．ある場合にはこれが曲面束の良く知られた特性類と一致することがわかっている (詳細は §7 を参照)．

特異ファイバーはもともと写像や多様体の大域的な性質を研究するために持ち出したものであるが，写像の局所的な性質の研究への応用も知られている．具体的には，$\boldsymbol{R}^3$ の原点の近傍で定義された $\boldsymbol{R}^2$ への可微分写像が与えられたとき，それを安定摂動したときに現れるカスプの個数が，もとの写像の原点における写像芽の位相不変量であることが，特異ファイバーを用いて示されている [40]．これは $\boldsymbol{R}^2$ 内の半径の十分小さな円周上に写像を制限し，円周への写像の同境不変量を調べることにより証明されている．

大本 [31]，大本–Aicardi [34] は閉曲面から平面への写像の Vassiliev 型不変量を，逆像に含まれる正則点も込めて調べている．これは余次元 0 の写像の特異ファイバーの研究とみなせる．その後，山本稔 [51] は余次元 -1 の場合を調べている．3 次元多様体から平面への写像の Vassiliev 型不変量を，[31, 34] に類似の観点から研究したのである．その際，写像に現れる特異ファイバーに着目し，そうしたものの個数が 1 次の Vassiliev 型不変量とみなせることを示している．

余次元が負の場合に，ある種の特異写像の同境分類に特異ファイバーがかなり役に立つことも当然のことではあるがわかっている．具体的には，Kalmár [11, 12] が 3 次元多様体や 4 次元多様体上の余次元 -1 の折り目写像 (§6.1 参照) の同境群を計算しているが，その際そうした写像に現れる特異ファイバーの自己同型群が有効に用いられている．

なお Kushner, Levine, Porto [23, 24] は，3 次元多様体から平面への安定写像の特異ファイバーを

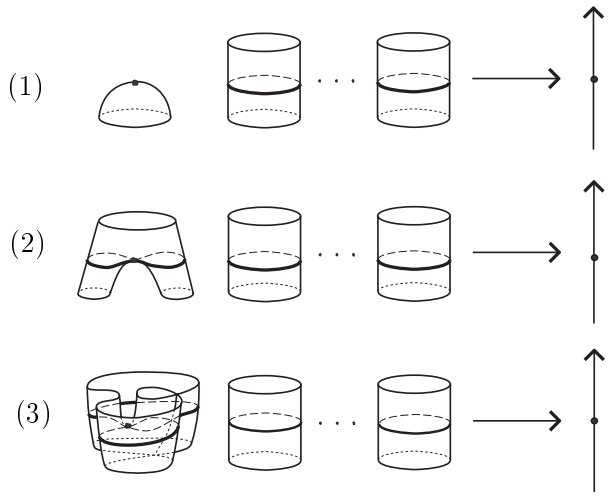

図 1：曲面上の Morse 関数の特異ファイバー

調べることにより，それを $\boldsymbol{R}^4$ へのはめ込みにリフトする問題を考察している．余次元が負の写像の特異ファイバーを本質的に用いた仕事はおそらくこれが最初であると思われる．

本論説ではこうした特異ファイバーの理論の概略と最近の動きについて，細かいことは抜きにして解説したいと思う．

2 曲面上の Morse 関数の場合

では最も簡単な場合として，曲面上の Morse 関数の特異ファイバーを考えてみよう ([39, Chap. 2] 参照).

必ずしも向き付け可能とは限らない閉曲面 M 上の Morse 関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ を考える[13)]．Morse の補題により，臨界点のまわりで f は 2 変数の実 2 次形式として書ける．さらにその点を含む f のファイバーを考えると，そのまわりでの関数の様子は図 1 のいずれかの形であることがわかる．なおここでは値域 $\boldsymbol{R}$ の向きは無視していることに注意する．

こうした分類を単に眺めているだけでは面白い結果は出て来ない．そこで，こうした特異ファイバーの近くでの非特異ファイバーの変化を試しに観察してみよう．すると (1), (2) の型の特異ファイバーの前後では，非特異ファイバーとして現れる円周の成分数がちょうど 1 だけ変化するのに対し，(3) の型の前後ではまったく変化しないことがわかる．したがって特に，$\boldsymbol{R}$ の点 y であって $f^{-1}(y)$ が奇数個の円周からなるようなものをすべて集めると，それは有界な開区間の非交和であり，その端点が (1) と (2) の型の特異ファイバーに対応することがわかる．有界な開区間の端点は当然偶数個だから，結局 (1), (2) の型の特異ファイバーの総数は常に偶数であることがわかる．

一方 Morse 理論により，閉多様体上の Morse 関数の臨界点の個数は多様体の Euler 標数と同じ偶奇を持つ．また Morse 関数の定義から，特異ファイバーの個数と臨界点の個数は一致する．こうして次を得る．

命題 2.1 閉曲面 M 上の Morse 関数に現れる (3) の型の特異ファイバーの総数は，M の Euler 標数と同じ偶奇を持つ．

すぐにわかることだが，(3) の型の特異ファイバーの近傍はメビウスの帯から開円板を一つ取り除いたものと同相であり，したがって向き付け不可能であるので，以下をただちに得る．

系 2.2 Euler 標数が奇数の閉曲面は向き付け不可能である．

もちろんこの系は Poincaré 双対定理の帰結であるが，そうしたことを知らなくても，特異ファイバーに関する観察から上のような位相的情報が得られるわけである．

3 特異ファイバーの分類

まず特異ファイバーの正確な定義を述べよう．

定義 3.1 (1) 二つの多様体 M, N と，M の部分集合 A が与えられているとする．A の M における開近傍で定義された二つの可微分写像 $f : U \to N$, $g : V \to N$ が A で**同じ芽を定める**とは，A の開近傍 $W \subset U \cap V$ であって，$f|_W = g|_W$ となるものがあるときをいう．これは A の近傍で定義された N への可微分写像に対して同値関係を定める．その同値類のことを，A に沿った**写像芽**という．また，写像 $f : U \to N$ の定める同値類をしばしば $f : (M, A) \to (N, f(A))$ と書く．

(2) 多様体間の可微分写像 $f : M \to N$ と値域多様体の点 $y \in N$ が与えられているとする．写像 f の y 上の**ファイバー**とは，写像芽 $f : (M, f^{-1}(y)) \to (N, y)$ を意味する．特に $f^{-1}(y)$ が特異点を含むときはこれを**特異ファイバー**，そうでないときは**正則ファイバー**(あるいは**非特異ファイバー**) と呼ぶ．

前節では曲面上の Morse 関数の特異ファイバーが本質的に 3 種類に分類できることを見た．しかし分類の厳密な基準はまだ述べていなかった．次に述べる分類基準が微分位相幾何学的には最も自然であろう．

定義 3.2 多様体間の可微分写像 $f_i : M_i \to N_i$ と点 $y_i \in N_i$ が与えられたとする $(i = 0, 1)$．このとき，y_0 上の f_0 のファイバーと y_1 上の f_1 のファイバーが $\boldsymbol{C^\infty}$ **同値**(あるいは $\boldsymbol{C^0}$ **同値**) であるとは，N_i における y_i の開近傍 U_i と，二つの微分同相写像 (あるいは同相写像) $\widetilde{\varphi} : (f_0)^{-1}(U_0) \to (f_1)^{-1}(U_1)$ と $\varphi : U_0 \to U_1$ で $\varphi(y_0) = y_1$ となるものが存在し，次の図式が可換となるときをいう：

$$\begin{array}{ccc} (f_0)^{-1}(U_0) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & (f_1)^{-1}(U_1) \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ U_0 & \xrightarrow{\varphi} & U_1. \end{array}$$

これは写像や写像芽に対する，いわゆる ‘右左同値’ の概念の類似である．

前節での分類の基準は実は上で定義した C^∞ 同値ではない．それは，特異ファイバーに含まれる非特異点からなる円周成分を無視していたからである．このように，特異ファイバーのうち非特異点のみからなる成分を無視することによって C^∞ 同値 (あるいは C^0 同値) から導かれる同値関係のことを，**正則ファイバーを法とする** $\boldsymbol{C^\infty}$ **(**$\boldsymbol{C^0}$**) 同値**と呼ぶ．前節での分類基準はまさにこれであった．

次元が低い多様体間の余次元が -1 の一般的な写像の特異ファイバーは分類できる．たとえば前節での分類はどこにも書いてはいなかったが良く知られていたことであろう．3 次元多様体から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への安定写像[14] の特異ファイバーの分類は [23, 24] で得られている．ただしそこには分類の基準が明確に書かれておらず，あいまいな基準での分類となっているが，結果的には正則ファイバーを法とする C^∞ 同値での分類に一致している．

