SDEの脱確率論化

No. 1

Date '14 · 6 · 30

ラフパス入門（グビネリ流） 稲浜氏

（ライオニ流）

- T. Lyons (1998) 流 　ユニバーサリティ
- M. Gubinelli 流 (2004) 　(S. Tindel, M. Hairer)

→ 派生 regularity structure 理論 2013

特異 Stoch PDE のラフパス理論

Cf. Peter Friz & Martin Hairer（約100ページ）

（誤植，小ミス多し）

◎ Driven ODEs (controlled)

$x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ 　conti. "nice" とりあえず "piecewise C^1"

$\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,d)$

$b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 　"nice"

$$dy_t = \sigma(y_t)\,dx_t + b(y_t)\,dt, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ given}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = y_0 + \underbrace{\int_0^t \sigma(y_s)\,dx_s}_{\text{この線積分の値}} + \underbrace{\int_0^t b(y_s)\,ds}_{\text{ドリフト項（無害）}}$$

◎ 適当な枠組でイミがつけば，σ, b にまともな仮定をおくと，

$\forall x \ \exists!\, y$ (unique sol.) 　$x \longmapsto y$ （Itô map）

$x \in \exists$ path sp., 　$y \in$ path sp.

ex. 1 (1) x = piecewise C^1

$\Rightarrow$ $dx_t = x_t' dt$ O.K.

(2) x : 有界変動 (or 1-Hölder $\Longleftrightarrow$ Lipshitz)
かつ連続

$\Rightarrow$ $\exists$ Riemann — Stieltjes integral. $\int_0^t \sigma(y_s)\, dx_s$

(3) x : $\alpha = \frac{1}{p}$ Hölder conti. $\left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1\right)$

$\Rightarrow$ $\exists$ Young integral O.K.

◎ ODEの解法の定石 --- Picard 逐次近似

$$y(0)_t \equiv y_0 \quad (\text{定数})$$

$n \geq 1$ のときは

$$y(n)_\cdot = \int_0^\cdot \sigma\left(y(n-1)_s\right) dx_s$$

時間区間を縮めて、$(0 < T \ll 1)$
$[0, T]$
上では、(Lipshitz 定数) < 1 になっているので、

$$y(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \exists 1\, y \quad (\text{解})$$

◎ 確率論に応用したい。(Brown 運動)

$$(W_t)_{0 \leq t \leq 1} \quad : d\text{-dim. BM}$$

$$\mathbb{P}\left(\{ W \mid t \longmapsto W_t \text{ is } \alpha\text{-Hölder} \}\right) = 0 \quad \left(\alpha \geq \frac{1}{2}\right)$$

Young 積分は使えない。

◎ 通常の確率論の進行.

伊藤流のマルチンゲール確率積分

$$\int_0^t \sigma(y_s)\,dw_s \approx \sum_i \sigma(y_{t_{i-1}})\,(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})$$

with $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$

Ito's isometry

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(w_s)\,dw_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(w_s)|^2\,ds\right]$$

◎ a) pathwise な意味はない. ☹ $\mathbb{P}(\{w\}) = 0$

b) $w \longmapsto y(w)$ Ito map

には連続な version はない.

◎ 何が問題なのか?

(i) pathwise な線積分を定義したい.

⇑

パス空間 小 パス性質 良

(ii) Wiener 測度 (= BM) をパス空間にのせたい.

⇑

パス空間 大 パス性質 悪

(i), (ii) は矛盾しているとまでは言えないが, 反対方向.

両立できるのか?

☆ Sugita ('89), Lyons ('91?)

どのパス空間のノルムをとっても (i), (ii) は両立しない。

ラフパス理論の目的

$\left\{\begin{array}{l} \text{パス} \\ \text{線積分} \\ \text{ODE} \end{array}\right\}$ の概念を拡張して、$\underbrace{\text{SDE を deterministic にする。}}_{}$ (i), (ii) を両立させる予定。

(O)DE と測度の分離。
(S)DE

⑩拡張のやり方

パス x だけでなく、

$$(s, t) \longmapsto \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u$$

$$\parallel$$

$$\int_s^t \int_s^{t_2} dx_{t_1} \otimes dx_{t_2}$$

も組にして考える。

線形代数 $\Longrightarrow$ テンソル代数 (切り捨て)。

$$T^{(2)}_{(\mathbb{R}^d)} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2}$$

B. Young 積分

- [0, 1] 時間区間
- すべての関数は連続.
- $0 < \alpha \leq 1$ (Hölder 指数)　α : 大 ⇔ path の性質良い.

__定義__ $X : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|X\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ s \neq t}} \frac{|X_s - X_t|}{|s-t|^\alpha}$$

時刻 0 で 0 を仮定しないので セミノルム.

$Y : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\|Y\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ s \neq t}} \frac{|Y_{st}|}{|s-t|^\alpha}$$

セミノルム.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder norm}}}{\alpha} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variation norm}}}{\frac{1}{p}}$$

$\boxed{\text{定理 B1}}$ (Young 積分 = 準備運動)

$\alpha, \beta \in (0, 1]$ with $\alpha + \beta > 1$

$y \in C^\alpha([0,1], \mathrm{Mat}(n, d))$

$x \in C^\beta([0,1], \mathbb{R}^d)$

$\forall [s, t]$ を固定して

$$\left(I(\mathcal{P})_{st} := \right) \sum_{i=1}^{N} y_{t_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \qquad \text{where } \mathcal{P} = \{ 0 = t_0 < \cdots < t_N = t \}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_s^t y_u \, dx_u}_{\text{Young 積分}} := {}^{\exists}\lim_{|\mathcal{P}| \searrow 0} \sum_{i=1}^{N} y_{t_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

より詳しく

$$J_{st} = I(\{s,t\})$$

$$\left| \int_s^t y_u \, dx_u - y_s(x_t - x_s) \right| \leq 2^{\alpha+\beta} \zeta(\alpha+\beta) \|x\|_\beta \cdot \|y\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta} \quad — \triangle$$

$$= \int_s^t (y_u - y_s) \, dx_u$$

よって、

$$|y_s(x_t - x_s)| \leq (|y_0| + \|y\|_\alpha) \cdot \|x\|_\beta \cdot |t-s|^\beta$$

より、

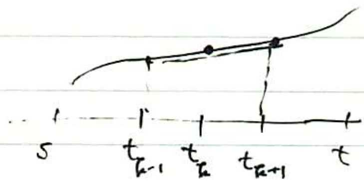
$$\int_0^\cdot y_u \, dx_u \text{ は } \beta\text{-Hölder}$$

特に、

$$C^\beta \times C^\alpha \ni (x,y) \longmapsto \int_0^\cdot y_u \, \underbrace{dx_u}_{\beta\text{-Hölder}} \in C^\beta$$

<u>proof.</u> (一点抜き論法)

$$I(\mathcal{P})_{st} = \sum_{i=1}^N J_{t_{i-1} t_i}$$



$\mathcal{P}$から(端ではない)1点 t_k $(k \neq 0, N)$ を抜くと、

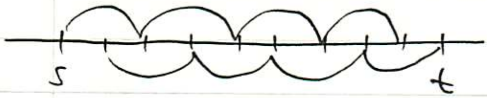
$$\left| I(\mathcal{P})_{st} - I(\mathcal{P} \setminus \{t_k\})_{st} \right| = \left| J_{t_{k-1} t_k} + J_{t_k t_{k+1}} - J_{t_{k-1} t_{k+1}} \right|$$

$$= y_{t_{k-1}}(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) + y_{t_k}(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) - y_{t_{k-1}}(x_{t_{k+1}} - x_{t_k})$$

$$= \left| (y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) \cdot (x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) \right|$$

$$\leq \|x\|_\beta \cdot \|y\|_\alpha \cancel{(t-s)^{\alpha+\beta}} \, (t_{k+1} - t_{k-1})^{\alpha+\beta}$$

$^\forall \mathcal{P}$ に対して $^\exists k = 1, 2, \ldots, N-1$ $\quad |t_{k+1} - t_{k-1}| \leq \frac{2}{N-1}|t-s|$



$$\left| I(\mathcal{P})_{st} - I(\mathcal{P}\setminus\{t_k\})_{st} \right| \leq \|y\|_\alpha \cdot \|x\|_\beta \left(\frac{2}{N-1}|t-s|\right)^{\alpha+\beta}$$

以下繰り返して自明な分割 $\{s, t\}$ になるまで繰り返す.

$$\left| I(\mathcal{P})_{st} - J_{st} \right| \leq \|y\|_\alpha \cdot \|x\|_\beta \; 2^{\alpha+\beta} |t-s|^{\alpha+\beta} \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N-1}\right)^{\alpha+\beta}$$

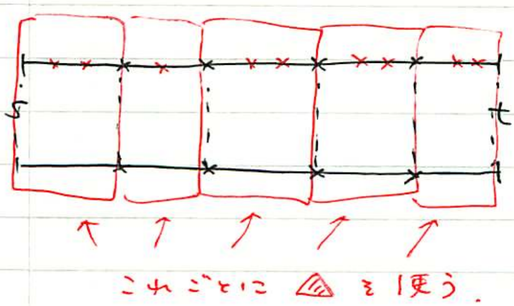
(iii) コーシー列であること.

