

1-①

集中講義 お知らせ

9/1 10:45 ~ 11:45 13:15 ~ 14:45 ± α

9/2 ~ 9/5 13:15 ~ 16:30 ± α

↳ 午前中はやらない。

レポート: 講義中に於いた問題を2題以上解答

9/12まで, 提出場所:

§1 インタロダクション

1.1 講義の目標

Process

完全非対称単純排他過程 (Totally Asymmetric Simple Exclusion) TASEP

離散時間, right sequential update.

$t = 0, 1, 2, \dots$

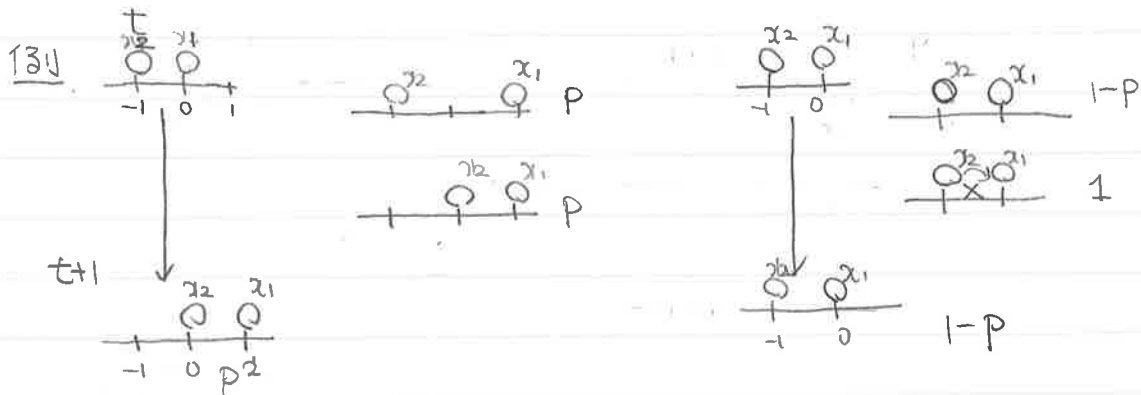


• 各サイトに粒子は1つしか占有できない。

• 粒子は右隣が空いていれば確率 p でホップ, 確率 $1-p$ でとどまる。

• 右隣が他の粒子によって占有されていれば, 粒子は動かない。(排他効果)

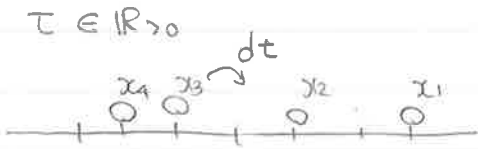
• 各時間ステップ t における アップデートは右側の粒子から順に行う。



問1-1 の他に $t+1$ で可能な配置は? また, そのときの確率は?

1-②

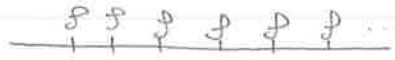
連続時間 TASEP



各粒子はレート1で、右に移動。
右が空いていない場合は動かさない
排他効果。

TASEP

定常状態 (無限系)



Bernoulli product measure

定常状態の解析

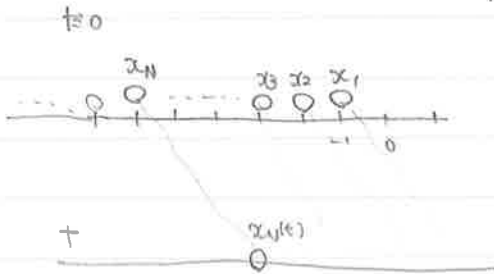
確率

行列積の手法 (Derrida et al 1997 -)
可解模型

流体力学極限 (Varadhan 1990's -)
バグース方程式

④ 非定常状態 (2000 ~)

1次元分子図鑑



$$x_j(0) = -j$$

$x_N(t)$: 右から N 番目の粒子の時刻 t における位置

Johansson (2000)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_{N,t}(t) \leq A t + B t^{1/3} s) = \det(1 - K_2 P_s)_{L^2(\mathbb{R})}$$

$t^{1/3}$: Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 普遍クラス

1-③

• GUE Tracy-Widom 分布. (Tracy-Widom 1994)

$$\det(1 - K_2 P_s)_{L^2(\mathbb{R})} \stackrel{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k)}{k!} \prod_{m=1}^k \int_0^{\infty} dx_m P_s(x_m) \det(K_2(x_i, x_j))_{i,j=1}^k$$

Fredholm determinant

$$K_2(x_i, x_j) = \int_0^{\infty} dy A_i(x_i + y) A_j(x_j + y) dy, \quad P_s(x_m) = \mathbb{1}_{(s, \infty)}(x_m)$$

または.

$$\det(1 - K_2 P_s)_{L^2(\mathbb{R})} = \det(1 - K_S)_{L^2(\mathbb{R}_{>s})} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k)}{k!} \prod_{m=1}^k \int_0^{\infty} dx_m \det(K_S(x_i, x_j))_{i,j=1}^k$$

$$K_S(x_i, x_j) = \int_s^{\infty} dy A_i(x_i + y) A_j(x_j + y) \quad \text{とこの表示もある.}$$

この分布は ランダム行列理論の ^(小)最大固有値分布として 最初に導かれた。

$x_1, \dots, x_N \leftarrow N \times N$ ランダム行列の固有値 確率密度関数は

$$P(x_1, \dots, x_N) = \frac{\prod_{j=1}^N e^{-x_j^2} \cdot \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2}{Z}$$

↑
準位反発.

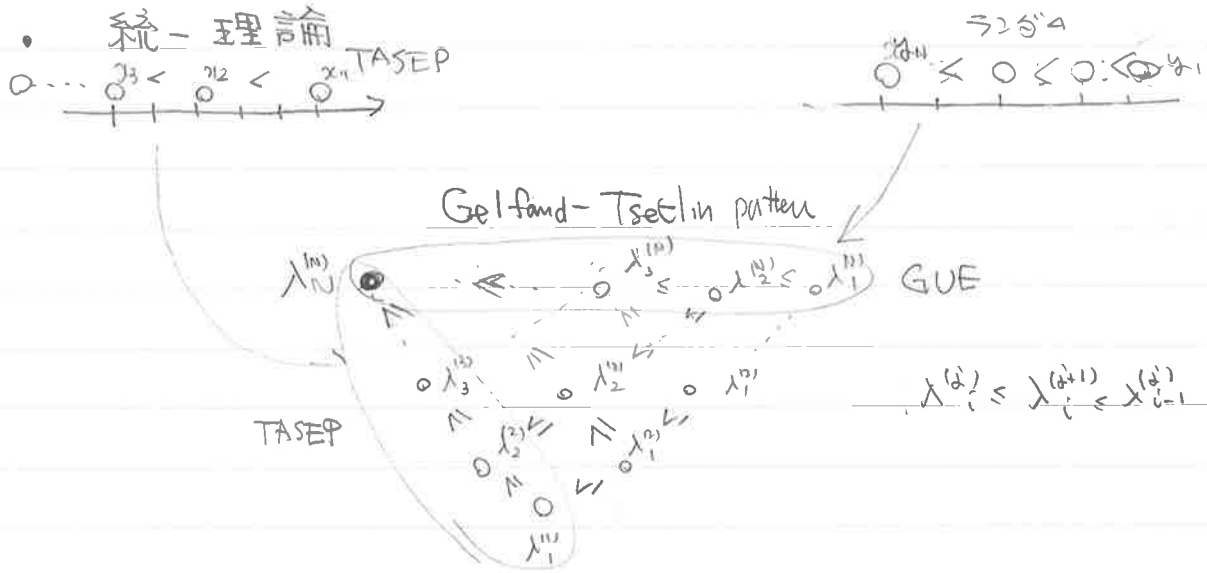
で与えられる。このとき.