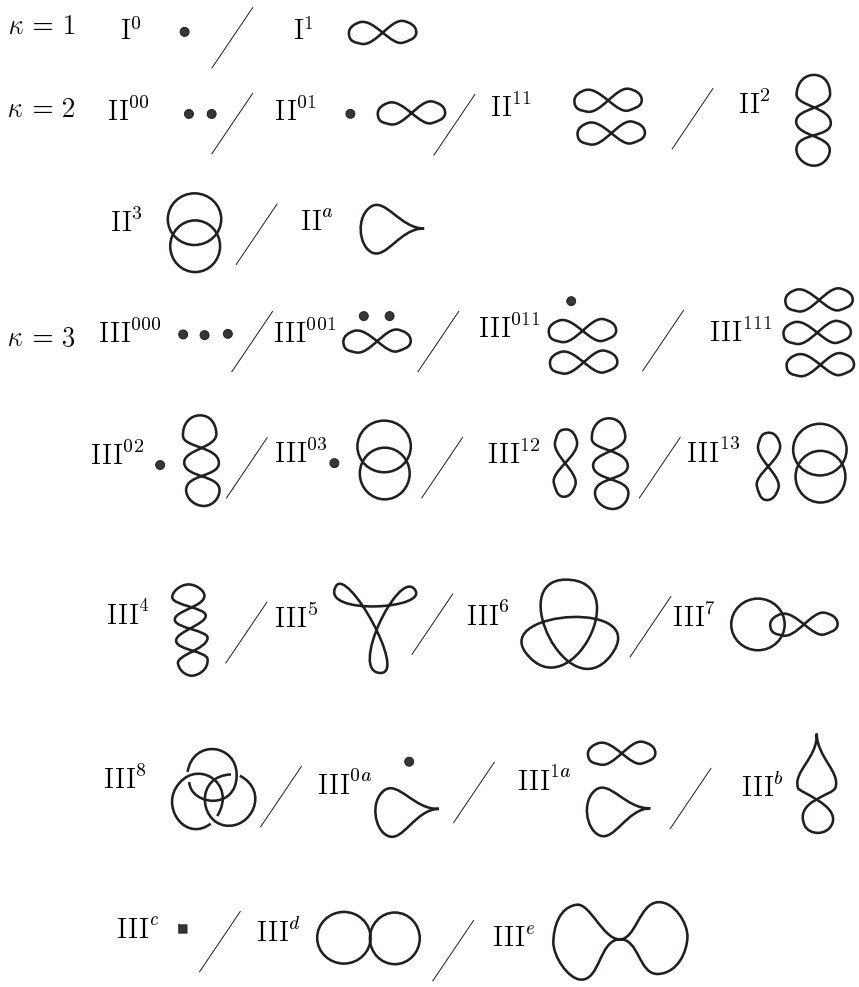

図 2：4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像に現れる特異ファイバー

4 次元多様体上の安定写像については次のことが知られている (詳細は [39] 参照).

定理 3.3 向き付け可能な 4 次元多様体から 3 次元多様体へのプロパーな安定写像に現れる特異ファイバーの，正則ファイバーを法とする C^∞ 同値による分類の完全代表系は図 2 で与えられる.

コンパクト集合の逆像が常にコンパクトとなる写像は**プロパー**であるといわれる．詳しくは述べないが，4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像は次の標準形で代表される**折り目**，**カスプ**，**燕の尾**といった特異点を持つ.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{cases} (x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2) & \text{(定値折り目特異点)}, \\ (x_1, x_2, x_3^2 - x_4^2) & \text{(不定値折り目特異点)}, \\ (x_1, x_2, x_3^3 + x_2 x_3 - x_4^2) & \text{(カスプ)}, \\ (x_1, x_2, x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + x_4^2) & \text{(定値燕の尾)}, \\ (x_1, x_2, x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 - x_4^2) & \text{(不定値燕の尾)}. \end{cases}$$

たとえば図 2 で $\bullet$ 印は，定値折り目特異点の標準形で $(x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2) = (0, 0, 0)$ に対応する点を

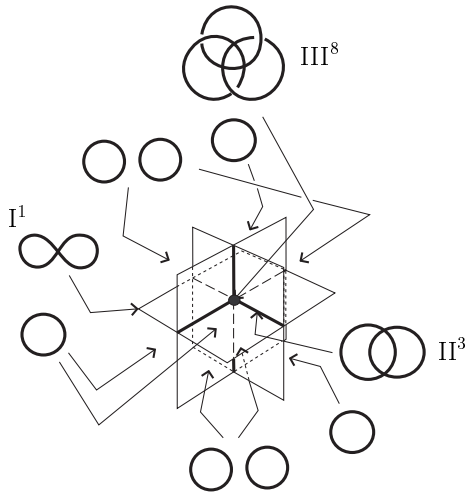

図 3：III^8 型ファイバーの近くのファイバー達

示しており，ファイバー内の ‘×印’ は不定値折り目特異点の標準形で，$(x_1, x_2, x_3^2 - x_4^2) = (0, 0, 0)$ に対応する集合 (原点で交わる 2 直線) の原点での近くの様子を示している．

上の標準形は，定義域多様体の各点での写像芽の ‘右左同値’ による分類の完全代表系である．(1.2) の意味での多重写像芽の ‘右左同値’ による分類は，図 2 において各図の ‘特異点’ を拾うことにより得られる．たとえば III^{111} 及び III^{12}–III^8 の計 8 個は，それぞれ 3 つの不定値折り目特異点を持ち，すべて多重写像芽としては同じである．しかし特異ファイバーとしてはもちろん異なる．

なお図 2 の記号においてローマ数字の右上の数字は折り目特異点を意味し，アルファベットの a, b はカスプを，c, d, e は燕の尾を意味する．

また図 2 において κ は，安定写像が与えられたとき，対応する特異ファイバーを持つ点全体のなす集合の，値域 3 次元多様体での余次元を示す．たとえばこの値が 3 に等しい特異ファイバーは離散的に現れ，2 に等しい特異ファイバーは曲線に沿って現れることを意味する．なお図 2 には逆像の絵しか描かれていないが，正確にはこれらは逆像に沿った写像芽を意味する．たとえば，I^0 も III^c も対応する逆像は 1 点であるが，その点での写像芽は異なるので異なる記号 (● と ■) が用いられている (実はそれ以外の特異ファイバーについては逆像が同じであれば写像芽としても同じである)．

ところで，これらの特異ファイバーは互いに独立して存在しているわけではなく，隣接関係を持っている．たとえば III^8 型ファイバーの近くのファイバーは図 3 のようになっている．なおこの図で交叉した 3 枚の紙に当たる部分は，特異点集合の像に対応している．

定理 3.3 はおおよそ次のようにして証明される．まず既存の特異点理論を用いて特異ファイバーに含まれる特異点での多重写像芽を分類する．次に 1 点の逆像として現れる 1 次元複体を列挙する．こうした 1 点の逆像は，特異点の外では陰関数定理より 1 次元部分多様体となっていることがわかるので，特異ファイバーにおける特異点の近傍を線分でつなぐつなぎ方を，組み合わせ的議論を用いてすべて列挙すれば良い[15]．最後に，こうしたつなぎ方が同じ特異ファイバー同士が互いに C^∞ 同値であることを，Ehresmann の束化定理の相対版 (たとえば [39] を参照) を用いて証明する．

この分類により結果としてたとえば，互いに C^0 同値な特異ファイバーは実は C^∞ 同値であること

などもわかる．

特異ファイバーのこの種の分類は，[40, 43, 51, 52, 54] でも得られている．

4 特異ファイバーの普遍複体

特異ファイバーから，§1.3 で言及したようにコホモロジー類を取り出す方法について述べよう．そのために，我々は特異ファイバーのなす普遍複体を定義する．

普遍複体の定義のためには次の二つのデータを設定する必要がある．

(1) 特異ファイバーのクラス τ.

(2) τ に含まれる特異ファイバー達の間の同値関係 ϱ.

ここで，考える可微分写像の定義域・値域については，そのときの目的によって状況を設定する．定義域多様体，値域多様体をともに固定することもあるし，それらの次元のみを固定して多様体を動かすこともある．場合によっては余次元 (= 次元差) のみを固定して，次元さえ動かすこともある．

たとえば，§3 で見たような 4 次元多様体から 3 次元多様体へのプロパーな安定写像を考える場合，τ としてはそこに現れるファイバーすべてを，ϱ としては正則ファイバーを法とする C^∞ 同値を，それぞれ考えると理解し易いかも知れない．

なお，上記の二つのデータ τ, ϱ は何でも良いわけではなく，それなりの条件を満たす必要がある．(1) の τ は隣接関係について閉じている必要がある．つまり，ある特異ファイバーが τ に含まれるならば，その近くに現れる特異ファイバーも τ に含まれていなければならない (図 3 を参照)．さらに，技術的な理由により我々が考えるのはすべて Thom 写像の特異ファイバーとする．**Thom 写像**は簡単に言うと，定義域と値域がきれいに stratify されていて写像はそれを保ち，なおかつ各 stratum ごとに沈めこみであるなどのきれいな性質を持つ (詳細はたとえば [4] を参照)．Thom 写像は一般的であり，本稿で考える写像はすべて Thom 写像である．以下，特異ファイバーがすべて τ に属する写像のことを **τ 写像**と呼ぶ．

(2) の同値関係は C^0 同値，あるいはそれよりも弱いものを考える．Thom 写像である τ 写像 $f : M \to N$ から導かれる N の stratification の stratum を Σ とすると，Σ 上の勝手な 2 点の上のファイバーは互いに C^0 同値であることが，Thom の第二同位補題 (たとえば [4, Chap. II] を参照) から従う [39, Example 1.3]．したがって特異ファイバーの ϱ に関する同値類 $\mathfrak{F}$ が与えられたとき，

$$\mathfrak{F}(f) = \{y \in N \,|\, y \text{ 上の } f \text{ のファイバーは } \mathfrak{F} \text{ 型}\}$$

という値域多様体 N の部分集合は，空集合でなければ N の strata の和集合であり，一定の余次元を持つ C^0 部分多様体となることがわかる [39, Lemma 7.1]．そこでこの余次元を $\kappa(\mathfrak{F})$ と書いて $\mathfrak{F}$ の**余次元**と呼ぶことにする．