$\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}}$: $[s,t]$ の分割. s.t. $|\mathcal{P}|, |\tilde{\mathcal{P}}| < \varepsilon$

$$(*) \quad \left| I(\mathcal{P})_{st} - I(\tilde{\mathcal{P}})_{st} \right| \leq (\mathrm{const}) \cdot \sum_i |t_i - t_{i-1}|^{\alpha+\beta}$$

$$\leq (\mathrm{const}) \cdot \varepsilon^{\alpha+\beta-1}$$

∵) (*) $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ としてよい. (必要あれば $\mathcal{P} \cup \tilde{\mathcal{P}}$ 達をとる.)



③ Young ODE について考える.

$\alpha = \beta > \frac{1}{2}$

$\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, d)$

$$dy_t = \sigma(y_t)\, dx_t$$

$$(\Leftrightarrow) \quad y_t = y_0 + \underbrace{\int_0^t \sigma(y_u)\, dx_u}_{\text{Young 積分}} \quad \cdots \quad (**)$$

定理 B2

$\sigma \in C_b^2$ とする. $\|\sigma\|_\infty + \|\nabla\sigma\|_\infty + \|\nabla^2\sigma\|_\infty < \infty$

$x \in C_0^\alpha([0,1], \mathbb{R}^d)$ ← 0 出発

に対して, $(**)$ の $\exists$ 一意解.

更に,

$C_0^\alpha \ni x \longmapsto y \in C^\alpha$ 　 Itô map.

はこの位相で局所リプシッツ写像.

∵) 方針　部分区間 $[0, T_1]$ 上で,

$$\begin{cases} y(0)_t = y_0 \\ y(n+1) = \int_0^\cdot \sigma(y(n)_s)\, dx_s \end{cases}$$

$\| y(n+1) - y(n) \|_\alpha \leq C\delta^n \quad (\exists \delta \in (0,1))$ 　を示す.

⑪ 解の延長

次は $[T_1, T_2]$ 区間で初期値 y_{T_1} の元で解いて、解をつなげる。

注. $\|\sigma\|_{C_b^\infty} < \infty$ より、$T_1, T_2, \cdots$ には初期値 y_0 の情報は含まれない。

$\Longrightarrow$ 有限回の手続きで global な解が得られる。

⑫ リプシッツ連続性

$y(n) = y(n; x, y_0)$ と $\tilde{y}(n) = y(n; \tilde{x}, \tilde{y}_0)$

の Hölder norm の差を各小区間 $[0, T_1]$ で地道に評価。

$\Downarrow$

全体区間に延長。

Rough path

$\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ $V = \mathbb{R}^d$, 時間 $[0,1]$

定義 $\overrightarrow{X} = (X, \mathbb{X})$ が α-Hölder rough path とは,

(i) $X : [0,1] \longrightarrow V$

(ii) $\mathbb{X} : [0,1]^2 \longrightarrow V \otimes V$

(iii) (Chen's identity)

$$\mathbb{X}_{st} = \mathbb{X}_{su} + \mathbb{X}_{ut} + X_{su} \otimes X_{ut}$$ (代数的条件)

where $X_{st} \overset{\mathrm{def}}{=} X_t - X_s$

(iv) $$\|X\|_\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{|X_{st}|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$ (解析的条件)

$$\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup_{s \neq t} \frac{|\mathbb{X}_{st}\|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$$

◎ $\mathcal{D}^\alpha([0,1], V)$

$:= \{ (X, \mathbb{X}) \mid \alpha\text{-Hölder RP over } V \}$

$$\rho_\alpha\left((X, \mathbb{X}), (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})\right) := \|X - \tilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} + |X_0 - \tilde{X}_0|_V$$

inhomogeneous α-Hölder metric

$(\mathcal{D}^\alpha([0,1], V), \rho_\alpha)$ --- 完備距離空間 (可分ではない.)

㊟ Lyonsの定義との違い（大差なし）

① $X_0 \neq 0$ でもよいとしている.

② $\mathbb{X}$ の定義域は $[0,1]^2$ ですが,

→ 3角形 $\{(s,t) \mid 0 \le s < t \le 1\}$ にとりかえても
Chen's identity のもとでは同値.

Ⓜ 滑らかなRP（最重要例）
= nice path の持ち上げ

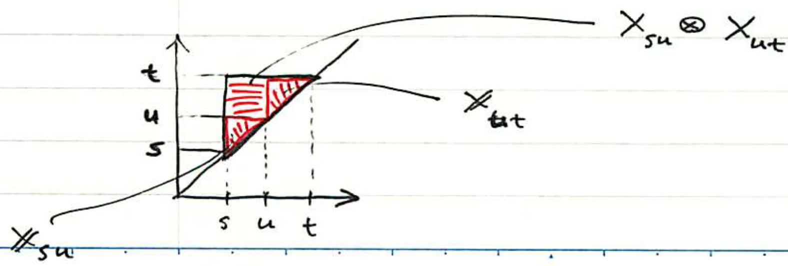
$X : [0,1] \longrightarrow V$ （Lipschitz-conti. or β-Hölder $\beta > \frac{1}{2}$）

このとき、

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{st} := \displaystyle\int_s^t (X_u - X_s) \otimes dX_u \\ \quad = \displaystyle\int_s^t \int_s^u dX_v \otimes dX_u \quad (s \le t) \\ \mathbb{X}_{st} := -\mathbb{X}_{ts} \quad (s \ge t) \end{cases}$$

RS or Young 積分の意味

☺ Chen's identity の確認.



このようにしてできる RP $(X, \mathbb{X})$ を

$$\begin{cases} \text{smooth RP lying above } X \\ X \text{の(自然な)リフト} \end{cases}$$

(注) ちなみに

$$\mathbb{X}_{st} \in V \otimes V$$

の symmetric part は

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{st}) = \frac{1}{2} X_{st} \otimes X_{st}$$

$$= \frac{1}{2}(x_t - x_s)^{\otimes 2}$$

X から定まるので新情報なし.

新情報は $\mathrm{Ant}(\mathbb{X}_{st})$ のみにある.