$$P((x_1 - \sqrt{2N}) N^{1/6} \leq s) = \det(1 - K_2)_{L^2(\mathbb{R})}$$

Tracy-Widom \leftarrow Painleve 表示.

$$(\text{TASEP の 粒子 の ゆらぎ}) = (\text{ランダム行列の最大固有値 (小) のゆらぎ})$$

1-④



λ_N^N \odot TASEPのN番目
= 229417311の最大固有値

• G-T pattern 上の確率過程

1. Robinson - Schsted - Knuth (RSK) 対応
Birk-Deift-Johansson (1999)
Johansson (2000)
O'Connell (2002-)

- ② Warren (2005)
Warren-Wardridge (2009)

○ Borodin-Ferrari (2008) → Schur process を用いて
証明してる。
§2 前半

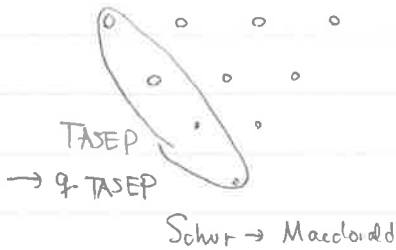
• 2つの発展 (2010-)

- 1 RSK \rightarrow geometric RSK
Kirillov, Noumi-Yamada (2000-)

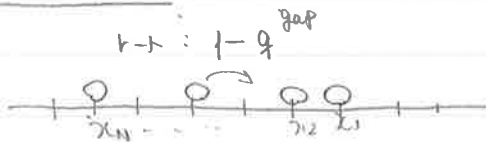
○ O'Connell (2010) \leftarrow Quantum Toda
○ Corwin-O'Connell-Seppäläinen-Zygouras (2011)

1-⑤

② Schur \rightarrow Macdonald
(q -Whittaker) Borodin-Corwin (2011 -)
et al
GT dynamics § 2 後半.



q -TASEP



gap : 前の粒子との間隔

$q \rightarrow 0$ \subset TASEP.

Fredholm det formula. § 3

$$\left\langle \frac{1}{(q^{x_N+N})_{\infty}} \right\rangle_{q\text{-TASEP}} = \det(1 + K_{\mathbb{Z}})_{L^2(\mathbb{C}^1)} \quad \text{1.2.11.13}$$

$$= \sum \frac{1}{k!} \prod_{m=1}^k \int_{\mathbb{C}^1} d w_i \det(K_{\mathbb{Z}}(w_i, w_j))_{i,j=1}^k$$

確率分布の q -Laplace 変換

$$K_{\mathbb{Z}}(w_i, w_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty+\delta}^{i\omega+\delta} (1-s)\Gamma(1+s)(-s)^s g_{w_i, w_j}(q^s) ds$$

$$g_{w_i, w_j}(z) = \frac{1}{z w_i - w_j} \frac{(z w_i - q)_{\infty}^N}{(w_i^2 - q)_{\infty}} e^{(z-1)\epsilon w_i}$$

q -TASEP の弱相互作用極限 § 4.

$q \rightarrow 1$

$$q^{x_N+N} \xrightarrow{\text{5.1}} Z_N(t) \xrightarrow{\text{5.2}} Z(x, t) =$$

Stochastic heat equation. $\tilde{Z}(x, t) = e^{-t} Z(x, t)$

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, t) + \eta(x, t) Z(x, t)$$

1-⑥

Cole-Hopf 変換, $Z(x,t) = e^{h(x,t)}$

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \partial_x^2 h + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 + \eta \leftarrow \text{Kardar-Parisi-Zhang 方程式, KPZ.}$$

KPZ 方程式 (§5)

- Sasamoto-Spohn, Amir-Corwin-Quastel (2010)

KPZ 方程式の高次元分布の厳密解.

- KPZ 方程式の正則化

⊙ Cole-Hopf 解. (Bertini - Giacomin) 1997

- Hairer 解法 (Rough-path, regularity structure) 2012 =

⊙ L⁽⁰⁾ 法. $h(x,t) = \frac{-t}{24} + r_c x^2 + \tilde{h}(x)$
 $r_c = (\frac{t}{2})^{1/3}$.

$$G_{r_c}(s; x) = \langle e^{-e^{r_c}(\tilde{h}(x) - s)} \rangle$$

$$= \det(1 - L_3)_{L^2(\mathbb{R}_{>0})}$$

$$L_3(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dy A_i(z_1 + y) A_i(z_2 + y) \frac{1}{e^{r_c(s-y)^2} + 1}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \Theta(s - \tilde{h}(x)) \rangle = \text{Prob}(\tilde{h} < s)$$

$$= \det(1 - K_2) \leftarrow \text{GUE TW.}$$

1-⑦

1-2. GUE Tracy-Widom 分布と Fredholm 行列式.

- Ref. M.L. Mehta "Random Matrices"
P.J. Forrester "Log-gases and Random matrices"
永尾太郎 「→ 3'4 行列の基礎」

Tracy and Widom J. Stat. Phys., 92, 809, 1998

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

$H: N \times N$ エルミート行列.

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + ib_{12} & \dots & a_{1N} + ib_{1N} \\ a_{12} - ib_{12} & a_{22} & \dots & a_{2N} + ib_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} - ib_{1N} & a_{2N} - ib_{2N} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

平均 0, 分散 1
 $a_{ij} \sim N(0, 1)$ 正規分布.
 $b_{jk} \sim N(0, \frac{1}{2})$
 $j < k$

• 確率密度

$$c \prod_{i=1}^N e^{-a_{ii}^2} \prod_{j < k} e^{-2a_{jk}^2 - 2b_{jk}^2} = c e^{-\text{Tr} H^2}$$

• 固有値の確率密度

$H = U X U^+$ $x = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$

$$c \cdot e^{-\text{Tr} H^2} dH = e^{-\sum_{j=1}^N x_j^2} \underbrace{J}_{\text{Jacobian}} dU dx$$

$$J \propto \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$$

• Gaussian Ensemble

相関の表す行列

$$P(x) dx \propto e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{i < k} |x_i - x_k|^\beta$$

$\beta = 1$. Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) H : 実対称行列

2 " Unitary " (GUE) H : エルミート

4 " Symplectic " (GSE) H : 自己対称エルミート

1-8

• 応用 量子力学, X^2 スポ. 係数, 2次元電力
確率過程.