さらに ϱ は次も満たすと仮定する．二つの τ 写像 $f_i : M_i \to N_i$ と点 $y_i \in N_i$ $(i = 0, 1)$ について，f_i の y_i 上のファイバーが ϱ に関して同値であれば，N_i における y_i の近傍 U_i と同相写像 $\varphi : U_0 \to U_1$ で $\varphi(y_0) = y_1$ を満たすものが存在し，$\varphi(U_0 \cap \mathfrak{F}(f_0)) = U_1 \cap \mathfrak{F}(f_1)$ がすべての同値類 $\mathfrak{F}$ について成り立つ．これは，同値類の隣接関係はどこでもある意味で同じであることを意味する．

では普遍複体を定義しよう．非負整数 κ に対し，$C^\kappa(\tau, \varrho)$ を，形式的な線形結合 (無限和も許す)

$$c = \sum_{\kappa(\mathfrak{F})=\kappa} m_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} \quad (m_{\mathfrak{F}} \in \boldsymbol{Z}_2) \tag{4.1}$$

全体のなす $\boldsymbol{Z}_2$ 上のベクトル空間とする．ここで $\mathfrak{F}$ は，余次元が κ となる，τ に含まれる特異ファイバーの ϱ に関する同値類すべてを動く．

コバウンダリー作用素を定義するため，二つの特異ファイバーの同値類 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ で $\kappa(\mathfrak{G}) = \kappa(\mathfrak{F}) + 1$ となるものと，τ 写像 $f : M \to N$ で $\mathfrak{G}(f) \neq \emptyset$ となるものを取る．$\mathfrak{G}(f)$ の最大次元の stratum Σ を取り，B_Σ を Σ の十分小さな法円板 (すなわち，次元が Σ の余次元に等しい N 内の円板で Σ と 1 点で横断的に交わるもの) とする．すると $B_\Sigma \cap \overline{\mathfrak{F}(f)}$ は $B_\Sigma \cap \Sigma$ を共通の端点に持つ有限個の曲線からなる．そこで**結合係数** $[\mathfrak{F} : \mathfrak{G}] \in \boldsymbol{Z}_2$ を，曲線の本数の 2 を法とする剰余類とする．これは上の仮定から B_Σ, Σ あるいは f などに依らないことがわかる．このとき，$\boldsymbol{Z}_2$ 線形写像 $\delta_\kappa : C^\kappa(\tau, \varrho) \to C^{\kappa+1}(\tau, \varrho)$ が，

$$\delta_\kappa(\mathfrak{F}) = \sum_{\kappa(\mathfrak{G})=\kappa+1} [\mathfrak{F} : \mathfrak{G}]\mathfrak{G}$$

で定義される．ここで $\mathfrak{F}$ は $\kappa(\mathfrak{F}) = \kappa$ を満たす特異ファイバーの同値類である．なお，Thom 写像に付随した stratification の局所有限性から，この線形写像が矛盾無く定義されることがわかる．さらに，$\delta_{\kappa+1} \circ \delta_\kappa = 0$ となることも容易に示すことができる．こうしてコチェイン複体

$$\mathcal{C}^*(\tau, \varrho) = (C^\kappa(\tau, \varrho), \delta_\kappa)_\kappa$$

が得られ，これを**特異ファイバーの普遍複体**と呼ぶ．また，その κ 次元のコホモロジー群を $H^\kappa(\tau, \varrho)$ と書く．

注意 4.1 上で構成されたコチェイン複体は，実は (多重) 特異点に対して Vassiliev，大本らが定義したもの [15, 30, 56] の類似物となっており，それらの細分，あるいは精密化となっている．

コチェイン複体 $\mathcal{C}^*(\tau, \varrho)$ の κ 次元コチェイン c を (4.1) のように取る．τ 写像 $f : M \to N$ に対し，

$$c(f) = \overline{\bigcup_{m_{\mathfrak{F}} \neq 0} \mathfrak{F}(f)}$$

と置く．もし c がコサイクルであれば，$c(f)$ が値域多様体 N の余次元 κ の $\boldsymbol{Z}_2$ サイクル[16] となることが容易にわかる．これが §1.3 で登場した幾何的サイクルに他ならない．

補題 4.2 $c_0, c_1 \in C^\kappa(\tau, \varrho)$ がコサイクルであり，互いにコホモロガスであれば，勝手な τ 写像 $f : M \to N$ に対して，$c_0(f)$ と $c_1(f)$ は N でホモロガスである．

証明． 仮定から $\kappa - 1$ 次元のコチェイン d で $c_1 - c_0 = \delta_{\kappa-1}(d)$ となるものがある．すると，チェインレベルで $c_1(f) - c_0(f) = \partial d(f)$ が成り立つことがわかる．よって補題が従う． □

そこで τ 写像 $f : M \to N$ に対して，準同型写像

$$\varphi_f : H^\kappa(\tau, \varrho) \to H^\kappa(N; \boldsymbol{Z}_2) \tag{4.2}$$

を次のように定義しよう．普遍複体のコホモロジー類 $\alpha \in H^\kappa(\tau, \varrho)$ に対し，コサイクル c をその代表元とする．このとき，$c(f)$ が表す N のホモロジー類の Poincaré 双対を $\varphi_f(\alpha)$ と定める．これは補題 4.2 より，c の選び方に依らないことに注意する．こうして，特異ファイバーを用いて値域多様体のコホモロジー類が取り出せることになる (詳細は [39] 参照)．

5 同境不変性

前節で定義した特異ファイバーの普遍複体のコホモロジー類が，特異写像の同境不変量を与えることを示そう．

定義 5.1 可微分写像 $f : M \to N$ に対して，$\boldsymbol{R}$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}}$ との直積写像 $f \times \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}} : M \times \boldsymbol{R} \to N \times \boldsymbol{R}$ を f の**懸垂**という．また $y \in N$ に対して，$f \times \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}}$ の $y \times \{0\}$ 上のファイバーを，f の y 上のファイバーの**懸垂**という．$\boldsymbol{R}$ を区間 $[0,1]$, $[0,1)$ などに置き換えても同様の言い方をする．

特異写像の同境を考えるため，前節で準備した特異ファイバーのクラス τ と同値関係 ϱ に，以下の付加的な条件を加えよう．

(a) τ に属する特異ファイバーの懸垂は再び τ に属する．

(b) ϱ に関して同値な特異ファイバーの懸垂同士は再び ϱ に関して同値となる．

このとき懸垂は自然な準同型

$$s_\kappa^\sharp : C^\kappa(\tau, \varrho) \to C^\kappa(\tau, \varrho)$$

を各 κ に対して導く．すなわち，特異ファイバーの同値類 $\mathfrak{F} \in C^\kappa(\tau, \varrho)$ に対して，$s_\kappa^\sharp(\mathfrak{F})$ を，懸垂が $\mathfrak{F}$ に属する特異ファイバーの同値類のうち余次元が κ のもの達の形式和として定める．すると $s_\kappa^\sharp$ がコチェイン写像を定めること，すなわち $\delta_\kappa \circ s_\kappa^\sharp = s_{\kappa+1}^\sharp \circ \delta_\kappa$ となることが確かめられる．

次に特異写像の同境についてきちんと定義を与えておこう．

定義 5.2 共通の多様体 N への τ 写像 $f_i : M_i \to N$ $(i = 0, 1)$ で，M_0, M_1 が同次元の閉多様体であるものが与えられたとする．このとき f_0 と f_1 が **$\boldsymbol{\tau}$ 同境**であるとは，あるコンパクト多様体 W で $\partial W = M_0 \cup M_1$ となるものと，τ 写像 $F : W \to N \times [0,1]$ があって，F を M_i の W におけるカラー近傍に制限したものが，$f_i : M_i \to N \times \{i\}$ の懸垂と同一視できるときをいう．このとき F を f_0 と f_1 の間の **$\boldsymbol{\tau}$ 同境**という．さらに M_i が向き付けられているとき，W が向き付けられた多様体であって $\partial W = (-M_0) \cup M_1$ となるとき，f_0 と f_1 は**有向 $\boldsymbol{\tau}$ 同境**であるという．(なお $-M_0$ は，多様体 M_0 でその向きを逆にしたものを意味する．)

命題 5.3 二つの τ 写像 $f_i : M_i \to N$ $(i = 0, 1)$ が τ 同境であれば，各 κ に対して

$$\varphi_{f_0} \circ s_\kappa^* = \varphi_{f_1} \circ s_\kappa^* : H^\kappa(\tau, \varrho) \to H^\kappa(N; \boldsymbol{Z}_2)$$

が成り立つ．ここで s_κ^* はコチェイン写像 $s_\kappa^\sharp$ がコホモロジーに導く準同型写像である．

証明． $F : W \to N \times [0,1]$ を f_0 と f_1 の間の τ 同境とする．c を $C^\kappa(\tau, \varrho)$ の勝手なコサイクルとし，$\bar{c} = s_\kappa^\sharp(c)$ と置く．すると c がコサイクルであることから，チェインレベルで $\partial c(F) = \bar{c}(f_1) \times \{1\} - \bar{c}(f_0) \times \{0\}$ が成り立つことがわかる．よって命題が成立する． □

上の命題は，準同型写像 (4.2) について，$\varphi_{f_0}|_{\mathrm{Im}\, s_\kappa^*} = \varphi_{f_1}|_{\mathrm{Im}\, s_\kappa^*}$ が成り立つことを意味する．普遍複体のコホモロジー類が τ 同境不変量を供給するわけである (詳細は [39] 参照).