(三) Geometric RP

$$\mathcal{D}_g^\alpha([0,1] \to V) = \overline{\{\text{smooth RP}\}}^{\rho_\alpha\text{-metric}}$$

$\cup$ 可分完備距離空間

(三) 同値ですが、

$(X, \mathbb{X})$ が α-geom. RP $\iff$ $\exists \{(X(n), \mathbb{X}(n))\}_{n=1}^\infty$ (smooth RP)

s.t. $\rho_\alpha((X, \mathbb{X}), (X(n), \mathbb{X}(n))) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

話が前後するけど、

少なくとも $(X, \mathbb{X})$ が smooth $V\otimes V$ の anti-sym. part の basis

$$\{e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i\}_{i<j}$$

この基底に関する $\mathbb{X}_{st}$ の成分は

$$\frac{1}{2}\underbrace{\int_s^t\left\{(X_u^i - X_s^i)\,dX_u^j - (X_u^j - X_s^j)\,dX_u^i\right\}}$$

これを集合に入れて
これを自明な
evaluation と思う。

まさに 2次元のとき パスで囲まれる
Area の式

通常、確率論では、まさにこの例が
連続化できなかった。（cf. 杉田）

(III) 第2レベルの非一意性

Q. 同じ第1レベルの上に異なる第2レベルはありうるか？

(1) $\mathscr{C}^\alpha$ (geom. でない RP) で自明。

∵) $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$

$A \in V\otimes V$

$(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ を次で def.

$$\begin{cases} \tilde{X}_t := X_t \\ \tilde{\mathbb{X}}_{st} := \mathbb{X}_{st} + (t-s)A \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Chen's inequality をみたす。

(2) $\mathcal{D}_g^\alpha$ (geom. RP space) では?

$(\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2})$

$\Longrightarrow$ 非一意 (反例あり)

$\because)$ $d = 2$ $\quad (X, \mathbb{X}) \equiv (0, 0) \in \mathcal{D}_g^\alpha$ 定数ラフパス.

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}$

これ以外に $\quad Y_{st} = 0$

$$\mathbb{Y}_{st} = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (t-s)$$

とおくと, $\mathcal{D}^\alpha$ の元 $\Longrightarrow$ 非一意.

$$X(n) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \frac{1}{n} e^{2\pi i n^2 t}$$

このとき,

$$(X(n), \mathbb{X}(n)) \longrightarrow (Y, \mathbb{Y}) \in \mathcal{D}_g^\alpha$$

$X(n)$ の自然なリフト

⑾ $\mathfrak{D}_g^\alpha$ の正体？

結論： $\mathfrak{D}_g^\alpha$ = free nilpotent group of step 2 上の free path.

$$T^{(2)}(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \quad \text{(truncated tensor alg.)}$$

$$(\lambda, v, w) \otimes (\lambda', v', w')$$
$$= (\lambda\lambda', \lambda v' + \lambda' v, \lambda w' + \lambda' w + v \otimes v')$$

$$G^{(2)}(V) := \left\{ (1, a, b) \in T^{(2)}(V) \;\middle|\; \underbrace{\mathrm{sym}(b) = \frac{1}{2} a \otimes a}_{} \right\}$$

(free nilpotent group of step 2)

$\Updownarrow$
$b^{ij} + b^{ji} = a^i \cdot a^j \quad (\forall i, j)$
(成分で書くと)
shuffle product とも見なせる.

$G^{(2)}$ 上には 左右移動, 逆元, dilation というスカラー演算と相性がいい distance が存在. (d とかく.)

$$d\big((1, 0, 0), (1, a, b)\big) \approx |a| + |b|^{1/2}$$

α-Hölder
2α-Hölder とfit.

注 Chen's identity は $\otimes$ (in $T^{(2)}(V)$) で書ける.

$$(1, X_{st}, \mathbb{X}_{st}) = (1, X_{su}, \mathbb{X}_{su}) \otimes (1, X_{ut}, \mathbb{X}_{ut})$$

⑫ Fact

$$\{ (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{D}_g^\alpha \mid X_0 = 0 \}$$

$\updownarrow$ 1:1 対応

$$\{ g : [0,1] \longrightarrow G^{(2)}(V) \mid g_0 = (1, 0, 0),\ \alpha\text{-Hölder} \}$$

上の対応は $(X, \mathbb{X}) \longmapsto \left(t \longmapsto (1, \underset{\substack{\parallel \\ X_t}}{X_{0t}}, \mathbb{X}_{0t}) \right)$

逆に $(g_t)_{0 \le t \le 1} \longmapsto g_s^{-1} g_t \quad (s \le t)$

⑬ Lyons流 線積分の概略.

$f : V \longrightarrow L(V, W)$ $\quad (V = \mathbb{R}^d,\ W = \mathbb{R}^n,\ L(V,W) = \mathrm{Mat}(n,d))$

C^3級 ベクトル値 1-form.

$X : [0,1] \longrightarrow V$ (piecewise C^1 or Lipschitz)

$\int_0^t f(X_s)\, dX_s$ を考えたい.

$\int_0^\cdot f(X_s)\, dX_s$ は well-defined (W-valued path)

$\downarrow$ 積分写像を拡張したい.

Lyons流ではW値 $\mathscr{D}^\alpha$ の元 (Gubinelli 流では違う)

$\int f(X)\, d\vec{X}$ $\quad \vec{X} = (X, \mathbb{X})$ は geom. RP.

⑪ Heuristic $\quad s \le T$

$$\int_s^T f(X_u)\,dX_u \approx \underbrace{\sum_i f(X_{t_{i-1}}) \underbrace{X_{t_{i-1}t_i}}_{\text{差分}}}_{\text{通常リーマン和}}$$

$0 < t-s \ll 1$

$$\int_s^t f(X_u)\,dX_u \approx f(X_s) \underbrace{X_{st}}_{\text{差分.}}$$

$$\int_s^t f(X_u)\,dX_u - f(X_s)X_{st}$$

$$= \int_s^t \{ \underbrace{f(X_u) - f(X_s)}_{\text{Tayler 近似}} \}\,dX_u$$

$$= \underbrace{\int_s^t \nabla f(X_s) \langle X_u - X_s, dX_u \rangle}_{m} + \int_s^t \nabla^2 f(X_s) \langle X_u - X_s, X_u - X_s, dX_u \rangle$$

$\nabla f \in L(V, L(V, W))$
$\cong L^{(2)}(V, V; W)$
$\cong L(V \otimes V, W)$

$\nabla^2 f \in L(\underbrace{V \otimes V}{} \otimes V, W)$

sym. form.

修正リーマン和のタネ

$\Downarrow$

$$\nabla f(X_s) \cdot \mathbb{X}_{st} + \nabla^2 f(X_s) \mathbb{X}\mathbb{X}_{st} + \cdots \rightsquigarrow \int_s^t f(X_u)\,dX_u \approx f(X_s)X_{st} + \nabla f(X_s)\mathbb{X}_{st}$$

㊂ Lyons流ラフパスのまとめ

$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{D}_g^\alpha([0,1], V)$

$s \le t$

$$K^1_{st} = f(X_s)X_{st} + \nabla f(X_s)\mathbb{X}_{st} \in W$$

$$K^2_{st} = \underbrace{f(X_s)\otimes f(X_s)}_{\substack{\cap \\ L(V\otimes V,\, W\otimes W)}} \cdot \mathbb{X}_{st} \in W^{\otimes 2}$$

次は

$$Y^1_{st} := \lim_{|\mathcal{P}|\downarrow 0} \sum_{i=1}^{N} K^1_{t_{i-1}t_i}$$

$$\mathbb{Y}^2_{st} := \lim_{|\mathcal{P}|\downarrow 0} \sum_{i=1}^{N} \left\{ K^2_{t_{i-1}t_i} + Y_{st_{i-1}} \otimes Y_{t_{i-1}t_i} \right\}$$

とおく。$(Y, \mathbb{Y})$は存在して、$\mathcal{D}_g^\alpha([0,1]; W)$の元.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathbb{X}) \in \mathcal{D}^\alpha([0,1], V) \arrow[r, "\text{連続}", "\text{RP 積分}"'] & \mathcal{D}^\alpha([0,1], W) \ni (Y,\mathbb{Y}) \\
C_0^{1\text{-Hö}}([0,1], V) \arrow[u, "\text{lift}"] \arrow[r, "\text{連続}", "\text{RS 積分}"'] & C_0^{1\text{-Hö}}([0,1], W) \arrow[u, "\text{lift}"']
\end{tikzcd}$$

$X \in C_0^{1\text{-Hö}}([0,1], V)$, $\quad \int_0^\cdot f(X_u)\,dX_u \in C_0^{1\text{-Hö}}([0,1], W)$

㊁ ブビネリの考えたこと.

Lyons流 $\int f(X_u)\,dX_u$ integrandを一般化したい.