相関関数 GUE の 確率密度

$$P(x) := e^{-\sum x_j^2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2. \quad \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i) = \det (x_j^{i-1})_{i,j=1}^N$$

$$= \det (\varphi_i(x_j)) \det (\phi_i(x_j))$$

where $\varphi_i(x_j) = \phi_i(x_j) = e^{-x_j^2/2} x_j^{i-1}$

∴

$$Z[g] := \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \prod_{i=1}^N (1 + g(x_i)) \times P(x).$$

この量を考えよう.

e.g.1 $g = -\chi_{(a,b)}(x)$, $\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in (a,b) \\ 0 & \text{for } x \notin (a,b) \end{cases}$

$\frac{Z[g]}{Z[0]}$: 区間 (a,b) の間に粒子が 1つもいない確率.

特に $a = s, b = \infty$ とすると

$\frac{Z[g]}{Z[0]}$: 最大固有値が s 以下である確率.

∴ $\frac{Z[g]}{Z[0]} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \prod_{m=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} dx_m g(x_m) \times P_k(x_1, \dots, x_k)$

where $P_k = \frac{N!}{(N-k)!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{k+1} \dots dx_N \frac{P(x)}{Z[0]}$

k 体相関関数

Thm

$$\frac{Z[g]}{Z[0]} = \det(1 + gK)_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{Fredholm det.}$$

$$\langle x_i, x_j' \rangle = \sum_{\ell, m=1}^N \phi_\ell(x_i) A_{\ell m}^{-1} \varphi_m(x_j')$$

$$A_{\ell m} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\ell(x) \varphi_m(x) dx.$$

注

$P_k = \det(\langle x_i, x_j' \rangle)_{i,j=1}^k$ k 点相関関数が $k \times k$ の行列式で表わされる。

行列式過程.

Shirai-Takahashi (2002)

Soshnikov (2000)

$$\therefore Z[g] = \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N \prod_{i=1}^N f(x_i) P(x_i)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Heine identity} \quad & \frac{1}{N!} \int \det(A_{ij}(x_i)) \det(B_{ij}(x_j')) dx_1 \cdots dx_N \\ & = \det\left(\int dx A_j(x) B_j'(x)\right)_{i,j=1}^N \end{aligned}$$

これを用いると.

$$\begin{aligned} Z[g] &= \det\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + g(x)) \phi_j(x) \phi_k(x)\right) \\ &= \det\left(A_{jk} + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi_j(x) \phi_k(x)\right) \\ &= \underbrace{\det A_{jk}}_{Z[0]} \cdot \det(\delta_{jk} + (b+c)_{jk}) \end{aligned}$$

$$\text{trivial } b(i;x) = \sum_j A_{ij}^{-1} \phi_j(x), \quad c(x;j) = \phi_j(x)$$

$$b+c = \int dx b(i;x) c(x;j)$$

1-⑩

② $B: L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2)$ の積分演算子と仮定.
 $C: L^2(\Omega_2) \rightarrow L^2(\Omega_1)$

$$\det(1 + B + C)_{L^2(\Omega_1)} = \det(1 + C * B)_{L^2(\Omega_2)}$$

∴ Fredholm det ① と相当 //

② を用いると.

$$\frac{Z[Cf]}{Z[0]} = \det(1 + C * b)_{L^2(\mathbb{R})} //$$

直交多項式

GUE の場合 $P(x) = \det \phi_c(x_j) \times \det \phi_c(x'_j)$

$$\phi_\ell(x) = \phi_{\ell+1}(x) = e^{-x^2/2} x^{\ell-1}$$

$$\det \phi_c(x_j) = \prod_{i=1}^N e^{-x_i^2/2} \det(x_e^{m-1}) = \prod_{j=1}^N e^{-x_j^2/2} \det(x_e^{m-1} + \overbrace{a_1 x_e^{m-2} + \dots + a_{\ell-1}})$$

$x_e^{m-1} \rightarrow x_e^{m-1} + a_1 x_e^{m-2} + \dots + a_{\ell-1}$ と変換 $P(x)$ は変化する。

Clever choice

$$\phi_\ell(x) = h_{\ell-1}(x) e^{-x^2/2} \quad h_\ell(x) = \frac{H_\ell(x)}{2^\ell} \quad H_\ell(x): \ell \text{ 次の Hermite 多項式}$$

$$A_{\ell m} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\ell(x) \phi_m(x) dx = h_\ell \delta_{\ell, m} \quad h_\ell = \frac{2^\ell \sqrt{\pi}}{2^\ell}$$

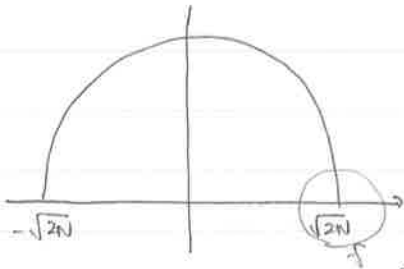
$$\therefore K(x, y) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{h_{\ell-1}} e^{-\alpha^2(x^2+y^2)/2} h_{\ell-1}(x) h_{\ell-1}(y)$$

インテグラル

1-⑪

漸近形

固有値密度 $\rho_1(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty}$ semi-circle law.



edge scaling

上の

$g(x) = -\chi_{(s, \infty)}$ と置く $s = \sqrt{2N} + N^{1/6} \tilde{s}$ $\tilde{s} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$)

$\frac{Z[g]}{Z[0]} = \text{Prob}(x_1 \leq s) = \det(1 + K_1)_{L^2(\mathbb{R})}$

$\xrightarrow{\text{edge scaling}} \det(1 + K_2)_{L^2(\mathbb{R})}$

Tracy-widom 分布

$K(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{h_l} e^{-(x^2+y^2)/2} h_{l-1}(x) h_{l-1}(y)$

$\rightarrow K_2(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} d\lambda A_i(z_1 + \lambda) A_i(z_2 + \lambda)$

注

GUE だけでなく、行列式の手続きで書ける weight

$P(x) = \det(\phi_i(x_j)) \det(\phi_i(x_j))$

の場合は行列式過程である。 $\frac{Z[g]}{Z[0]}$ が Fredholm と なることが分かる

e.g. $P(x) = S_x(a) S_x(b)$ ← \rightarrow 自由

Schur name Okounkov (2001)

discrete orthogonal polynomial ensemble

Johansson (2001)

Tracy-widom

1-12

Tracy - Widom (1994)

$F_2(s)$ の Painlevé 表示

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^\infty (x-s) q_2^2(x) dx\right)$$

$q_2(x)$: IInd Painlevé eq.

$$q_2''(x) = \lambda q_2(x) + 2q_2(x)^3$$

$$q_2(s) \sim A_1(s) \quad s \rightarrow \infty$$

Hartnigs - McLeod sol

Jimbo - Miwa - Mori - Sato (1980)

$\int XY$ 行列の相関関数の Fredholm det
の Painlevé 表示
行列の表示

§ 1 補遺 1-13

Bernoulli ランダムウォーク

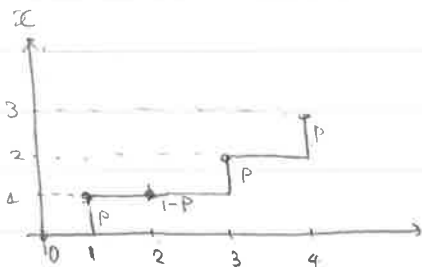
離散時間 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$x(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: 時刻 t にいる walker の位置.