注意 5.4 これまでの議論では説明を簡略化するために係数をすべて $\boldsymbol{Z}_2$ としてきたが，各 $\mathfrak{F}(f) \subset N$ ($\mathfrak{F}$ は特異ファイバーの同値類，$f : M \to N$ は τ 写像) の法束の向きを考えることで，$\boldsymbol{Z}$ あるいは任意の加群を係数として同様の構成が可能である．

6 具体例

6.1 曲面上の Morse 関数の同境群

各自然数 n に対して，向き付けられた n 次元閉多様体上の Morse 関数全体の集合を $M(n)$ で表すことにする．便宜上，空集合 $\emptyset$ 上の関数も $M(n)$ の元であると考える．

多様体間の可微分写像 $f : M \to N$ $(n = \dim M \geq \dim N = p)$ に対して，特異点 $x \in S(f) \subset M$ が**折り目特異点**であるとは，x と $f(x)$ のまわりの局所座標を適当に取ると，f が x のまわりで

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm x_{p+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

と書き表されるときをいう ($(n,p) = (4,3)$ のときは既に §3 で登場している)．また，特異点として折り目特異点しか持たない写像を**折り目写像**という．たとえば Morse 関数に現れる非退化臨界点や，その懸垂に現れる特異点は折り目特異点である．

以下 τ として，一般的な折り目写像に現れる特異ファイバー全体を考える．すると，$M(n)$ の元は $\boldsymbol{R}$ への τ 写像と考えられる．そこで $M(n)$ の元の有向 τ 同境による商集合を $\mathcal{M}(n)$ と書くことにする．これは，関数の非交和により加法群の構造を持つことが容易にわかる (単位元は $\emptyset$ 上の関数が属する同境類であり，$f : M \to \boldsymbol{R}$ の属する同境類の逆元は $-f : -M \to \boldsymbol{R}$ の属する同境類である)．$\mathcal{M}(n)$ を，**Morse 関数のなす n 次元有向同境群**と呼ぶこともある (たとえば [8, 9, 10, 40] を参照)．

$n = 2$ のときは，特異ファイバーの普遍複体のコホモロジーが $\mathcal{M}(2)$ の完全不変量を与えることが知られている．その概要を以下に述べよう．

まず §2 で見たような曲面上の Morse 関数の特異ファイバーの分類を行い，続いてその懸垂が現れる次元を考えて，向き付け可能な 3 次元多様体から 2 次元多様体への一般的な折り目写像に現れる特異ファイバーの分類を行う．考える同値関係 ϱ は，C^0 同値よりも少し弱いものを考える．具体的には，非特異点からなる円周成分の個数の偶奇が一致し，特異点を含む成分同士は C^0 同値であるとき ϱ に関して同値であるとする．こうすると，余次元 1 の同値類が 4 個，余次元 2 のものが 10 個となる (これらの懸垂は，図 2 において $\kappa = 1$, $\kappa = 2$ で II^a 以外のものに，非特異点からなる円周成分の偶奇の情報を付け加えたものに相当する)．

これらのうちで，対応する集合の法束が向き付け可能なもののみを取り出し，それらの間の隣接関係を調べて $\boldsymbol{Z}$ 係数の普遍複体を構成する．そしてコホモロジーを具体的に計算すると，1 次元コホモロジー群 (正確には s_1^* の像) が $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ に同型となることがわかり，生成元も具体的にわかる．こうして，$\mathcal{M}(2)$ の不変量が本質的に二つ得られることになる．すなわち，α_1, α_2 を生成元としたとき，向き付けられた閉曲面上の Morse 関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ に対して，$\varphi_f(\alpha_1), \varphi_f(\alpha_2) \in H_c^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ が f の有向 τ 同境不変量を与えるのである[17)]．

これらは閉曲面内の特異ファイバーの (符号付き) 個数を数えて得られるので，$\mathcal{M}(2) \to \boldsymbol{Z}$ なる準同型写像を与える．こうして，二つの生成元に対応して二つの準同型写像が得られるが，このうちの一つは常に消えることが幾何的な議論によりわかる．ところがもう一つ (これを α_1 とする) は非自明であり，次が成立する ([39, §14.2] 及び [9] を参照)．

定理 6.1 向き付けられた閉曲面上の Morse 関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ に対し，$\varphi_f(\alpha_1) \in H_c^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ は，f の極大点の個数から極小点の個数を引いて得られる整数と一致する．さらに，これは $\mathcal{M}(2)$ と無限巡回群 $\boldsymbol{Z}$ との間の同型を与える．

6.2 4 次元多様体の符号数公式

次に，向き付けられた 4 次元閉多様体から 3 次元多様体への安定写像について考える．特異ファイバーの分類は §3 で見た通りである．

以下 τ としては，余次元が -1 の安定写像に現れる特異ファイバーすべてを考える．同境を議論するためには，5 次元多様体から 4 次元多様体への安定写像の特異ファイバーも分類する必要がある．詳細はここでは述べないが，かなり煩雑にはなるもののこれは可能である．(なお，特異点としては §3 で登場した折り目，カスプ，燕の尾の懸垂の他に，蝶々，D_4 特異点も現れる．詳細は [43] を参照．) また同値関係としては正則ファイバーを法とする C^0 同値を考える．すると，これらのうち対応する部分多様体の法束が向き付け可能である同値類の個数は，$\kappa = 3$ のとき 3 個，$\kappa = 4$ のとき 14 個であることがわかる．あとはこれらの隣接関係を調べ $\boldsymbol{Z}$ 係数の普遍複体を作ると，そのコホモロジー群が容易に計算できる．その結果 3 次元コホモロジー群 (正確には s_3^* の像) が $\boldsymbol{Z}$ と同型となり，それが図 2(または図 3) の III^8 型ファイバーの同値類で生成されることがわかる．

したがって，向き付けられた 4 次元閉多様体から 3 次元多様体への安定写像 $f : M \to N$ が与えられたとき，その各 III^8 型ファイバーには符号 $(= \pm 1)$ が付き，その符号和が f の τ 同境不変量となることがわかる．ところで我々の τ は安定写像の特異ファイバーをすべて含んでいた．どんな写像 (特に二つの写像の間の同境を与える写像) も安定写像で近似できることを考えれば，これにより写像の通常の意味における (すなわち特異点を無視した意味での) 同境不変量が得られたことになる．

特に $N = \boldsymbol{R}^3$ のときを考えよう．この場合，二つの向き付けられた 4 次元閉多様体からの安定写像 $f_i : M_i \to \boldsymbol{R}^3$ $(i = 0, 1)$ が有向 τ 同境であるためには，M_0 と M_1 が通常の意味で多様体として有向同境であることが必要十分である．したがって，4 次元有向同境群 Ω_4 から $\boldsymbol{Z}$ への準同型写像が，与えられた 4 次元多様体に対してそこから $\boldsymbol{R}^3$ への安定写像に現れる III^8 型特異ファイバーの符号和を考えることにより定義されることになる．

一方 Ω_4 は，4 次元多様体の符号数[18] を対応させる写像により $\boldsymbol{Z}$ と同型であることが古典的に知られている．したがって上のことと合わせると，ある普遍定数 $c \in \boldsymbol{Z}$ があって，安定写像に現れる III^8 型特異ファイバーの符号和が，定義域 4 次元多様体の符号数の c 倍となることがわかる．

この定数 c を決定するには，ある ‘非自明な具体例’ を考察すれば十分である．しかし実はこの具体例の構成が ‘くせ者’ である．安定写像は豊富に存在するが，その特異ファイバーまで込めた構造がきちんとわかる安定写像を具体的に構成することは一般には難しいのである．安定写像を具体的に構成する仕事はそれまでにほとんどなかった．4 次元多様体から 3 次元ユークリッド空間への安定写像に関してはわずかに小林 [20] による研究がある程度であった．しかし残念ながら小林の写像の特異ファイバーの様子は (少なくとも筆者には) よくわからない．そこで筆者は小林の構成した安定写像を参考に，特異ファイバーの近傍を次々に貼り合わせる方法で，安定写像の新しい具体例を，ファイバーの様子が完全にわかる形で構成した [39][19]．これは III^8 型の特異ファイバーをちょうど一つ持ち，それ以外の余次元 3 の特異ファイバーをまったく持たないものである．具体例は構成できたものの，定義域多様体の符号数については計算が容易でなく，かなり煩雑な議論を経て [43] においてようやく決定できた．これにより，定数 c が 1 に等しいことがわかり，かくして次が証明された (値域多様体を一般の 3 次元多様体として良いことを示すには付加的な議論が必要である．詳細は [43] を参照)．

定理 6.2 向き付けられた 4 次元閉多様体 M から 3 次元多様体 N への安定写像 $f : M \to N$ に対

し，その III^8 型特異ファイバーの符号和は，M の 4 次元多様体としての符号数に一致する．

なお，特異ファイバー (1.1) ではなく多重写像芽 (1.2) を考えるだけでは符号数に関する情報は得られないことが確認されている．特異ファイバーは多重写像芽より多くの情報を与えてくれるのである．

7 曲面束の特性類

多様体 M をファイバーとする C^∞ 級ファイバー束 $\pi : E \to B$ を考える．こうしたファイバー束の特性類を定義するために，E 上の関数 (の特異ファイバー) を用いる方法を紹介しよう．