同じ

⓪ 復習

$\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ $\quad V = \mathbb{R}^d, \quad W = \mathbb{R}^n$

$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{D}^\alpha([0,1], V)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X : [0,1] \longrightarrow V \\ \mathbb{X} : [0,1]^2 \longrightarrow V \otimes V \\ \|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < \infty \\ \mathbb{X}_{st} = \mathbb{X}_{su} + \mathbb{X}_{ut} + X_{su} \otimes X_{ut} \end{cases}$$

$X_t - X_u$ 差分

<u>Lyons 流 積分</u>

$f : V \longrightarrow L(V, W) = \text{Mat}(n, d)$

$\vec{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{D}^\alpha([0,1], V)$

$\downarrow$ conti.

$\int f(x)\, d\vec{X} \in \mathcal{D}^\alpha([0,1], V)$

$L(V \otimes V, W) \cong L^{(2)}(V \times V, W) \cong L(V, L(V, W))$

$V \otimes V$

オ1レベルは

$$\int_s^t f(x)\, d\vec{X} = \lim_{|\mathcal{P}| \downarrow 0} \sum_i \left\{ f(X_{t_{i-1}}) X_{t_{i-1} t_i} + \nabla f(X_{t_{i-1}}) \mathbb{X}_{t_{i-1} t_i} \right\}$$

① Gubinelli による ラフパス積分の簡明化.

Lyons 流 $\quad \int f(x)\, d\vec{X}$

同じ X でそろっている.

$$\begin{cases} \int f(Y)\, d\vec{X} \\ \int Y \cdot d\vec{X} \end{cases}$$ はありうるか？ ‐‐‐ 一般にはありえない.

☆ **Gubinelli の idea.**

$^\forall \overline{X} = (X, \mathbb{X})$ を固定するごとに、被積分関数の Banach sp.

C_X^α ~~[0,1]~~ を定義する。

（特に $f(X)$ の形のものは C_X^α の元。）

この結果、この理論では　　この元を、Xによって制御される controlled path theory

$$C_X^\alpha([0,1], L(V,W)) \longrightarrow C_X^\alpha([0,1], W)$$

$$\Psi$$

$$(Y, Y') \longmapsto \left(\int Y dX, Y\right)$$

㋑ グビネリ理論の"ココロ"

$$\bigcup_{X \in \mathcal{D}_g^\alpha} C_X^\alpha \longleftarrow \text{"ベクトル束"}$$

$\mathcal{D}_g^\alpha$：∞-dim. 曲がった空間

C_X^α：$\overline{X}$ 上のファイバー Banach sp.

> **定義 D1**　$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{D}_g^\alpha([0,1], V)$
>
> $(Y, Y') \in C_X^\alpha([0,1], W)$
>
> $(\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow})$　$Y \in C^\alpha([0,1], W)$
>
> $Y' \in C^\alpha([0,1], L(V,W))$
>
> かつ
>
> $$Y_{st} = Y_s' \cdot X_{st} + R_{st}^Y \quad \in W$$
>
> と定義すると、$\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$

注 C_X^α には

・セミノルム

$\|Y, Y'\|_{X,\alpha} := \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$

・ノルム

$|Y_0| + |Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,\alpha}$

入れて、上のノルムで Banach sp.

Controlled path の例

① $Y : [0,1] \longrightarrow W$ 　 2α-Hölder

$Y' \equiv 0$ をえらぶと

$$R^Y_{st} = Y_{st} - \underbrace{Y'_s}_{=0} \cdot X_{st} \quad (2\alpha\text{-Hölder})$$

$$\therefore \quad (Y, 0) \in \mathcal{C}^{\alpha}_{X}([0,1], W)$$

② ラフパス自身

$$(X, \mathbb{X}) \in \Omega^{\alpha}_{g}([0,1], V)$$

$\Longrightarrow$ (X, Id_V) は controlled path over V

$$\because) \quad R^Y_{st} = X_{st} - \mathrm{Id}_V X_{st} = 0$$

③ 合成 (急所)

$$(Y, Y') \in \mathcal{C}^{\alpha}_{X}([0,1], W)$$

$$f : W \longrightarrow U \qquad C^2_b$$

$$\Longrightarrow \quad (f(Y), \qquad) \in \mathcal{C}^{\alpha}_{X}([0,1], U)$$

where $\quad f(Y)'_t := \underbrace{\nabla f(Y_t)}_{\in L(W,U)} \cdot \underbrace{Y'_t}_{\in L(V,W)} \in L(V,U)$

∵) テーラ展開による.

$$\hat{R}_{st} = f(Y)_{st} - \nabla f(Y_s)'_s \cdot X_{st}$$

$$= f(Y_t) - f(Y_s) - \nabla f(Y_s) Y_{st} + \nabla f(Y_s) \underbrace{(Y_{st} - Y'_s X_{st})}_{= R^Y_{st}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 d\theta\, \nabla^2 f(Y_s + \theta Y_{st}) \langle Y_{st} \otimes Y_{st} \rangle + \nabla f(Y_s) \langle R^Y_{st} \rangle$$

2α−Hölder

$$\Longrightarrow \|\hat{R}\|_{2\alpha} < \infty$$

(注) 合成をまじめに計算すると,

$$\|f(Y), f(Y)'\|_{X,\alpha} \leq C_\alpha \|f\|_{C_b^2} \left(1 + \|X\|_\alpha\right)^2 \times \left(|Y'_0| + \|Y, Y'\|_{X,\alpha}\right) \cdot \left(1 + |Y'_0| + \|Y, Y'\|_{X,\alpha}\right)$$

(注) 特に $(Y, Y') = (X, Id_V)$ ととると

$$(f(X), f(X)') \in C_X^\alpha$$

where

$$f(X)'_s = \nabla f(X_s) \cdot Id_V = \nabla f(X_s)$$

④ パスの接続

$$0 < T_1 < T_2 \le 1$$

$$(Y, Y') \in \mathcal{C}_X^\alpha([0, T_1], W)$$

$$(Z, Z') \in \mathcal{C}_X^\alpha([T_1, T_2], W)$$

s.t.

$$(Y_{T_1}, Y'_{T_1}) = (Z_{T_1}, Z'_{T_1})$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(Y, Y') * (Z, Z')}_{\text{パスの接続.}} \in \mathcal{C}_X^\alpha([0, T_2], W)$$

定理 D2. (Gubinelli) $\frac{1}{3} < \alpha \le \frac{1}{2}$, $\vec{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0,1], V)$

$$(Y, Y') \in \mathcal{C}_X^\alpha([0,1], L(V, W))$$

① 次の和は収束

I(P)st

$$\int_s^t Y_r \, d\vec{X}_r \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P| \downarrow 0} \boxed{\sum_i \left\{ Y_{t_{i-1}} X_{t_{i-1} t_i} + Y'_{t_{i-1}} \mathbb{X}_{t_{i-1} t_i} \right\}}$$

where $P = \{ s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t \}$

② $\exists C = C_\alpha > 0$ s.t.

自明分割 {s, t} に関する

修正リーマン和

$$\left| \int_s^t Y_r \, d\vec{X}_r - \left(Y_s X_{st} + Y'_s \mathbb{X}_{st} \right) \right|$$

$$\le C_\alpha \left(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha \right) |t-s|^{3\alpha}$$

③ The map

$$\mathcal{C}_X^\alpha([0,1], L(V, W)) \ni (Y, Y')$$

$$\downarrow \quad \text{bdd. linear}$$

$$\mathcal{C}_X^\alpha([0,1], W) \ni \left(\int_0^\cdot Y_r \, d\vec{X}_r, Y \right)$$

Bound

$$\left\| \int Y_r \, d\vec{X}_r, Y \right\|_{X,\alpha} \le \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|X\|_{2\alpha} + C\left(\|X\|_\alpha \cdot \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \cdot \|Y'\|_\alpha \right)$$

証明　② ~~の不等式を示せば十分~~ を研究する.