$x(0) = 0$

$x(t+1) = x(t) + X$

$X = \begin{cases} 0 & \text{確率 } 1-P \\ 1 & \text{ } P \end{cases}$



• $\text{Prob}(x(t) = n) = \binom{t}{n} P^n (1-P)^{t-n} = \text{二項分布で与えられる}$
 $=: P_t(n)$

• 遷移確率

$G(x(t) = n \rightarrow x(t+1) = m) := P(x(t+1) = m | x(t) = n)$
 $= P \delta_{m, n+1} + (1-P) \delta_{m, n}$

定義より明らか

$\sum_n P_t(n) G(x(t) = n \rightarrow x(t+1) = m) = P_{t+1}(m)$
 が成り立つ.

Check

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} P^n (1-P)^{t-n} (P \delta_{m, n+1} + (1-P) \delta_{m, n})$
 $= \binom{t}{m-1} P^{m-1} (1-P)^{t-m+1} \times P + \binom{t}{m} P^m (1-P)^{t-m+1}$
 $= \left(\binom{t}{m-1} + \binom{t}{m} \right) P^m (1-P)^{t+1-m}$

$\frac{t!}{(t+1-m)!(m-1)!} + \frac{t!}{(t-m)!m!} = \frac{t!m + t!(t+1-m)}{(t+1-m)!m!} = \binom{t+1}{m}$

1-(14)

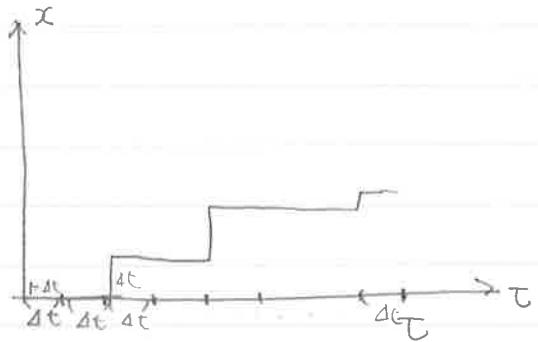
連続時間極限

Bernoulli \Rightarrow 以下のようにして、次のような極限を考える。

Δt : 1秒あたり

$t = \tau / \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$

$p = \alpha \Delta t$



Δt 刻みの時間間隔 $\alpha \Delta t$ の確率で hop する。

$\Delta t \rightarrow 0$ 連続時間極限

$$P(t, n) \longrightarrow P(\tau, n) = \frac{(\alpha \tau)^n e^{-\alpha \tau}}{n!}$$

ポアソン分布

$$= \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}$$

二項分布

問題 2 を示す。

$$\sum_n P(t, n) G(n, m) = P(t+1, m)$$

$$P(t, m-1) p + P(t, m) (1-p) = P(t+1, m)$$

$$\Rightarrow P(\tau, m-1) \alpha \Delta t + P(\tau, m) (1-\alpha \Delta t) = P(\tau + \Delta t, m)$$

$$= P(\tau, m) + \frac{dP(\tau, m)}{d\tau} \Delta t$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とき $P(\tau, m) = P(\tau, m)$

$\Delta t \rightarrow 0$ とき $\frac{dP(\tau, m)}{d\tau} = \alpha P(\tau, m-1) - \alpha P(\tau, m)$

↑ 遷移のL-ト

問題: $P(\tau, n) = \frac{(\alpha \tau)^n e^{-\alpha \tau}}{n!}$ が上の式を満たすことを示す。

§1 補遺 2.2

1-1

Fredholm 行列式について.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \quad N \times N \text{ 行列}$$

行列式の Fredholm 展開

$$\det(1+A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l_1=1}^N \dots \sum_{l_k=1}^N \det(a_{l_i l_j})_{i,j=1}^k$$

Check $N=2$.

$$\begin{aligned} \text{LHS) } \det(1+A) &= \det \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix} = (1+a_{11})(1+a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= 1 + a_{11} + a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS) } & 1 + \frac{1}{1!} \sum_{l_1=1}^2 a_{l_1 l_1} + \frac{1}{2!} \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_2=1}^2 \begin{vmatrix} a_{l_1 l_1} & a_{l_1 l_2} \\ a_{l_2 l_1} & a_{l_2 l_2} \end{vmatrix} + \frac{1}{3!} \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_2=1}^2 \sum_{l_3=1}^2 \det(a_{l_i l_j})_{i,j=1}^3 \\ &= 1 + a_{11} + a_{22} + \frac{1}{2!} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \right) + \dots \\ &= 1 + a_{11} + a_{22} + \frac{1}{2} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \times 2 \end{aligned}$$

↑
2つ行列が等しい

この定義を事実に拡張する.

$A \Rightarrow K: L^2(X, \mu)$ (ヒルベルト空間) 上の積分演算
でカネル $K(x, y)$ を用いて.

$$f \in L^2(X, \mu)$$

$$Kf(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

$$\det(1+K) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_X \dots \int_X d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k) \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^k$$

K が トレースクラス ならば 右辺の級数の収束が保証されている.

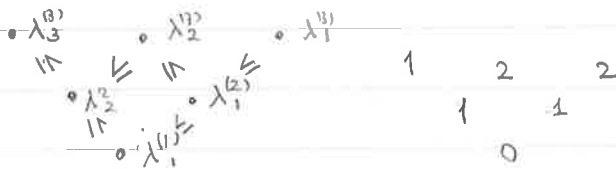
数値計算 Borneman (2009).

§2 Gelfand - Tsetlin pattern 上の 確率過程.

2-1.

$$\text{Gelfand-Tsetlin pattern} \stackrel{\text{GT}_N}{:=} \left\{ \lambda_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq j \leq N \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i^{(j)} \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ \lambda_i^{(j)} \leq \lambda_{i+1}^{(j)} \leq \lambda_{i-1}^{(j)} \end{array} \right\}$$

e.g.) $N=3$



GT_N 上には以下のル-ルで 確率過程を定める.

• $t=0$ で $\lambda_i^{(j)}(0) = 0$.

• $\lambda_i^{(j)}(t+1)$ は $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i^{(j-1)}(t+1), \lambda_{i-1}^{(j-1)}(t+1) \\ \text{左下の値} \quad \text{右下の値} \end{array} \right.$ によって $\lambda_i^{(j)}(t)$ への前の時刻の自分自身の位置.