$F : E \to \boldsymbol{R}$ を全空間 E 上の一般的な関数とする．底空間の点 $b \in B$ に対して $F_b = F|_{\pi^{-1}(b)}$ と置くと，$\pi^{-1}(b)$ は M と微分同相であるので，F は底空間 B でパラメータ付けられた M 上の関数の族であるとみなすことができる．仮に F が一般的であったとしても，各 F_b は Morse 関数であるとは限らないことに注意されたい．そこで，

$$\Sigma(F) = \{b \in B \mid F_b \text{ は Morse 関数でない }\}$$

と置いて，これを F の**分岐集合**と呼ぶ．分岐集合はもちろん F の取り方に大きく依存する．そこで $\Sigma(F)$ の点 b のうち，関数 F_b がある特別な性質 $\mathfrak{P}$ を満たすもの全体のなす集合 $\mathfrak{P}(F) \subset \Sigma(F)$ を考える．$\mathfrak{P}$ をうまく取ると，$\mathfrak{P}(F)$ の閉包が幾何的サイクルとなって B 内のホモロジー類を表し，その Poincaré 双対がファイバー束 π のみに依るだけでなく，束写像に関する自然性を満たすことがわかる．こうしてファイバー束の特性類が $\mathfrak{P}$ から作られることになる．

Kazarian [17] はファイバーが S^1 のときにこのことを詳しく調べた．たとえば $\mathfrak{P}$ として，‘関数 $S^1 \to \boldsymbol{R}$ の各臨界点は非退化で，最大値を取る点がちょうど 2 点，最小値を取る点がちょうど 2 点あって，これらの 4 点が S^1 をある向きにたどるときに，最大，最小，最大，最小の順番に互い違いに現れる’ という性質を考えると，対応する S^1 束の特性類として Euler 類が得られることを示している．

ファイバーが連結で向き付け可能な閉曲面 S のときを考えよう．このとき，関数 $f : S \to \boldsymbol{R}$ について次の性質 $\mathfrak{P}_{\mathrm{III}^8}$ を考える．

(1) f の臨界点はすべて非退化である．

(2) f のちょうど 3 つの臨界点で f は同じ値 c を取るが，それ以外の臨界点では値はすべて異なり，c とも異なる．

(3) f の c 上のファイバーは III^8 型である (図 4 参照)．

なお，‘III^8’ という名称を使っているのは，図 2 に現れる III^8 型と本質的には同じ特異ファイバーであると考えられるからである．

さて $\pi : E \to B$ を S をファイバーとする C^∞ 級の向き付けられたファイバー束とする．すると一般的な関数 $F : E \to \boldsymbol{R}$ に対して，$\mathfrak{P}_{\mathrm{III}^8}(F)$ は B の余次元 2 の部分多様体であり，その法束に向きが自然に入ることがわかる．さらにその閉包は幾何的サイクルをなすことが，特異ファイバーの普遍複体と類似の議論でわかる．したがってその Poincaré 双対はコホモロジー $H^2(B; \boldsymbol{Z})$ の元であるとみなすことができる．このコホモロジー類が関数 F の取り方に依らずに定まることは，普遍複体の議論，及び命題 5.3 の証明と類似の議論によりわかる．こうして曲面束 $\pi : E \to B$ に対してコホモロジー類 $\mathrm{III}^8(\pi) \in H^2(B; \boldsymbol{Z})$ が定まる．定義からこれが束写像に対する自然性を満たすことはすぐにわかるので，これは曲面束の特性類を定める．こうして得られる特性類は実は良く知られた特性類を

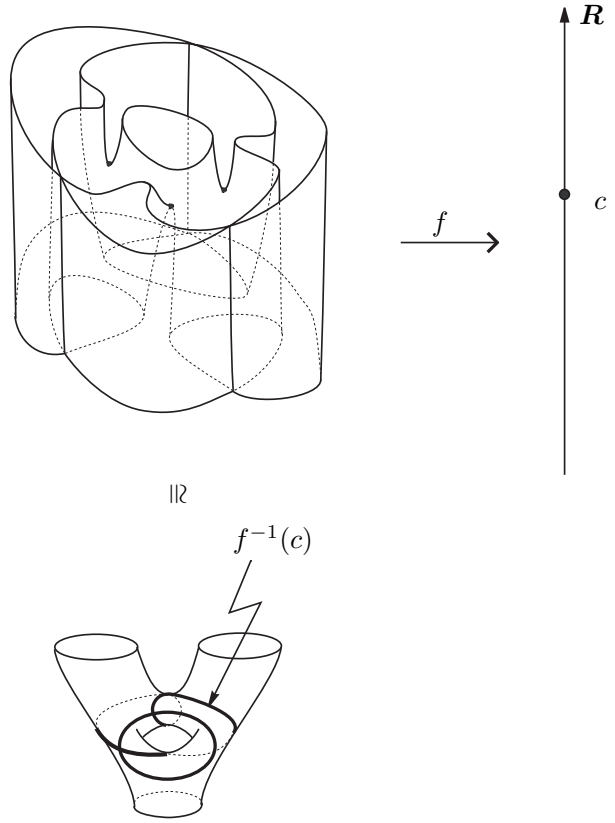

図 4：曲面上の関数の III^8 型ファイバー

使って次のように記述できる (詳細は [41, 42, 45] 参照).

定理 7.1 特性類 $\mathrm{III}^8(\pi)$ の 3 倍は，曲面束 $\pi : E \to B$ の第一 Mumford–Morita–Miller 類 $e_1(\pi)$ に捩れを法として一致する．ファイバー閉曲面 S の種数が 4 以上であれば，捩れも込めて $H^2(B; \boldsymbol{Z})$ の元として一致する．

曲面束の **Mumford–Morita–Miller 類** $e_n(\pi)$ については [29] 等を参照していただきたい[20]．なお $e_n(\pi)$ については，関数ではなく $\boldsymbol{R}^n$ への写像を考え，そこに現れる特異点を見ることによって捕らえられることも実は知られている (このことは大本 [33] による．[41] も参照).

定理 7.1 は次のようなアイデアに基づいて証明される．まず底空間 B が連結で向き付けられた閉曲面のときを考える．このとき E は向き付けられた 4 次元閉多様体であり，$F : E \to \boldsymbol{R}$ が十分に一般的であれば写像 $f = (\pi, F) : E \to B \times \boldsymbol{R}$ は安定写像となる．したがって定理 6.2 より，E の符号数は f に現れる III^8 型特異ファイバーの符号の総和に等しくなる．この符号の総和は，$\mathfrak{P}_{\mathrm{III}^8}(F)$ が表す 0 次元ホモロジー群 $H_0(B; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ の元と自然に同一視される (符号の正負が 0 次元多様体 $\mathfrak{P}_{\mathrm{III}^8}(F)$ の各点の法束の向きに対応している)．一方 E の符号数の 3 倍が $e_1(\pi) \in H^2(B; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ に一致することは良く知られている．したがってこの場合に求める結果を得る．一般の場合は普遍係数定理より，B 内の勝手な 2 次元ホモロジー類 γ との Kronecker 積が互いに等しいことを示せば良い[21]．Thom の定理 [49] より，閉曲面からの可微分写像 $a : X \to B$ であって $a_*[X] = \gamma$ となるものがある (ただ

し，$[X] \in H_2(X; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ は X の基本類である)．そこで X 上の曲面束 $a^*\pi$ を考えることで，議論が先の場合に帰着される．

実は，一般の多様体をファイバーとするファイバー束に対しても §4 と同様に普遍複体が構成でき，そのコホモロジー類が多様体束の特性類を定義することもわかる．

8 特異ファイバーの分類空間

§4, §5 で導入した特異写像の同境不変量としてのコホモロジー類，あるいは §7 で導入した多様体束の特性類は，分類空間という概念を持ち出すことによりその意味が明確になる．ここでは特に前者について解説しよう．

8.1 Kazarian による分類空間の構成方法

Rimányi–Szűcs [35] は，余次元が 0 以上の場合に特異写像の分類空間を構成した．これは，特異点の自己同型群の分類空間を隣接関係にしたがって貼り合わせてできるものであり，アイデア自体は Szűcs がそれ以前からいくつかの本質的な場面で具体化し，その有効性が指摘されていたものであった ([47, 48] を参照)．これは一般化された Pontrjagin–Thom 構成の理論であるとみなせる．

ここでいう**特異写像の分類空間**とは，ある特異ファイバー (余次元が 0 以上なので，実質的には多重写像芽と同じ) の集合 τ を与えたときに構成される空間 $N\tau$ であって，次の性質を満たすものである．

(1) ある τ 普遍写像 $f\tau : M\tau \to N\tau$ が存在する．

(2) 勝手な τ 写像 $f : M \to N$ に対し，ある写像 $c_f : N \to N\tau$ (これを f の**分類写像**という) があって，f は $f\tau$ を c_f により引き戻して得られる写像[22] とみなせる．

(3) 二つの τ 写像 f, g が τ 同境となるためには，それらの分類写像 c_f, c_g がホモトピックとなることが必要十分である．

一方 Kazarian [18, 19] は次のようにして分類空間を構成した．まず $EO(n) \to BO(n)$ を実 n 次元普遍ベクトル束とし，$MO(n)$ をその Thom 複体とする．各整数 ℓ に対して，反復ループ空間 $\Omega^K MO(K+\ell)$ (K は十分に大きな自然数) が，余次元 ℓ の特異写像の分類空間とみなせるのである．実際，$\Omega^K MO(K+\ell)$ の元は基点を保つ連続写像 $h : S^K \to MO(K+\ell)$ とみなせるが，基点の適当な近傍の外では可微分写像であるとして良い (たとえば [28, §18] 参照)．このとき，$h^{-1}(BO(K+\ell))$ の点において h と $EO(K+\ell) \to BO(K+\ell)$ のファイバー方向への射影を合成することで，余次元 ℓ の写像芽 $S^K \to \boldsymbol{R}^{K+\ell}$ が対応する．よって，$\Omega^K MO(K+\ell)$ の元は特異写像芽 (より正確には多重写像芽) を表すとみなせるのである．したがって τ に対して，この反復ループ空間の対応する部分空間を考えれば分類空間 $N\tau$ を得る．