分割 $\mathcal{P}$ から 1点 t_i を除く. (s.t. $|t_{i+1} - t_i| \le \frac{2}{N-1}|t-s|$)

(A) $Y_{t_{i-1}} X_{t_{i-1} t_{i+1}} + Y'_{t_{i-1}} \mathbb{X}_{t_{i-1} t_{i+1}}$

$- \left(Y_{t_{i-1}} X_{t_{i-1} t_i} + Y'_{t_{i-1}} \mathbb{X}_{t_{i-1} t_i} \right)$ = (B)

$- \left(Y_{t_i} X_{t_i t_{i+1}} + Y'_{t_i} \mathbb{X}_{t_i t_{i+1}} \right)$

$$(A) = \cancel{\left(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} \right)} - Y_{t_{i-1} t_i} \times X_{t_{i-1} t_i}$$

$$= - \left(Y'_{t_{i-1}} X_{t_{i-1} t_i} + R^Y_{t_{i-1} t_i} \right) X_{t_{i-1} t_i}$$

$$(B) = Y'_{t_{i-1}} \underbrace{\left(\mathbb{X}_{t_{i-1} t_{i+1}} - \mathbb{X}_{t_{i-1} t_i} - \mathbb{X}_{t_i t_{i+1}} \right)}_{\substack{\| \ \text{chen} \\ X_{t_{i-1} t_i} \otimes X_{t_i t_{i+1}}}} + \left(Y'_{t_{i-1}} - Y'_{t_i} \right) \mathbb{X}_{t_i t_{i+1}}$$

$(\text{Const}) |t_{i+1} - t_i|^{3\alpha} \le (\text{const}) |t-s|^{3\alpha} \times \left(\frac{2}{N-1} \right)^{3\alpha}.$

よって, $\ge$

$$\left| I(\mathcal{P})_{st} - I(\mathcal{P} \setminus \{t_i\})_{st} \right| \le \left| R^Y_{t_{i-1} t_i} X_{t_i t_{i+1}} \right| + \left| Y'_{t_{i-1} t_i} \mathbb{X}_{t_i t_{i+1}} \right|$$

よって、1点ずつ自明な分割まで帰納的に

$$\left| I(P)_{st} - \left(Y_s X_{st} + Y_s' \mathbb{X}_{st} \right) \right|$$

$$\leq (\text{const.}) \times |t-s|^{3\alpha} \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{2}{N-1} \right)^{3\alpha}$$

となり欲しい不等式を得る。

<u>注</u>　オ1レベル $\int_0^{\cdot} Y_r \, d\vec{X}_r$ の $\|\cdot\|_\alpha$ に関する連続性も示せる。

∵) ギロンの中では、

- $Y_s X_{st} + Y_s' \mathbb{X}_{st} \quad (s \leq t)$
- $R^Y_{su} X_{ut} + Y_{su}' \mathbb{X}_{ut} \quad (s \leq u \leq t)$

よって、
$$\begin{cases} (X, \mathbb{X}) \fallingdotseq (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \\ (Y, Y', R^Y) \fallingdotseq (\tilde{Y}, \tilde{Y}', R^{\tilde{Y}}) \end{cases}$$

を仮定すれば、

$$\int_0^{\cdot} Y_r \, d\vec{X}_r \fallingdotseq \int_0^{\cdot} \tilde{Y}_r \, d\vec{\tilde{X}}_r$$

となり連続性もでる。

③ RDEの解釈 (ラフパスの意味のODE)

$f : W \longrightarrow L(V, W) \in C_b^3$

$\vec{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{D}^\alpha([0,1], V)$

$$\boxed{\begin{array}{c} dY = f(Y)\,d\vec{X} \qquad Y_0 = \xi \in W \\ \Updownarrow \\ Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r)\,d\vec{X}_r \\ \uparrow \text{Gubinelli積分.} \end{array}}$$

$(Y, Y') \in \mathscr{C}_X^\alpha([0,1], W)$ と考えて、この空間での

積分写像の不動点を調べる.

$$(Y, Y') \in \mathscr{C}_X^\alpha([0,1], W)$$
$$\downarrow$$
$$(f(Y), f(Y)') \in \mathscr{C}_X^\alpha([0,1], L(V, W))$$
$$\downarrow$$
$$\left(\xi + \int_0^\cdot f(Y_r)\,d\vec{X}_r,\ f(Y)\right) \in \mathscr{C}_X^\alpha([0,1], W)$$

復習

$(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,1], V)$

に対して、 ↙ $L(V,W)$

$(Y, Y') \in \mathscr{C}_X^\alpha([0,1], W)$

W^n

$$\begin{cases} Y_{st} := \underbrace{Y'_s}_{\alpha\text{-Hölder}} X_{st} + \underbrace{R^Y_{st}}_{2\alpha\text{-Hölder}} \\ \|Y, Y'\|_{X,\alpha} := \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha} \quad \cdots \text{セミノルム} \\ \|Y, Y'\|_{\mathscr{C}_X^\alpha} := |Y_0| + |Y'_0| + \|Y, Y'\|_{X,\alpha} \end{cases}$$

RDE $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}^n$

$f : W \longrightarrow L(V, W)$, C_b^3

$(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\beta([0,1], V) \quad \left(\frac{1}{3} < \beta \leq \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{dY = f(Y)\, d\vec{X}, \quad Y_0 = \xi \in \mathbb{R}^n}$$

この RDE (rough differential equation)

(Y, Y') $\quad$ $0 \leq T \leq 1$, $[0, T]$ (部分区間を考える.)

$\downarrow$

$(\Xi, \Xi') = (f(Y), f(Y)') = (f(Y), \nabla f(Y) \cdot Y')$

$\downarrow$

$$\mathcal{M}_T(Y, Y') := \left(\xi + \int_0^\cdot f(Y)\, d\vec{X}, f(Y)\right) = \left(\xi + \int_0^\cdot \Xi\, d\vec{X}, \Xi\right)$$

もし $(Y, Y') = \mathcal{M}_T(Y, Y')$ (不動点) ならば、

$\Longrightarrow$ $Y_0 = \xi$ かつ $Y_s' = f(Y_s)$ (特に $Y_0' = f(\xi)$)

実は不動点は

$$\left\{ (Y, Y') \in \mathcal{C}_X^\alpha([0,T], W) \;\middle|\; Y_0 = \xi,\ Y_0' = f(\xi) \right\}$$

という affine subspace で見つければよい。

$\mathcal{M}_T$ – inv.

定理 E1 $\frac{1}{3} < \beta \leq \frac{1}{2}$

$\xi \in W$, $f \in C_b^3(W, L(V, W))$

$\vec{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{D}_g^\beta([0,1], V)$

$\Longrightarrow$ $\exists!\ (Y, f(Y)) \in \mathcal{C}_X^\beta([0,1], W)$

s.t. $Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)\, d\vec{X}_s$ ← ラフパスの意味の積分方程式

i.e. $\mathcal{M}_1(Y, Y') = (Y, Y')$ という不動点が唯一存在。

証明 $\frac{1}{3} < \alpha < \beta$ ← サボリ流。

↑ βに非常に近くとる

$\mathcal{C}_X^\alpha$ のアフィン部分空間で 十分小さな $T \in (0,1]$ に対して、

↑ ξに無関係

$$\mathcal{M}_T(Y, Y') = (Y, Y')$$

を唯一つ見つける。

$$\begin{cases} \vec{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{D}_g^{\beta} \subset \mathscr{D}_g^{\alpha} \\ Y \in C_X^{\alpha} \end{cases}$$

$Y \in C_X^{\alpha}$ しかし C_X^{β} ? ⟸ 実は解ならば"

(Y, Y') は C_β^X 正則性をもつ.

$$\because)\ |Y_{st}| \leq |Y'|_\infty |X_{st}| + \|R^Y\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}$$

$$\leq |Y'|_\infty \|X_{st}\| |t-s|^{\beta} + \|R^Y\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha > \beta}$$

$$\Longrightarrow \|Y\|_\beta < \infty$$

次に $Y' = f(Y)$ β-Höl

最後に $|R^Y_{st}| = |Y_{st} - Y'_s X_{st}|$

$$\leq \left| \int_s^t (f(Y_r) - f(Y_s))\, d\vec{X}_r \right|$$

$$\leq |f(Y)'|_\infty \underbrace{|\mathbb{X}_{st}|}_{2\beta\text{-Höldr}} + O\left(|t-s|^{3\alpha > 2\beta}\right)$$

$\therefore$ $\|R^Y\|_{2\beta} < \infty$.