以下のル-ルで決まる.

$$\lambda_i^{(j)}(t+1) = \begin{cases} \lambda_i^{(j)}(t) + 1 & \dots \quad \lambda_{i-1}^{(j-1)}(t+1) = \lambda_i^{(j)}(t) + 1 \text{ のとき} \\ \lambda_i^{(j)}(t) & \dots \quad \lambda_{i-1}^{(j-1)}(t+1) = \lambda_i^{(j)}(t) \text{ のとき} \\ \lambda_i^{(j)}(t) + X_i^{(j)} & \dots \quad \text{それ以外} \end{cases}$$

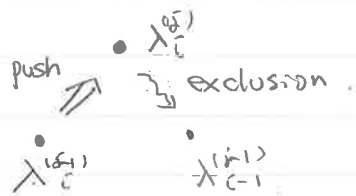
ただし $X_i^{(j)} = \begin{cases} 1 & \dots \text{ 確率 } p \\ 0 & \dots \text{ } 1-p \end{cases}$ N 個の独立した Bernoulli 分布にしたがった 確率変数.

注. $\lambda_i^{(j)}(t+1)$ を求めるには $\lambda_i^{(j-1)}(t)$, $\lambda_{i-1}^{(j-1)}(t)$ の情報が必要

了, フォワードは $\lambda^{(1)} \rightarrow \lambda_1^{(2)} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1^{(3)} \\ \lambda_2^{(3)} \\ \lambda_3^{(3)} \end{matrix}$ の順に行く。

(Sequential update).

- 模式的に書くと.



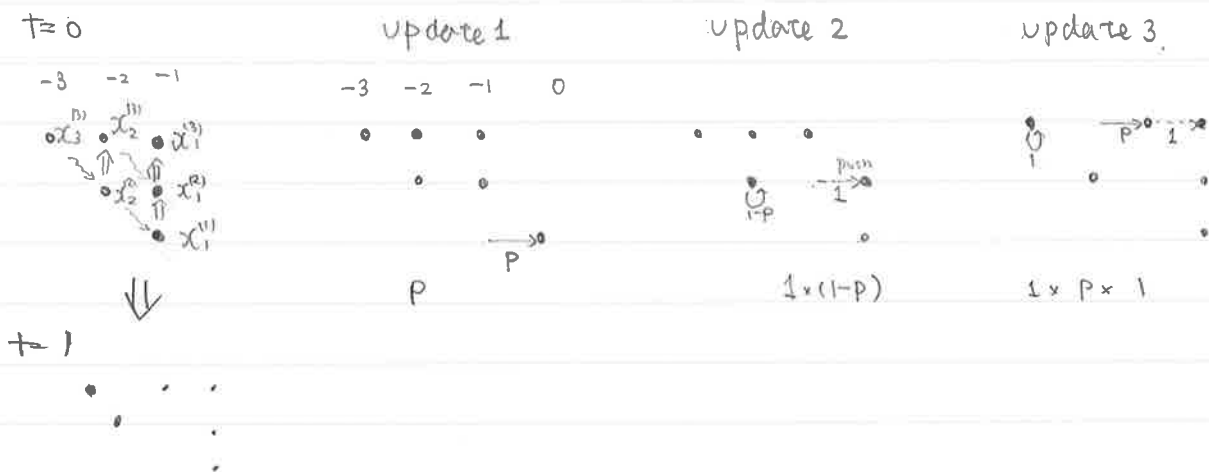
- 粒子模型との対応をみるために 新しい変数

$$x_i^{(j)}(t) = \lambda_i^{(j)}(t) - j \quad (j)$$

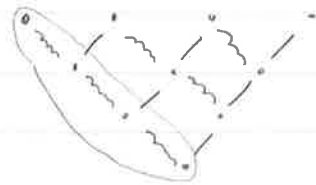
を導入する。上の時間発展ルールと $x_i^{(j)}(t)$ について書くと

$$\left\{ \begin{aligned} x_i^{(j)}(0) &= -i \\ x_i^{(j)}(t+1) &= x_i^{(j)}(t) + 1 \quad \dots \quad x_i^{(j-1)}(t+1) = x_i^{(j)}(t) + 1 \quad \text{のとき} \\ &= x_i^{(j)}(t) \quad \dots \quad x_{i-1}^{(j-1)}(t+1) = -x_i^{(j)}(t) \quad \text{のとき} \\ &= x_i^{(j)}(t) + x_{i-1}^{(j-1)}(t) \quad \dots \quad \text{その他} \end{aligned} \right.$$

時間発展の様子 (N=3)

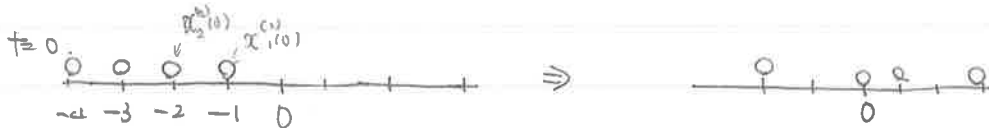


- $\{x_j^{(t)}\}_{j=1, \dots, t}$ は TASEP の sequential update のダイナミクスと等しい。



~ exclusion.
— push

$x_j^{(t)}$: 時刻 t における j 番目の TASEP 粒子の位置

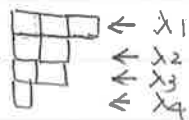


この GT pattern 上のダイナミクスは、TASEP の dynamics を含んでいる。
さらにこのダイナミクスは、シュール関数と関連した顕著な数理解構を持つ。

2-2. シュール関数

λ : 分割 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ $\lambda_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$

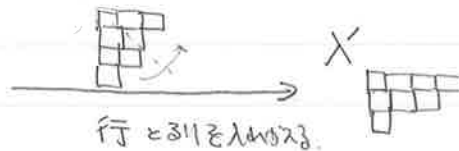
例 ヤング図形 $\lambda_1=3, \lambda_2=2, \lambda_3=2, \lambda_4=1$ とする。



ヤング図形


λ' : λ の転置

例 λ



λ/μ : 歪ヤング図形 λ, μ を box の集合とし右と左の集合としての差をなし、 (λ/μ) を表わしているとする。

2-④

例: $\lambda =$  $\mu =$ 

$\lambda/\mu =$  黒い部分

λ/μ が horizontal strip $\Leftrightarrow \lambda/\mu$ の各列で 1つ以上の箱を足す11。






column strict skew Young tableau $T \Leftrightarrow \{ \lambda^{(i)} \}_{i=0, \dots, r}$
with shape λ/μ .

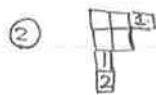
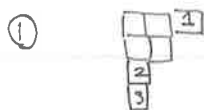
s.t

- $\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots \subset \lambda^{(r)} = \lambda$
- $\lambda^{(i)} / \lambda^{(i-1)}$ ($i=1, \dots, r$) が horizontal strip.