Kazarian の構成方法の利点は，τ が十分に多くの特異ファイバーを含んでいれば分類空間のホモトピー型がわかりやすいこと，余次元が負の場合にも分類空間が同様の方法で構成できることにある．実際 Kazarian [18] は，分類空間のコホモロジー環を明らかにすることにより，多重写像芽に対する数え上げ公式などを具体的に得ている．

さらに，Kazarian の構成方法は余次元が負の写像の特異ファイバーに対しても適用できるという利点を持っている．実際，上のような状況で $h^{-1}(BO(K+\ell))$ が特異ファイバーであるとみなすことができる．したがって Kazarian の方法をほとんど模倣することにより特異ファイバーの分類空間が得られることになる．ただし，Kazarian による特異写像芽の分類空間の場合と同様，分類の基準として

は C^0 同値や C^∞ 同値ではなく，**$\mathcal{K}$ 同値**を本質的に用いる必要がある (正確には**安定 $\mathcal{K}$ 同値**を用いる．詳細は [44] 参照)．$\mathcal{K}$ 同値は Mather [25, 26, 27] が導入した，可微分写像の特異点論で本質的な役割を果たす重要な概念である．わかりやすい解説が [3] にある．

C^∞ 同値なファイバーが互いに $\mathcal{K}$ 同値となることは容易にわかる．逆は一般には成り立たないが，プロパーな C^∞ 安定写像に現れるファイバーについては逆も成り立つ ([44] 参照)．

こうして $\mathcal{K}$ 同値に基づいた特異ファイバーの分類空間が構成されることになる[23]．特に特異ファイバーのクラス τ が十分に大きいときは，この分類空間は $\Omega^K MO(K+\ell)$ とみなせる．この空間が写像の同境類の分類空間であることは古くから知られていたわけだが [46, 49]，それを $\mathcal{K}$ 同値分類における多重写像芽の分類空間 (あるいは特異ファイバーの分類空間) であると解釈した点に大きな意味がある．Kazarian のこのアイデアはこの分野における大きなブレークスルーであったと言って良い．

注意 8.1 ここで一つ注意すべきことがある．余次元 ℓ が正のときは，分類空間 $\Omega^K MO(K+\ell)$ は連結であるが，$\ell \leq 0$ のときは，

$$\pi_0(\Omega^K MO(K+\ell)) \cong \pi_K(MO(K+\ell)) \cong \mathfrak{N}_{-\ell}$$

となるので，多様体の $-\ell$ 次元同境群 $\mathfrak{N}_{-\ell}$ の各元に応じて連結成分があることになる．このことは次のように説明される．余次元 ℓ のプロパーな可微分写像 $f : M \to N$ で N が連結なものが与えられたとき，その正則ファイバーが属する同境類が一意的に決まるが，分類写像 $c_f : N \to \Omega^K MO(K+\ell)$ の像を含む連結成分は，その正則ファイバーの同境類に対応するのである．余次元が負の場合はこの点に注意が必要である．

8.2 特異写像の特性類

さて，こうして構成される特異ファイバーの分類空間を用いて特異写像の特性類を調べるため，分類空間のコホモロジー環を記述しておこう．なおここでいう**特性類**とは，特異写像 $f : M \to N$ が与えられるたびに決まる $H^*(N; \boldsymbol{Z}_2)$ のコホモロジー類であって，写像の引き戻しに関して自然性を満たすものを意味する．

以下, 多重指数 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対して, $w_I = w_1^{i_1} w_2^{i_2} \cdots w_k^{i_k}$ と置く．ここで w_i は第 i Stiefel–Whitney 類を表す．余次元 ℓ の可微分写像 $f : M \to N$ に対し，$w_i(f) = w_i(f^*TN - TM)$ を形式的差束の第 i Stiefel–Whitney 類とし，$s_I(f) = f_! w_I(f) \in H^*(N; \boldsymbol{Z}_2)$ を Landweber–Novikov 類とする (たとえば [18, 19] を参照)．ここで $f_! : H^*(M; \boldsymbol{Z}_2) \to H^{*+\ell}(N; \boldsymbol{Z}_2)$ は f の誘導する Gysin 準同型である．

余次元が $\ell > 0$ のとき，分類空間 $\Omega^K MO(K+\ell)$ の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数コホモロジー環は，Landweber–Novikov 類によって乗法的に生成されることが知られている [18, 19, 49]．余次元が $\ell \leq 0$ のときは，分類空間の各連結成分が同様の性質を満たすことがわかる．

なお向き付けられた写像[24] を考えると，Pontrjagin 類を使って有理数係数で同様の結論が得られることが知られている．

特異写像の特性類は，自然性を満たすことから，分類空間のコホモロジーの元を分類写像によって引き戻すことにより得られる．したがって，特異写像の特性類はすべて Landweber–Novikov 類で原理的には記述できることになる．また，特性類は必然的に同境不変である．

8.3 特異ファイバーの普遍複体との関係

以下 τ を，特異ファイバーの集合として十分大きなものとする[25]．また写像の余次元 $\ell \leq 0$ を固定する．同値関係 ϱ としては，安定 $\mathcal{K}$ 同値より弱いものを考える．(なお τ と安定 $\mathcal{K}$ 同値は，定義 5.1 直後の条件 (a), (b) を満たすことに注意されたい．)

注意 8.1 によると，特異ファイバーの普遍複体 $\mathcal{C}^*(\tau, \varrho)$ は直積

$$\prod_{\gamma \in \mathfrak{N}_{-\ell}} \mathcal{C}^*_\gamma(\tau, \varrho)$$

に分解する．ここで $\mathcal{C}^*_\gamma(\tau, \varrho)$ は，近くにある正則ファイバーの属する同境類が $\gamma \in \mathfrak{N}_{-\ell}$ である特異ファイバーで張られる $\mathcal{C}^*(\tau, \varrho)$ の部分ベクトル空間である．(なおここでは，異なる γ に対応する特異ファイバーは ϱ に関しては同値にならないと仮定する．) そして $f : M \to N$ が τ 写像であり，その正則ファイバーの同境類が γ であれば，§4 で定義したような準同型写像

$$\varphi_f : H^*(\mathcal{C}^*_\gamma(\tau, \varrho)) \to H^*(N; \boldsymbol{Z}_2)$$

が幾何的サイクルを通して定義される．各コホモロジー類 $\alpha \in H^*(\mathcal{C}^*_\gamma(\tau, \varrho))$ に対して $\varphi_f(\alpha)$ は特異写像の特性類を与えるので，§8.2 により次を得る．

命題 8.2 各コホモロジー類 $\alpha \in H^*(\mathcal{C}^*_\gamma(\tau, \varrho))$ に対し，Landweber–Novikov 類の普遍的な多項式 $P_\alpha(s_I)$ が存在して，各 τ 写像 $f : M \to N$ で正則ファイバーの同境類が γ であるものに対し，$\varphi_f(\alpha) = P_\alpha(f_! w_I(f^*TN - TM))$ が $H^*(N; \boldsymbol{Z}_2)$ で成り立つ．

この多項式 P_α は α の **Thom 多項式**と呼ぶべきものである．

なお上のことは，準同型写像

$$H^*(\tau, \varrho) \to H^*(N\tau; \boldsymbol{Z}_2) \tag{8.1}$$

が，α に対してその Thom 多項式を対応させることにより定まることを意味する．この写像は，分類空間 $N\tau$ の中で，どのように意味のある幾何的サイクルを取り出したら良いかを教えてくれるものであると解釈できる．(ただし一般に (8.1) は全射とも単射とも言えない．)

なお，分類空間 $N\tau$ には自然に stratification を入れることができ，各 stratum の余次元を用いてそこにフィルター付けが入る．これにより，$H^*(N\tau; \boldsymbol{Z}_2)$ に収束するスペクトル列ができ，その $E_1^{*,0}$ 項が我々の普遍複体に対応する．このとき，上の準同型写像 (8.1) は合成

$$H^*(\tau, \varrho) \cong E_2^{*,0} \to E_\infty^{*,0} \to H^*(N\tau; \boldsymbol{Z}_2)$$

に一致することがわかる．

8.4 具体例

では特異ファイバーの Thom 多項式の具体例を一つ与えよう．余次元 -1 のプロパーな可微分写像 $f : M \to N$ を考える．ただし，f は写像として向き付けられていると仮定する．さらに，分類空間としてはそうした向き付けられた写像に対するもの $N\tau = \Omega^K MSO(K-1)$ を考え，分類写像 $c_f : N \to N\tau$ は分類空間の各 stratum に横断的であると仮定する (これは一般的な仮定である)．余次元が -1 であるので，対応する同境群 $\mathfrak{N}_1$, Ω_1 は自明であり，したがって正則ファイバーの同境類を気

にする必要はないことに注意しておく．

さて III^8 を，特異ファイバーの同値類で図 2 にある III^8 型のものを含むものとする．なお同値関係 ϱ としては，正則ファイバーを法とする安定 $\mathcal{K}$ 同値を考える．すると $\mathrm{III}^8(f)$ は N 内の余次元 3 の部分多様体であり，f が向き付けられた写像であることから，その法束には自然に向きが付くことがわかる．よってその閉包が表すホモロジー類の Poincaré 双対として $H^3(N;\boldsymbol{Z})$ の元が得られる．