Ⓜ $\mathcal{B}_T := \left[t \longmapsto (\xi + f(\xi)X_t,\ f(\xi)) \right]$ を中心とした

$\underbrace{\text{アフィン部分空間中}}_{\cap\, C_X^\alpha}$の半径 1 の球

注 $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$

$(\Rightarrow)$ $Y_0 = \xi$, $Y_0' = f(\xi)$ $\qquad \|Y, Y'\|_{X,\alpha} \leq 1$

$$\underbrace{|Y_0 - \xi|}_{0} + \underbrace{|Y_0' - f(\xi)|}_{0} + \|Y - (\xi + f(\xi)X),\ Y' - f(\xi)\|_{X,\alpha} \leq 1$$

$$\|\xi + f(\xi)X, f(\xi)\|_{X,\alpha} = \underset{0}{\underset{\|}{\|f(\xi)\|_\alpha}} + \underset{0}{\underset{\|}{\|剰余\|_{2\alpha}}} = 0$$

以上をまとめると、

$$\mathcal{B}_T := \left\{ (Y, Y') \in C_X^\alpha([0,T], W) \;\middle|\; \begin{array}{l} Y_0 = \xi, \; Y_0' = f(\xi) \\ \|Y, Y'\|_{X,\alpha} \leq 1 \end{array} \right\}$$

よって、示すべきことは、$^\exists T \ll 1$ に対して

$$\begin{cases} \cdot\ \mathcal{M}_T(\mathcal{B}_T) \subset \mathcal{B}_T & \text{--- invariance.} \\ \cdot\ \mathcal{B}_T \text{ 上では } \mathcal{M}_T \text{ は contracting (i.e., } \gamma\text{-Lip. } (^\exists\gamma \in (0,1))) \end{cases}$$

invariance の証明

目標. $\|\mathcal{M}_T(Y, Y')\|_{X,\alpha} \leq {}^\exists C\, T^{\beta-\alpha}$

$$\left(^\forall (Y, Y') \in \mathcal{B}_T \right)$$

where $C = C(\alpha, \beta;\ \|f\|_{C_b^3},\ \|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha})$

indep. of ξ and T

$\boxed{\text{昨日 1}}$ 不等式

$$\|\Xi, \Xi'\|_{X,\alpha} = \|f(Y), f(Y)'\|_{X,\alpha}$$

$$\leq C\|f\|_{C_b^2} \Big(\underset{\|f\|_\infty}{\underset{\wedge\!\|}{|Y_0'|}} + \overset{\leq 1}{\|Y, Y'\|_{X,\alpha}} \Big) \Big(1 + |Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,\alpha} \Big)$$

$$\times\ (1 + \|X\|_\alpha)^2$$

$\boxed{\text{昨日2}}$ 不等式

$$\|\mathcal{M}_T(Y, Y')\|_{X,\alpha} = \left\| \int_0^\cdot \Xi_r \, d\vec{X}_r, \Xi \right\|_{X,\alpha}$$

$$\leq \|\Xi\|_\alpha + \|\Xi'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}$$

$$+ C\left(\|X\|_\alpha \cdot \|R^\Xi\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|\Xi'\|_\alpha\right)$$

$$\leq \|\Xi\|_\alpha + C\left(|\Xi_0'| + \|\Xi, \Xi'\|_{X,\alpha}\right) \cdot \left(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right)$$

$$\leq \|\Xi\|_\alpha + C\left(|\Xi_0'| + \|\Xi, \Xi'\|_{X,\alpha}\right) \times \left(\|X\|_\beta + \|\mathbb{X}\|_{2\beta}\right) T^{\beta-\alpha}$$

$\boxed{\text{昨日1}}$ で 0.K

$\because)$ $\vec{X}$ has β-regularity

$$f(Y)_0' = \nabla f(Y_0) \cdot Y_0' = \underbrace{\nabla f(\xi) \cdot f(\xi)}_{\|f\|^2_{C_b^3}}$$

後はこれをケアすればよい.

1°) $\|\Xi\|_\alpha = \|f(Y)\|_\alpha \leq \|f\|_{C_b^1} \cdot \|Y\|_\alpha$ より

以下で $\|Y\|_\alpha \leq {}^\exists C\, T^{\beta-\alpha}$ を示す.

$$\because) \quad |Y_{st}| \leq |Y'|_\infty \cdot |X_{st}| + \|R^Y\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}$$

$$\leq \left(\underset{\|f\|_\infty}{\underset{\wedge|}{|Y_0'|}} + \underset{1}{\underset{\wedge|}{\underbrace{\|Y'\|_\alpha}}}\right) \|X\|_\beta |t-s|^\beta + \underset{1}{\underset{\wedge|}{\underbrace{\|R^Y\|_{2\alpha}}}} |t-s|^{\overset{\beta}{\overset{\wedge}{2\alpha}}}$$

よって, $|t-s|^\alpha$ で割れば

$$\|Y\|_\alpha \leq {}^\exists C\, T^{\beta-\alpha}.$$

⚠ contraction の証明

目標.

$(Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{B}_T$

$0 < {}^{\exists} T \ll 1$

$$\| \mathcal{M}_T(Y, Y') - \mathcal{M}_T(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \|_{X,\alpha} \leq \frac{1}{2} \| Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}' \|_{X,\alpha}$$

セミノルム風だが
実は $\mathcal{B}_T$ 上では distance

∵) $(\Delta, \Delta') = (f(Y) - f(\tilde{Y}), f(Y)' - f(\tilde{Y})')$

とおくと,

初期値は一致

$$\| \mathcal{M}_T(Y, Y') - \mathcal{M}_T(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \|_{X,\alpha} \leq \|\Delta\|_\alpha + C \left(|\overset{=0}{\Delta_0'}| + \| \Delta, \Delta' \|_{X,\alpha} \right) \times \left(\|X\|_\beta + \|\mathbb{X}\|_{2\beta} \right) T^{\beta - \alpha}$$

$$\leq C \|f\|_{C_b^2} \left(1 + \underbrace{\|Y\|_\alpha \vee \|Y'\|_\alpha}_{\text{前ページで定数で抑えられる.}} \right) \|Y - Y'\|_\alpha$$

$$+ C \| \Delta, \Delta' \|_{X,\alpha} \left(\|X\|_\beta + \|\mathbb{X}\|_{2\beta} \right) T^{\beta - \alpha}$$

よって, 次を示せばよい.

$$\begin{cases} \|Y - Y'\|_\alpha \leq {}^{\exists} C \, T^{\beta - \alpha} \| Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}' \|_{X,\alpha} & \text{—} (*) \\ \| \Delta, \Delta' \|_{X,\alpha} \leq {}^{\exists} C \, \| Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}' \|_{X,\alpha} & \text{—} (**) \end{cases}$$

$(*)$ 式は先程の $\|Y\|_\alpha \leq \exists C T^{\beta-\alpha}$ をまねる ~~とよう~~ ~~とどまる~~ とどまる。

$$\|Y-\tilde{Y}\|_\alpha \leq \left(|Y_0-Y_0'| + \|Y-\tilde{Y}, Y'-\tilde{Y}'\|_{X,\alpha}\right)\|X\|_\beta T^{\beta-\alpha} + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} T^{\beta-\alpha}$$

$$\leq C T^{\beta-\alpha} \|Y-\tilde{Y}, Y'-\tilde{Y}'\|_{X,\alpha}$$

$(**)$ を示す。

$$g(y, \tilde{y}) := \int_0^1 \nabla f(\tau y + (1-\tau)\tilde{y})\, d\tau \in L(W\otimes V, W)$$

$$G_s = g(Y_s, Y_s'),\quad H_s := Y_s - \tilde{Y}_s \in W$$

すると、

$$\Delta_s = G_s H_s \qquad (\text{平均値定理})$$

$$\|g\|_{C_b^2} \lesssim \|f\|_{C_b^3}$$

$$(G, G') \in C_X^\alpha \quad \text{with} \quad G' = (\nabla_y g)\cdot Y' + (\nabla_{\tilde{y}} g)\tilde{Y}'$$