例 ① $\lambda^{(0)} = \mu =$  $\lambda^{(1)} =$  $\lambda^{(2)} =$  $\lambda^{(3)} =$  $= \lambda$

② $\lambda^{(0)} = \mu =$  $\lambda^{(1)} =$  $\lambda^{(2)} =$  $= \lambda$

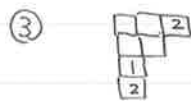
別の表記法: $\lambda^{(i)}$ で新たに加わった box の中に数字 i を入れる.






column strict tableaux

\Leftrightarrow 数字が 右方向には 重複を許して大きく
なる.

下 " 必ず許す "



Semistandard Young tableau になる。

③ $\lambda^{(0)} = \mu =$  $\lambda^{(1)} =$  $\lambda^{(2)} =$ 

Schur 関数の (組み合わせ論的) 定義.

$$S_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{T: \text{column strict tableau with } \lambda/\mu} x^T$$

ただし $x^T = x_1^{|\lambda^{(1)}/\lambda^{(0)}|} x_2^{|\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}|} \dots x_k^{|\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}|}$

$\lambda^{(0)} = \mu, \lambda^{(k)} = \lambda$

$|\lambda/\mu|$: λ/μ の box の数

実は x_1, \dots, x_k の 対称多項式 になっている。

例

± の column strict Young tableau. の例.

$$S_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1^1 x_2^1 x_3^1}_{(1)} + \underbrace{x_1^2 x_2}_{(2)} + \underbrace{x_1 x_2^2}_{(3)}$$

$$S_{\lambda/\mu}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$$

$$S_{\lambda/\mu}(x_1) = 0$$

一度数の Schur 関数の性質.

$$S_{\lambda/\mu}(x_1) = \begin{cases} x_1^{|\lambda-\mu|} \\ 0 \end{cases}$$

← GT pattern の条件.
 $\mu_{i-1} \geq \lambda_i \geq \mu_i$ とき,
その他.

$$S_{\lambda/\mu}(x_1) = \begin{cases} x_1^{|\lambda-\mu|} \\ 0 \end{cases}$$

$\lambda_j = \mu_j$ or $\lambda_j = \mu_j + 1$ かつ,
 $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j \geq \mu_j$ とき,
その他.

2-⑤'

Schur 関数の関係式

$$(1) \quad \sum_{\mu} S_{\mu/\lambda}(x) S_{\mu'/\nu}(y) = \sum_{\tau} S_{\nu/\tau}(x) S_{\lambda'/\tau}(y) \cdot \Pi(x, y), \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_N) \\ y = (y_1, \dots, y_M) \end{array}$$

特に $\Pi(x, y) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M (1 + x_i y_j)$

特に $\lambda = \nu = \phi$ のとき

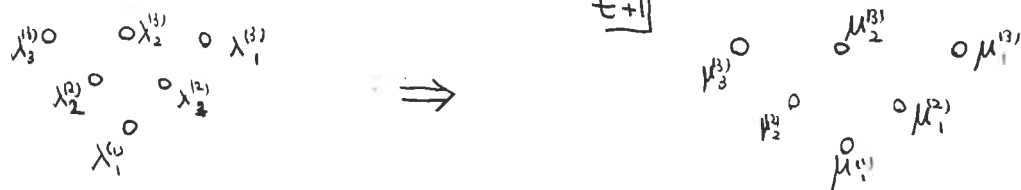
$$(1)' \quad \sum_{\mu} S_{\mu}(x) S_{\mu'}(y) = \Pi(x, y) \quad \text{Cauchy's identity.}$$

$$(2) \quad \sum_{\lambda} S_{\lambda}(x) S_{\mu/\lambda}(y) = S_{\mu}(x, y)$$

$$(2)' \quad \sum_{\lambda} S_{\lambda'}(x) S_{\mu'/\lambda'}(y) = S_{\mu'}(x, y)$$

2-3. GTN 上のラマダラ + 17 と Schur 関数

□



遷移確率

$$G(\lambda \rightarrow \mu) := P(\lambda_j^{(t+1)} = \mu_j^{(t+1)}, 1 \leq j \leq n \mid \lambda_j^{(t)} = \lambda_j^{(t)}, \forall j \in \mathbb{N})$$

$\{\lambda_j^{(t+1)} = \lambda_j^{(t)}\}$ のとき $\{\lambda_j^{(t+1)} = \mu_j^{(t+1)}\}$ の遷移確率

を Schur 関数を用いて表す。

(1) $\lambda^{(t)}$ の交代性。

$$\lambda_i^{(t+1)} = \lambda_i^{(t)} + X_i^{(t)}$$

$$X_i^{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{with prob } 1-p \\ 1 & \text{with prob } p \end{cases}$$

$$P(\lambda^{(t+1)} = \mu \mid \lambda^{(t)} = \lambda) = \frac{S_{\mu}(1) S_{\mu'/\lambda}(r)}{\Delta(\lambda)} \quad \text{と書ける}$$

$$\text{ただし } \Delta(\lambda) = \sum_{\mu} S_{\mu}(1) S_{\mu'/\lambda}(r), \quad r = \frac{p}{1-p}$$

$$\therefore S_{\mu}(1) = \begin{cases} 1^{|\mu|} & \\ 0 & \end{cases}$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \dots = 0$$

$$S_{\mu'/\lambda}(r) = \begin{cases} r^{|\mu'/\lambda|} & \\ 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_i = \lambda_i \text{ or } \mu_i = \lambda_i + 1 \\ \mu_i \leq \mu_{i-1} \end{cases}$$

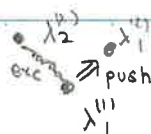
したがって

$$S_{\mu}(1) S_{\mu'/\lambda}(r) = \begin{cases} 1 & \mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0 \\ r & \mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\Delta(r) = 1+r$$

したがって

$$\frac{S_{\mu}(1) S_{\mu'/\lambda}(r)}{\Delta(r)} = \begin{cases} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\frac{p}{1-p}} = 1-p, & \mu_1 = \lambda_1, \text{ etc.} \\ \frac{r}{1+r} = p, & \mu_1 = \lambda_1 + 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$



(2) $\lambda^{(2)} = \{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}\}$ の対応は

$$\lambda_1^{(2)}(t+1) = \begin{cases} \lambda_1^{(2)}(t) + 1, & \lambda_1^{(1)}(t+1) = \lambda_1^{(2)} + 1 \text{ あり (push)} \\ \lambda_1^{(2)}(t) + X_1^2, & \\ 0, & \end{cases}$$

↑
N^{\mu_2} - 1

$$\lambda_2^{(2)}(t+1) = \begin{cases} \lambda_2^{(2)}(t) & \lambda_1^{(1)}(t+1) = \lambda_2^{(2)}(t) \text{ あり (exclusion)} \\ \lambda_2^{(2)}(t) + X_2^2, & \\ 0, & \end{cases}$$

$$P(\lambda^{(2)}(t+1) = \mu^{(2)} \mid \lambda^{(2)}(t) = \lambda^{(2)}) = \frac{S_{\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\lambda^{(2)}}(r)}{\Delta(\mu^{(1)}, \lambda^{(2)}; r)}$$