定理 8.3 余次元 -1 の向き付けられた一般的な写像 $f : M \to N$ に対し，$\mathrm{III}^8(f)$ の閉包の表す $\boldsymbol{Z}$ ホモロジー類の Poincaré 双対の 3 倍は，$-f_!p_1(f) \in H^3(N;\boldsymbol{Z})$ に一致する．ここで $p_1(f) = p_1(f^*TN - TM)$ は形式的差束の第一 Pontrjagin 類である．言い換えれば，III^8 の Thom 多項式は Pontrjagin 類に対応する Landweber–Novikov 類 s_1 を用いて $-s_1$ で与えられる．

上の定理は次のように示される．まず捩れを無視して二つのコホモロジー類が一致することを言うために，定理 7.1 の証明と同様に，Thom の定理 [49] と普遍係数定理，そして Landweber–Novikov 類の引き戻しに関する自然性等用いて，$\dim N = 3$ の場合に証明を帰着できる．Hirzebruch の符号数定理 (たとえば [28] を参照) を用いると，この場合は本質的に定理 6.2 そのものであることがわかる．

捩れを込めて一致することは次のようにしてわかる．分類空間 $N\tau = \Omega^K MSO(K-1)$ が 2 連結であり，その 3 次元ホモトピー群は 4 次元の有向同境群 $\Omega_4 \cong \boldsymbol{Z}$ と同型であるので，Hurewicz の定理等より $H^3(N\tau;\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ であり，しかもこれが Landweber–Novikov 類 s_1 の 1/3 倍で生成されることがわかる．よって，特性類の自然性から求める結果が従うことになる．

注意 8.4 多様体をファイバーとするファイバー束に対しても，同様の意味での分類空間が構成でき，本節と類似の理論が §7 のような状況で展開できる．概略は [41, §6] に述べてあるが，本質的なアイデアは大本 [32, 33] による．

9 発展

9.1 ごく最近の進展

特異ファイバーの定式化は [39] でおそらく初めてなされた．その後，本論説でこれまでに解説したことの他にも，いくつかの場面で特異ファイバーが本質的役割を果たしている．ここではそうしたもののうち，これまでに言及しなかったもののいくつかを簡単に紹介しよう．

Kalmár は [11, 12] において，3 次元多様体から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への折り目写像のなす同境群を調べ，その構造を完全に決定している．結果的には，それは特異ファイバーというよりも，特異点集合への制限として得られるはめ込みが本質的に重要であることを示している．しかしそれを示すために，ファイバーの連結成分からなる空間，いわゆる商空間 (あるいは Stein 分解とも呼ばれる) を本質的に用いている．

さらに Kalmár は [13, 14] において余次元 -1 の折り目写像の同境群を調べている．その中で分類空間と Rimányi–Szűcs 流の一般化された Pontrjagin–Thom 構成の議論を用いて折り目写像の分類空間を考察し，そのホモロジー群を計算することで，折り目写像の同境群の階数が，特異ファイバーの普遍複体のコホモロジー群の階数と一致することが示されている．

これら二つの結果は，一般の特異写像の同境群を完全に記述するためには，特異ファイバー (ある意味で vertical なもの) だけを見ているだけでは不十分であり，特異点集合に制限した写像 (ある意味で horizontal なもの) も考慮する必要があること，そうは言っても特異ファイバーの方面からだけで

もかなり良い情報が得られること，の二つを意味している．

また，山本卓宏は [52, 54] の中で，いくつかの状況で特異ファイバーを分類し，対応する普遍複体のコホモロジーを具体的に計算している．その結果，特異写像に対してこれまで知られていなかった Euler 標数公式を得たり，これまで知られていた結果に新しい証明を与えたりしている．さらに [53] では，余次元が負の写像の特異点集合の像の補集合を 2 色で塗り分けることを考え，この塗り分けを込めたカテゴリーで，通常の特異ファイバーと同じ理論が展開できることを示している．これは特異ファイバーが値域多様体の単なる 1 点に対応していると考えるのではなく，その 1 点が値域多様体の中でどこにあるのかも考慮に入れていることになり，対応する分類は写像の大域的な性質を考慮に入れていることになる．今後はこうした大域的情報をどのように意味のある形で特異ファイバーに加味してゆくかを考えることが課題であろう．

なお §1.4 でも言及したように, 写像の局所理論への応用 [40], Vassiliev 型不変量への応用 [31, 34, 51] も得られている．

9.2 今後の期待

写像の特異点論のおそらくもっとも重要な特長はその汎用性にある．どんな多様体の上にも一般的な写像があるだけではなく，どんな写像も一般的な写像で近似できる．もちろん一般的であるが故に，多様体を与えてもその上の一般的な写像は一意的ではなく，逆に多すぎるくらいたくさん存在する．しかし，それらの間の関係は記述し易い．

こうした特長は多様体の不変量, あるいは写像の不変量を構成するにはとても好都合である．これは結び目理論における正則射影図と Reidemeister 移動，あるいは 3 次元多様体論における枠付き絡み目表示と Kirby 移動の状況に似ている．実際 Vassiliev は特異点理論を用いて結び目に対する Vassiliev 不変量を定義した [55].

本稿における特異ファイバーの理論を発展させると，上述のアイデアに沿って，一般次元の多様体に対する不変量が構成できることが期待される．Pontrjagin–Thom 構成により，どんな多様体も球面からある種の Thom 複体への写像による零切断の逆像として得られる．この写像が零切断に横断的ならば得られるものは多様体であるが，そうでなければ特異ファイバーのようなものが得られる．そこで ‘多様体のなす空間’ に特異ファイバーも付け加えた空間を考えることにより，Vassiliev 型不変量が定式化されることが大いに期待される．こうした不変量は，これまでに 3 次元多様体に対して定義されている有限型不変量と関係することが当然予想される．可微分写像の特異点論の汎用性により，この理論は他の次元にも適用できそうである．たとえば 4 次元で微分構造が区別できるような不変量ができるかどうかはとても興味深い問題である．

Pontrjagin–Thom 構成をたずねて可微分不変量を知る．温故知新が期待される．

謝辞

本稿で紹介した結果を得るために多くの方々にお世話になった．大本亨氏には特異ファイバーの $\mathcal{K}$ 同値の定義や分類空間の定式化を初め，多くの本質的な事柄を教えていただいた．本稿で紹介している結果のいくつかは大本氏によるものである．また Maxim Kazarian 氏には余次元が負の場合の分類空間について，親切に多くのことを教えていただいた．山本稔氏，Rustam Sadykov 氏，Boldizsár Kalmár 氏にはセミナー等において，Vassiliev 型不変量や分類空間等についての議論を通して多くの

ことを教えていただいた．András Szűcs 氏は特異写像の同境理論についていろいろと電子メールを通して議論していただき，また負の余次元を持つ写像の研究をいつも励ましていただいてきた．また，1999 年の近畿大学，2004 年の東京大学，2006 年の東京工業大学での連続セミナー・集中講義では参加者から多くの貴重なコメント，質問をいただき，そのおかげで新しい観点を多く得ることができた．特に ‘特異ファイバー’ の理論は近畿大学における連続セミナーに向けての講演準備をしているときに得たアイデアに基づいている．共同研究者の山本卓宏氏は，特異点論に関する事柄，及び特異ファイバーの分類や普遍複体のコホモロジーの計算を通して本質的な貢献をして下さった．最後に，査読者の方には原稿を丁寧に読んで下さり，多くの貴重なコメントをいただいた．著者の気が付かなかった本質的な点が多く指摘され，おかげで的確な修正をすることができたと思う．以上の方々にこの場を借りて心から感謝申し上げたい．

注　　釈

1) 日本語の解説としては [41, 42] 等もあり，筆者のホームページ http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/ にも置いてある．なお，可微分写像の特異点論については [2, 37] 等の論説もある．

2) 関数の特異点は通常，**臨界点**と呼ばれる．

3) 多様体上にベクトル場が与えられると，その特異点の情報から多様体の Euler 標数がわかることが Poincaré–Hopf の定理として古くから知られている．これも特異点が多様体の位相的性質と深く関わる例とみなせるが，ベクトル場の特異点の定義は少なくとも見かけ上は本稿での写像の特異点の定義とは異なるので，混乱を避けるためこの例に関する説明はここではしない．

4) この名称はあまり定着していないようだが，この用語を用意しておくと何かと便利である．

5) 本稿ではしばしば ‘一般に’ という言い回しを用いるが，これは ‘ジェネリックに’ と言い換えても構わない．‘ジェネリック’ とは，ジェネリックな対象全体が，考えている対象全体の空間の中で (適当な位相に関して) 稠密であることを意味する．可微分写像の特異点論では日常的に使われる言葉である．

6) $f^{-1}(y) \cap S(f)$ は一般に有限集合と考えて良い．

7) 余次元が 0 以下の写像に関してこうした 1 点の逆像全体に着目する本質的な仕事は，おそらく [31, 34] が最初ではないかと思われる．

8) ここでいう ‘色づけ’ とは特異ファイバーの分類を，‘模様’ とは stratification を，‘パーツ’ とはそこに現れる strata を指す．

9) コンパクトで境界のない多様体をここでは**閉多様体**と呼ぶ．

10) ちなみに §7 の状況では，ファイバー束の底空間がパラメータ空間となる．何をパラメータ空間とみなすのかが重要である．

11) 本稿では，特定の (良い性質を持つ) 特異点 (または特異ファイバー) のみを有する可微分写像，の意味で**特異写像**という言葉を用いる．

12) 特異写像の同境を最初に定式化したのは Szűcs [47] と Koschorke [22] であると思われる．

13) 可微分関数で，すべての臨界点が非退化であり，そこでの値がすべて異なるもののことを本稿では**Morse 関数**と呼ぶ．Morse 関数は一般的である．

14) 写像空間の中で少し動かしても，高々定義域・値域の微分同相写像 (または同相写像) を合成した程度の変化しか起こらない写像のことを**安定写像**(または $\boldsymbol{C^0}$ **安定写像**) と呼ぶ．これはある意味で Morse 関数の写像版である．特に定義域多様体がコンパクトのときは，C^0 安定写像は写像空間の中で開かつ稠密である．安定写像については [1, 3, 5] 等を参照されたい．