このとき、

$$\|G, G'\|_{X,\alpha} \leq C\|f\|_{C_b^3} \quad \text{uniformly over } \mathcal{B}_T$$

$$(GH, (GH)') \in C_X^\alpha \quad \text{with} \quad (GH)' = GH' + G'H$$

$$\|GH, (GH)'\|_{X,\alpha} \leq C\left(|G_0| + |G_0'| + \|G, G'\|_{X,\alpha}\right)$$

$$\|\Delta, \Delta'\|_{X,\alpha} \quad \times\left(\underset{\substack{\| \\ 0}}{|H_0|} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{|H_0'|} + \underbrace{\|H, H'\|_{X,\alpha}}_{\|Y-\tilde{Y},\, Y'-\tilde{Y}'\|_{X,\alpha}}\right)$$

$$\leq C' \|Y-\tilde{Y}, Y'-\tilde{Y}'\|_{X,\alpha}$$

Lyons の連続性定理の Gubi 的理解

$\boxed{\text{系 E2}}$ (Itô – Lyons map の連続性)

前と同じ仮定で RDE $\left(\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}\right)$

$$dY = f(Y)\,d\vec{X}, \quad Y_0 = \xi$$

を考える。

$$\begin{cases} (x, \mathbb{x}),\ (\tilde{x}, \tilde{\mathbb{x}}) \in \mathcal{D}^{\beta}([0,1], V) \\ (\|x\|_{\beta} + \|\mathbb{x}\|_{2\beta}) \vee (\|\tilde{x}\|_{\beta} + \|\tilde{\mathbb{x}}\|_{2\beta}) \leq M \\ \xi, \tilde{\xi} \in W \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|Y - \tilde{Y}\|_{\alpha} \leq {}^{\exists}C_M \left(|\xi - \xi'| + \|x - \tilde{x}\|_{\beta} + \|\mathbb{x} - \tilde{\mathbb{x}}\|_{2\beta}\right)$$

注：本当は $\alpha = \beta$ で成立する。

(サボりのへイ害)

⑫ Brownian RP

$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ $\left(\alpha \neq \frac{1}{2}\right)$

$(W_t)_{0 \le t \le 1}$: d-dim. BM

$m \in \mathbb{N}$

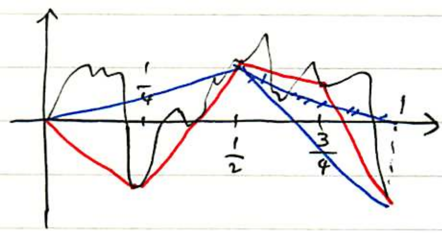
$$W(m) = W_{\frac{k-1}{2^m}} + 2^m \left(t - \frac{k-1}{2^m}\right) W_{\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}}$$

$$\left(\frac{k-1}{2^m} \le t \le \frac{k}{2^m}\right) \quad 1 \le k \le 2^m$$

要するに 2進分割

$$\left\{ \frac{k}{2^m} \;\middle|\; 0 \le k \le 2^m \right\}$$

に対応した折れ線



$W(m)$ は Lipshitz 連続

$\downarrow$

$(W(m), \mathbb{W}(m))$: $W(m)$ の自然なリフト (smooth RP lying above $W(m)$)

$\cap$

$\mathcal{D}^\alpha([0,1], \mathbb{R}^d)$

↑ ここに値をとる r.v. の列.

$\boxed{\text{定理F1}}$ $m \to \infty$ のとき

Brownian RP と呼ぶ. $\left(\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}\right)$

$$(W(m), \mathbb{W}(m)) \longrightarrow (W, \mathbb{W}) \quad \text{a.s. in } \mathcal{D}^\alpha\text{-topology}$$

$$\text{where } \mathbb{W}_{st} = W^{str}_{st} = \int_s^t (W_u - W_s) \otimes dW_u \quad \text{a.s.}$$

↑ stratonovich

実は $\bigcap_{1<q<\infty} L^q$ でも収束.

$\boxed{\text{定理F2}}$ $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, d)$, C_b^3

(RDE) $dY_t = \sigma(Y_t)\, d\overrightarrow{W}_t$, $Y_0 = \xi \in \mathbb{R}^n$

drift項 $b(y_t)dt$ がついても同じ.

この解の第1レベルは Stratonovich 型 SDE の解と a.s. に等しい.

(SDE) $dy_t = \sigma(y_t) \circ dW_t$, $y_0 = \xi$

注. 通常SDEの解が連続写像の像として手に入った.

∵) (定理F1) $\Longrightarrow$ (定理F2) を示す.

m: 有限のとき,

RDEの第1レベル = 通常 RS-ODE

つまり,

$$\begin{cases} dY(m)_t = \sigma(Y(m)_t)\, d\overrightarrow{W(m)}_t & \cdots \text{RDE} \\ dy(m)_t = \sigma(y(m)_t)\, dW(m)_t & \cdots \text{RS-ODE} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y(m)_t = Y(m)_t \quad (\forall t)$$

$$\begin{tikzcd} y(m)_t \arrow[d, "\text{a.s.}"'] & Y(m)_t \arrow[d, "m\to\infty"] \\ y_t & Y \end{tikzcd}$$

Wong-Zakai 近似定理

$m \to \infty$ $\begin{cases} \text{Lyons の連続性定理} \\ \overrightarrow{W(m)} \longrightarrow \overrightarrow{W} \quad \text{a.s.} \end{cases}$

↑

……本にはないが, 谷口-松本の本に短い説明がある.

(谷口さんがいないので残念. …… 編注)

以下，定理 F1 を示す．

Fritz-Victoir の証明？ お手軽だけど マルチンゲールを使うので，BMでない場合は使えないことがある．

命題F4 $\frac{1}{3} < \alpha < \beta$

$$\{(X(m), \mathbb{X}(m))\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_g^{\beta}([0,1], \mathbb{R}^d)$$

$$\sup_m \{\|X(m)\|_\alpha + \|\mathbb{X}(m)\|_{2\alpha} + |X_0(m)|\} < \infty$$

かつ

$\forall s, t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ に対して

$\{X(m)_t\}_{m=1}^{\infty}$ と $\{\mathbb{X}(m)_{st}\}_{m=1}^{\infty}$ は収束

$\Longrightarrow$ $\{X(m), \mathbb{X}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は $\mathcal{D}_g^{\alpha}$ − 位相で収束．

∵) ヘルダー位相の常識 + Ascoli-Arzela の定理． $\boxtimes$

命題 F3 (Kolmogorov criterion)

$q > 2$, $\frac{1}{q} < \beta \leq \frac{1}{2}$

$(X(\omega), \mathbb{X}(\omega))$ "random RP"

i.e.

$$\mathbb{X}_{st} = \mathbb{X}_{su} + \mathbb{X}_{ut} + X_{su} \otimes X_{ut} \quad \text{a.s.}$$

$$|X_{st}|_{L^q} \leq {}^{\exists}C|t-s|^{\beta}, \quad \|\mathbb{X}_{st}\|_{L^{q/2}} \leq {}^{\exists}C|t-s|^{2\beta}$$

$\Longrightarrow$ ${}^{\forall}\alpha \in [0, \beta - \frac{1}{q})$ ${}^{\exists}$version of $(X, \mathbb{X})$

${}^{\exists}K_\alpha \in L^q$, ${}^{\exists}\mathbb{K}_\alpha \in L^{q/2}$ s.t.
($K_\alpha \geq 0$, $\mathbb{K}_\alpha \geq 0$)

$|X_{st}(\omega)| \leq K_\alpha(\omega)|t-s|^{\alpha}$, $|\mathbb{X}_{st}(\omega)| \leq \mathbb{K}_\alpha|t-s|^{2\alpha}$

命題 F5 $W(m) = (W(m)^{1}, \cdots, W(m)^{d})$ $\mathbb{R}^d$の座標.