ただし $\Delta(\mu^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \sum_{\mu} S_{\mu/\mu^{(1)}}(1) S_{\mu/\lambda^{(2)}}(r)$

(3) または $\mu^{(2)}$ の対応は

$$S_{\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}(1) \rightarrow \begin{cases} \text{weight} \neq 0 & \mu^{(1)} \leq \mu^{(2)} \\ " = 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$S_{\mu^{(2)}/\lambda^{(2)}}(r) \rightarrow \begin{cases} \text{weight} \neq 0 & \lambda_1^{(2)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \lambda_1^{(2)} + 1 \\ " = 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

したがって weight が 0 ではない場合は

$$\mu_1^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \quad \& \quad \lambda_1^{(2)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \lambda_1^{(2)} + 1 \quad \text{を同時に満たさなければならない}$$

- $\mu_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} + 1$ あり $\mu_1^{(2)}$ は

$$\mu_1^{(2)} = \lambda_1^{(2)} + 1 \quad \text{と} \quad \lambda_1^{(2)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \lambda_1^{(2)} + 1 \quad \Rightarrow \text{push dynamics}$$

- $\mu_1^{(1)} \leq \lambda_1^{(2)}$ あり

$$\mu_1^{(2)} = \begin{cases} \lambda_1^{(2)} & \text{weight } 1 \Rightarrow \text{Prob } \frac{1}{1+r} = 1-p \\ \lambda_1^{(2)} + 1 & \text{weight } r \Rightarrow \frac{r}{1+r} = p \end{cases}$$

$$S_{\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\lambda^{(2)}}(r) \Rightarrow r$$

$$\Delta(\mu, \lambda) \Rightarrow r$$

$$\frac{S_{\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\lambda^{(2)}}(r)}{\Delta} \Rightarrow \frac{r}{1+r} = p$$

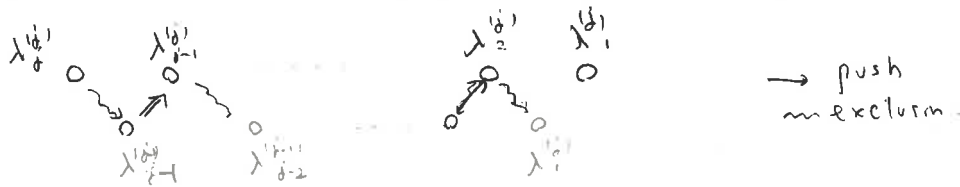
次に $\mu_2^{(2)}$ に着目。 $\mu_1^{(2)}$ の時と同様に考えると、0でないのは

$$\mu_2^{(2)} \leq \mu_1^{(2)} \quad \text{かつ} \quad \lambda_2^{(2)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \lambda_2^{(2)} + 1 \quad \text{かつ} \quad \mu_2^{(2)} \leq \mu_1^{(2)} \quad \text{を} \quad \text{満たすとき}$$

$$\Rightarrow \mu_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} \quad \text{あつかい} \quad \mu_2^{(2)} = \lambda_2^{(2)} \quad \text{と} \quad \lambda_2^{(2)} + 1 \quad \text{の} \quad \text{間} \quad \text{に} \quad \text{取} \quad \text{り} \quad \text{得} \quad \text{る} \quad \text{間} \quad \text{は} \quad \text{exclusion}$$

$$\lambda_2^{(2)} + 1 \leq \mu_1^{(2)} (\leq \mu_1^{(1)}) \quad \mu_2^{(2)} = \begin{cases} \lambda_2^{(2)} & \text{with prob } 1-p \\ \lambda_2^{(2)} + 1 & \text{with prob } p \end{cases}$$

(3) $\lambda^{(\delta)} = \{\lambda_1^{(\delta)}, \dots, \lambda_\delta^{(\delta)}\}$ のグラフ



$$P(\lambda^{(\delta)}(t+1) = \mu^{(\delta)} | \lambda^{(\delta)}(t) = \lambda) = \frac{S_{\mu^{(\delta)}/\mu^{(\delta)}(1)} S_{\mu^{(\delta)}/\lambda^{(\delta)}(r)}}{\Delta(\mu^{(\delta)}, \lambda^{(\delta)}; r)}$$

(4) $\mu_i^{(\delta)}$ に着目。サイトが0でないのは

$$\mu_i^{(\delta-1)} \leq \mu_i^{(\delta)} \leq \mu_{i-1}^{(\delta-1)} \quad \text{かつ} \quad \lambda_i^{(\delta)} \leq \mu_i^{(\delta)} \leq \lambda_i^{(\delta)} + 1 \quad \text{かつ} \quad \mu_i^{(\delta)} \leq \mu_{i-1}^{(\delta)}$$

を満足するとき、あるおしるは

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_i^{(\delta-1)} = \lambda_i^{(\delta)} + 1 \quad \text{あつかい} & \mu_i^{(\delta)} = \lambda_i^{(\delta)} + 1 \quad \text{と} \quad \lambda_i^{(\delta)} + 1 \quad \text{の} \quad \text{間} \quad \text{に} \quad \text{取} \quad \text{り} \quad \text{得} \quad \text{る} \quad \text{間} \quad \text{は} \quad \text{push} \\ \mu_{i-1}^{(\delta-1)} = \lambda_i^{(\delta)} \quad \text{あつかい} & \mu_i^{(\delta)} = \lambda_i^{(\delta)} \quad \text{と} \quad \lambda_i^{(\delta)} \quad \text{の} \quad \text{間} \quad \text{に} \quad \text{取} \quad \text{り} \quad \text{得} \quad \text{る} \quad \text{間} \quad \text{は} \quad \text{exclusion} \\ \mu_{i-1}^{(\delta-1)} = \lambda_i^{(\delta)} + \lambda_{i-1}^{(\delta)} & \text{と} \quad \lambda_{i-1}^{(\delta)} + 1 \quad \text{の} \quad \text{間} \quad \text{に} \quad \text{取} \quad \text{り} \quad \text{得} \quad \text{る} \quad \text{間} \quad \text{は} \end{array} \right.$$

したがって.

$$\begin{aligned}
 G(\lambda^{(t)} \rightarrow \mu^{(t+1)}) &= P(\lambda^{(1)}_{(t+1)} = \mu^{(1)} \mid \lambda^{(1)}_{(t)} = \lambda^{(1)}) \times P(\lambda^{(2)}_{(t+1)} = \mu^{(2)} \mid \lambda^{(2)}_{(t)} = \lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}_{(t+1)} = \mu^{(1)}) \\
 &\quad \times P(\lambda^{(3)}_{(t+1)} = \mu^{(3)} \mid \lambda^{(3)}_{(t)} = \lambda^{(3)}, \lambda^{(2)}_{(t+1)} = \mu^{(2)}) \times \cdots \times P(\lambda^{(N)}_{(t+1)} = \mu^{(N)} \mid \lambda^{(N)}_{(t)} = \lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}_{(t+1)} = \mu^{(N-1)}) \\
 &= \prod_{j=1}^N \frac{S_{\mu^{(j)} / \lambda^{(j-1)}}(1) S_{\mu^{(j)} / \lambda^{(j)}}(r)}{\Delta(\mu^{(j-1)}, \lambda^{(j)})} \quad \text{と書ける。}
 \end{aligned}$$