15) とは言っても作業はそれほど単純ではない．筆者は当初 III^8 を見落としていて，いくつか間違った公式を得てしまった経験がある．

16) 正確には N 内の台が閉であるサイクルである．M あるいは N がコンパクトであれば通常の意味でのサイクルとなる．

17) 細かいことではあるが，考えている曲面がコンパクトであることから，Poincaré 双対を取る前のホモロジー類は台が閉というよりも通常のホモロジー群 $H_0(\boldsymbol{R};\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ の元と考えられるので，それと Poincaré 双対の関係にあるコンパクトな台を持つコホモロジー群 $H^1_c(\boldsymbol{R};\boldsymbol{Z})$ の元が得られるのである．

18) 2 次元ホモロジー群の自由部分上に定義される交叉形式の正の固有値の個数から負のそれを差し引いて得られる整数のことである．

19) こうした具体例は，普遍複体のコホモロジーの非自明元が (4.2) を通して非自明なコホモロジー類を与えるかどうか，あるいは後に登場する (8.1) により非自明な特性類が得られるかどうかといった問題に対しても重要な役割を果たす．

20) $e_1(\pi)$ については，これら三氏よりも古くから知られていたものと思われるが筆者は良く知らない．

21) 正確に言うと，これでは捩れ部分を法として定理の主張が正しいことしか言えない．捩れ部分も込めて等しいことを言うには，閉曲面の写像類群の 2 次元コホモロジー群に捩れがないこと (たとえば [7, 21] を参照) が必要である．そのために種数の仮定を必要とする．このアイデアは森田茂之氏からご教示頂いた．

22) c_f を一般的に取って $f\tau$ と横断的であるようにした上で，$f\tau$ と c_f のファイバー積を取って得られる写像のこと．

23) Rimányi–Szűcs 流 [35] に特異ファイバーの分類空

間を構成することも可能であると思われるが，特異ファイバーの自己同型群を調べる必要があり困難が予想される．

24) 定義域多様体の向きの局所系と，値域のそれを引き戻したものの間に同型写像が与えられている，ということを意味する．

25) 正確には，τ 写像が写像空間の中で残留集合 (可算個の開かつ稠密な部分集合の共通部分) をなすとする．

文　献

[1] A. du Plessis and T. Wall, The geometry of topological stability, London Math. Soc. Monographs, New Series 9, Oxford Science Publ., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995.

[2] 福田拓生，微分可能写像の特異点論，数学，**34** (1982), 116–139.

[3] 福田拓生，西村尚史，特異点と分岐，特異点の数理2，共立出版，2002.

[4] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis and E. J. N. Looijenga, Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in Math., Vol. 552, Springer–Verlag, Berlin, New York, 1976.

[5] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[6] A. Haefliger et A. Kosinski, Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables, Séminaire H. Cartan, E. N. S., 1956/57, Exposé no. 8.

[7] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. Math., **72** (1983), 221–239.

[8] K. Ikegami, Cobordism group of Morse functions on manifolds, Hiroshima Math. J., **34** (2004), 211–230.

[9] K. Ikegami and O. Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces, J. Math. Soc. Japan, **55** (2003), 1081–1094.

[10] B. Kalmár, Cobordism group of Morse functions on unoriented surfaces, Kyushu J. Math., **59** (2005), 351–363.

[11] B. Kalmár, Pontrjagin–Thom construction for singular maps with negative codimension, Master Thesis, Eötvös Loránd University, 2005.

[12] B. Kalmár, Cobordism group of fold maps of oriented 3-manifolds into the plane, to appear in Acta Math. Hungar.

[13] B. Kalmár, Fold maps and immersions from the viewpoint of cobordism, preprint, 2006, arXiv:0705.2731.

[14] B. Kalmár, Pontryagin–Thom type construction for negative codimensional singular maps, preprint, 2006, arXiv:math.GT/0612116.

[15] M. È. Kazaryan, Hidden singularities and the Vasil'ev homology complex of singularity classes (in Russian), Mat. Sb., **186** (1995), 119–128; English translation in Sb. Math., **186** (1995), 1811–1820.

[16] M. É. Kazarian, Characteristic classes of singularity theory, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, pp. 325–340, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[17] M. E. Kazarian, The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory, Math. Scand., **82** (1998), 207–236.

[18] M. È. Kazarian, Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, **58** (2003), 29–88; English translation in Russian Math. Surveys, **58** (2003), 665–724.

[19] M. Kazarian, Thom polynomials, Singularity theory and its applications, Edited by S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada, T. Sano, Adv. Stud. Pure Math., **46** (2006), 85–135.

[20] M. Kobayashi, Two stable maps of $\boldsymbol{C}^2\mathrm{P}$ into $\boldsymbol{R}^3$, Mem. College Ed. Akita Univ. Natur. Sci., **51** (1997), 5–12.

[21] M. Korkmaz and A. Stipsicz, The second homology groups of mapping class groups of oriented surfaces, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **134** (2003), 479–489.

[22] U. Koschorke, Vector fields and other vector bundle morphisms—a singularity approach, Lecture Notes in Math., Vol. 847, Springer–Verlag, Berlin, 1981.

[23] L. Kushner, H. Levine and P. Porto, Mapping three-manifolds into the plane I, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **29** (1984), 11–33.

[24] H. Levine, Classifying immersions into $\boldsymbol{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\boldsymbol{R}^2$, Lecture Notes in Math., Vol. 1157, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[25] J. N. Mather, Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map germs, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **35** (1968), 279–308.

[26] J. N. Mather, Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R-algebras, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **37** (1969), 223–248.

[27] J. N. Mather, Stability of C^∞ mappings. V. Transversality, Advances in Math., **4** (1970), 301–336.

[28] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic classes, Annals of Mathematics Studies, No. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[29] 森田茂之，特性類と幾何学，現代数学の展開7，岩波書店，1999.

[30] T. Ohmoto, Vassiliev complex for contact classes of real smooth map-germs, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. Math. Phys. Chem., **27** (1994), 1–12.

[31] T. Ohmoto, Vassiliev type invariants of order

one of generic mappings from a surface to the plane, 実特異点のトポロジーとその関連話題，数理解析研究所講究録，**1006** (1997), 55–68.

[32] T. Ohmoto, Private communications, March 2005 and January 2006.

[33] 大本亨，Thom polynomials for multisingularities (Kazarian の仕事の紹介を中心に)，特異点における不変量，近畿大学，2005 年 6 月.

[34] T. Ohmoto and F. Aicardi, First order local invariants of apparent contours, Topology, **45** (2006), 27–45.

[35] R. Rimányi and A. Szűcs, Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities, Topology, **37** (1998), 1177–1191.

[36] R. Sadykov, Bordism groups of special generic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 931–936.

[37] 佐伯修，微分可能写像の大域的特異点理論の現状と展望，数学，**48** (1996), 385–399.

[38] O. Saeki, Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres, Japanese J. Math., **28** (2002), 287–297.

[39] O. Saeki, Topology of singular fibers of differentiable maps, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[40] O. Saeki, Cobordism of Morse functions on surfaces, the universal complex of singular fibers and their application to map germs, Algebr. Geom. Topol., **6** (2006), 539–572.

[41] 佐伯修，モース関数の特異ファイバーと曲面束の特性類，第 2 回 ‘トポロジー・代数幾何 玉原セミナー’ 報告集，2006.

[42] 佐伯修，山本卓宏，Theory of singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles, ‘リーマン面に関連する位相幾何学’ 予稿集，2005 年 9 月.

[43] O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds, Geom. Topol., **10** (2006), 359–399.

[44] O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers and characteristic classes, preprint, 2006.

[45] O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles, in preparation.

[46] R. E. Stong, Cobordism of maps, Topology, **5** (1966), 245–258.

[47] A. Szűcs, Analogue of the Thom space for mappings with singularity of type Σ^1 (in Russian), Mat. Sb. (N.S.), **108 (150)** (1979), 433–456, 478; English translation in Math. USSR-Sb., **36** (1979), 405–426 (1980).

[48] A. Szűcs, Cobordism of singular maps, preprint, 2006, arXiv:math.GT/0612152.

[49] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., **28** (1954), 17–86.

[50] R. Thom, Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **6** (1955–56), 43–87.

[51] M. Yamamoto, First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane, Proc. London Math. Soc., (3) **92** (2006), 471–504.

[52] T. Yamamoto, Classification of singular fibres of stable maps of 4-manifolds into 3-manifolds and its applications, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 721–742.

[53] T. Yamamoto, Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants, Doctoral Thesis, Hokkaido Univ., March 2006, available at `http://hdl.handle.net/2115/8465`

[54] T. Yamamoto, Euler number formulas in terms of singular fibers of stable maps, Real and complex singularities, Proceedings of the Australian–Japanese Workshop, World Scientific, 2007, pp. 427–458.

[55] V. A. Vassiliev, Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications, Translated from the Russian by B. Goldfarb, Translations of Math. Monographs, Vol. 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[56] V. A. Vassilyev, Lagrange and Legendre characteristic classes, Translated from the Russian, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 3, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.

(2007 年 3 月 26 日提出)
(2007 年 7 月 13 日修正版提出)
(さえき おさむ・九州大学)