2進分割に対応する折れ線,

$$\mathcal{F}_m = \sigma\left\{ W_{\frac{k}{2^m}} \;\middle|\; 0 \le k \le 2^m \right\}$$

$$\Rightarrow \bigvee_m \mathcal{F}_m = \sigma\{ W_t \mid t \in [0,1] \}$$

① $\mathbb{E}[W_t^i \mid \mathcal{F}_m] = W(m)_t^i \quad (\forall i, t)$

② $\mathbb{E}\left[\int_0^t (W_u^i - W_s^i) \circ dW_u^j \;\middle|\; \mathcal{F}_m \right] = \mathbb{W}(m)_{st}^{ij}$

$(\forall i \neq j, \; \forall s \le t)$

∵) ① $\frac{k-1}{2^m} \le t < \frac{k}{2^m}$ のとき,

$$W(m)_t^i - W_t^i$$

$$= W(m)^i_{\frac{k-1}{2^m}} + 2^m\left(t - \frac{k-1}{2^m}\right) W^i_{\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}} - W_t^i$$

$$\perp\!\!\!\perp$$

$$\left\{ W_{\frac{k}{2^m}} \;\middle|\; 0 \le k \le 2^m \right\}$$

② も同様.

($i = j$ のとき $\mathbb{W}(m)_{st}^{ij} = \frac{1}{2}\left(W_{st}^{(m)i}\right)^2$

なので調べる必要なし.)

$W(m)_t^i \to W_t^i$ a.s.

$\mathbb{W}(m)_{st} \to \mathbb{W}_{st}$ a.s.

m について L^2-bdd. マルチンゲール なので

$$\mathbb{E}[W_t^i \mid \mathcal{F}_m] = W(m)_t^i \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left[W_t^i \;\middle|\; \bigvee_m \mathcal{F}_m\right] = W_t^i$$

命題F3 を $(W, \mathbb{W})$ に適用. $\left(\begin{array}{l}\beta = \frac{1}{2},\quad q: 十分大 \\ 0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\end{array}\right)$

L^q

$$\begin{cases} -K_\alpha(\omega)\,|t-s|^\alpha \le W^i_{st} \le K_\alpha(\omega)\,|t-s|^\alpha \\ -\mathbb{K}_\alpha(\omega)\,|t-s|^{2\alpha} \le \mathbb{W}^i_{st} \le \mathbb{K}_\alpha(\omega)\,|t-s|^{2\alpha} \end{cases}$$

$\cap$ $L^{q/2}$

両辺 $E[\cdot \mid \mathcal{F}_m]$ をとると,

$$-E[K_\alpha(\omega) \mid \mathcal{F}_m]\,|t-s|^\alpha \le W^i_{st}(m) \le \underline{E[K_\alpha(\omega) \mid \mathcal{F}_m]}\,|t-s|^\alpha$$

$\shortparallel$
M_m : L^q-bdd. Martingale

$$\sup E[K_\alpha(\omega) \mid \mathcal{F}_m] = \sup_m M_m = M^*_\infty$$

Doob 不等式.

$$E[|\sup_m M_m|^q] \le C_q\, E[|M_\infty|^q]$$

$$\therefore \quad \sup_m M_m = \sup_m E[K_\alpha \mid \mathcal{F}_m] < \infty \quad (a.s.)$$

よって,

$$\frac{|W(m)_{st}|}{|t-s|^\alpha} \le \underbrace{\sup_m M_m(\omega)}_{\omega のみ\ m には消えた.} < \infty$$

$\therefore$ a.a. ω. において, $\sup_m \|W(m)\|_\alpha < \infty$

同様に a.a. ω において, $\sup_m \|\mathbb{W}(m)\|_{2\alpha} < \infty$.

まとめると, a.a. ω において $\{W(m), \mathbb{W}(m)\}_{m=1}^\infty$ は $\mathcal{C}^\alpha$-top. で有界.

これらをまとめると

$\{W(m), \mathbb{W}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は $\mathcal{C}^{\alpha-\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ 位相で収束する.

$\frac{1}{2}$ より小の任意の数にとれる.

③ 大偏差原理について

(Large deviation prinicple)

$\boxed{\text{LDP}}$ $\mathcal{B} = C_0([0,1], \mathbb{R}^d) = \{ w : [0,1] \to \mathbb{R}^d \mid \text{conti.}\ w_0 = 0 \}$ Wiener sp.

$\cup$

$\mathcal{H} = \{ h \in \mathcal{B} \mid h = \text{abr. conti.}\ \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\dot{h}\|_{L^2} < \infty \}$

Cameron − Martin

μ = Wiener space

$\mu_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} [w \mapsto \varepsilon w]_* \mu \quad (\varepsilon > 0)$

$\Longrightarrow$ LDP with a good rate function I holds

$$I(w) := \begin{cases} \frac{1}{2} \|w\|_{\mathcal{H}}^2 & \text{if } w \in \mathcal{H} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{(rate function)}$$

$^\forall A \subset \mathcal{B}$ (Borel)

$$-\inf_{h \in A^\circ} I(h) \leq \varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log \mu_\varepsilon(A^\circ) \leq \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log \mu_\varepsilon(\bar{A})$$
$$\leq -\inf_{h \in \bar{A}} I(h)$$

$$(\stackrel{\cdot}{\Longleftrightarrow}) \quad \mu_\varepsilon(A) \approx e^{-\varepsilon^{-2} \inf_{w \in A} I(w)}$$

LDP (Fredlin − Wentzell)

$\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, d)$ C_b^3

$$\begin{cases} dy_t^\varepsilon = \sigma(y_t) \circ \varepsilon\, dw_t \\ y_0^\varepsilon = \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\nu^\varepsilon \overset{\text{def}}{=}$ the law of $y_\cdot^\varepsilon$ ← $\mathbb{R}^n$上のパス空間上のmeas.

$\phi = \phi(h)$ を次で def.

$$\boxed{d\phi_t = \sigma(\phi_t)\, dh_t, \quad \phi_0 = \xi} \quad \text{RS-ODE}$$

<u>rate function</u>

$$J(z) = \begin{cases} \inf\left\{ \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \;\middle|\; h \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \phi(h) = z \right\} \\ \infty \qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと，$\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は good rate function J に対して LDP をみたす． (FW − LDP)

- 離散近似 + exp. good. approx.
- Dupuis's ~~[illegible]~~ variation method
- Ledoux − Qian − Zhang (2002)

によるRP的証明.

Lyons の連続性定理 + contraction principle

㊟ 通常の伊藤 map は連続でない. ⟶ contraction principle は使えない.

でも形式的に使った結果となぜか一致していた.

LDP (Ledoux - Qian - Zhang)

$\mathcal{D}_g^\alpha([0,1], \mathbb{R}^d)$ $\left(\frac{1}{3} < {}^\forall\alpha < \frac{1}{2}\right)$

$$\hat{\mu}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \text{the law of } (\varepsilon W, \varepsilon^2 \mathbb{W}) = \underset{\text{dilation}}{\varepsilon \cdot} \vec{W}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}_g^\alpha([0,1], \mathbb{R}^d)$$

$\mathcal{L}$: 自然なリフト

$$\hat{I}((X, \mathbb{X})) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 & \text{if } (X, \mathbb{X}) = \mathcal{L}(h) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき、$\varepsilon \downarrow 0$ で

$\{\hat{\mu}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は good rate function $\hat{I}$ に対して

$\mathcal{D}_g^\alpha$ − top. で LDP をみたす。

→ Schilder 型 LDP

しかし、$\vec{X} = (X, \mathbb{X}) \overset{\text{conti}}{\longmapsto} Y(\vec{X})$

$\vec{X} \in \mathcal{D}^\alpha$, $Y(\vec{X}) \in C^\alpha([0,1], \mathbb{R}^n)$

→ RDEの解のオイレベル。

特に CM 空間に制限すると、

$$\vec{X} = \mathcal{L}(h) \longmapsto \phi(h)$$

以上をまとめて、LDP の contraction principle を使うと、

FW − LDP は直ちに示せる。