Thm 2-4.

$$\sum_{\{\lambda^{(t)}\}} P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t) G(\{\lambda^{(t)}\} \rightarrow \{\mu^{(t+1)}\}) = P_{i,r}(\{\mu^{(t+1)}\}; t+1)$$

ただし

$$P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t) = \frac{S_{\lambda^{(1)}}(1) S_{\lambda^{(2)} / \lambda^{(1)}}(1) \times \cdots \times S_{\lambda^{(N)} / \lambda^{(N-1)}}(1) S_{\lambda^{(N)}}(r, r, \dots, r)}{(1+r)^{tN}}$$

注

$$1. \begin{cases} P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t) > 0 & \because S_{\lambda/\mu} \text{ の 各項は 非負の数} \\ \sum_{\{\lambda^{(t)}\}} P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t) = 1 & \because (1) \text{ と } (2) \end{cases}$$

問 ニハラセませ

したがって $P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t)$ は GT pattern 上の確率分布関数として意味を持つ。

$P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t)$ を Schur process と呼ぶ。

2. 上の定理の意味.

2-1で定義したルールで定義された GT pattern の確率過程において時刻 t における $\{\lambda^{(t)}\}$ の確率分布は $P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t)$ で表される。
つまり、

$$P(\{\lambda^{(t)}_i(t) = \lambda^{(t)}_i\}) = P_{i,r}(\{\lambda^{(t)}\}; t)$$

2-⑩

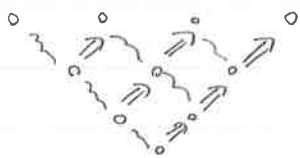
(2-2 (1)・(2))

証明) かんたん。Schur関数の関係式を用いる。

N=2の場合

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}} P_{br}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}; t) G(\{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}\} \rightarrow \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}\}) \\
 &= \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}} \frac{S_{\lambda^{(1)}}(1) S_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(1) S_{\lambda^{(2)'}}(1+r; t)}{(1+r)^{2t}} \frac{S_{\mu^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\mu^{(1)}}(r)}{\underbrace{\Delta(\phi, \lambda^{(1)})}_{(1) \text{ //}}} \frac{S_{\mu^{(2)}/\mu^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)'}}(r)}{\underbrace{\Delta(\mu^{(1)}, \lambda^{(2)})}_{(1) \text{ //}}} \\
 & \hspace{15em} \sum_{\mu} S_{\lambda^{(2)}/\mu}(1) S_{\mu^{(2)'}}(r) \times (1+r) \\
 & \sum_{\lambda^{(2)}} \text{を実行.} \quad \text{分子} \quad \sum_{\lambda^{(1)}} S_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\lambda^{(1)'}}(r) \\
 & \hspace{15em} \text{分母} \quad \leftarrow \text{キャンセル.} \\
 &= \sum_{\lambda^{(2)}} \frac{S_{\lambda^{(2)'}}(1+r; t)}{(1+r)^{2t}} \frac{S_{\mu^{(1)}}(1)}{(1+r)} \frac{S_{\mu^{(2)}/\mu^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)'}}(r)}{(1+r)} \\
 & \sum_{\lambda^{(2)}} \text{を実行} \quad (2) \text{ を } t \text{ まで} \\
 &= \frac{S_{\mu^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)}/\mu^{(1)}}(1) S_{\mu^{(2)'}}(1+r; t+1)}{(1+r)^{2(t+1)}} //
 \end{aligned}$$

問題 N=3 で 正確かぬ。 (余裕があれば一般の N で 正確かぬ)



GT pattern
 $\{\lambda_i^{(j)}\}$

$$P(\{\lambda_i^{(j)}(t) = \lambda_i^{(j)}\}) = P_{ir}(\{\lambda^{(j)}\}; t)$$

$\lambda_N^{(N)} \leftrightarrow$ 右から N 番目の TASEP 粒子の位置
 $\leftrightarrow \{\lambda_i^{(N)}\}, i=1 \sim N$ の一番左側の粒子の位置

$$P_{\text{ub}}(\{\lambda_i^{(N)}(t) = \lambda_i^{(N)}\})$$

$$= \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}} \frac{S_{\lambda^{(1)}}(1) S_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(1) \dots S_{\lambda^{(N-1)}/\lambda^{(N-2)}}(1) S_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(t)}{(1+r)^{tN}}$$

§2-1 (2) 式
↓
=

$$\frac{S_{\lambda^{(N)}}(1|_N) S_{\lambda^{(N)}}(r|t)}{(1+r)^{tN}} =: P_{ir}(\lambda^{(N)}) \quad \text{これを Schur measure と呼ぶ}$$

これを Schur 関数の性質:

$$S_{\lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \times \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j!}$$

$$S_{\lambda}(r|t) = \prod_{j=1}^t (j+N-1)! \times \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \times \prod_{j=1}^N \frac{1}{(t+j-1-\lambda_j)!}$$

ただし $\lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = \dots = 0$ のとき

よ)

$$P_{ir}(\lambda^{(N)}) = \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda_{j+1} + j - i)^2 \prod_{j=1}^N \binom{N+t-1}{\lambda_j + N - j} p^{t-1-\lambda_j+j} (1-p)^{\lambda_j + N - j}$$

GUE \rightarrow $N \times N$ 行列の固有値密度の離散版

$P_{ir}(\lambda^{(N)})$ は Knutchenok ensemble の確率密度という。

したがって $\{\lambda^{(N)}\}$ の m 点相関は $m \times m$ の行列式で書ける。

$\text{Prob}(\lambda_{(i)}^{(N)} \leq s)$ は Fredholm 行列式で書ける。

2-(12)

GT 197-11 の dynamics.

Thm 2.1 およ 時刻 t における、粒子の位置の確率分布関数は Schur process で表される。

- Thm 2.1 の証明で用いた関係式は Schur \rightarrow Macdonald の一般化という観点から そのままの形で拡張される。
- Schur process \rightarrow Macdonald process
- 時間発展 $IL-IL$ はどのように一般化されるか。

2-4 q -Whittaker 関数

(組み合わせ論的)定義

$$P_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T: \text{column strict tableau with } \lambda/\mu} \psi_T x^T$$

$$\psi_T = \prod_{i=1}^k \psi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}$$

$$\psi_{\lambda/\mu} = (q; q)_{\infty}^{-l(\lambda)} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{(q^{\lambda_i - \mu_{i+1}}; q)_{\infty} (q^{\mu_i - \lambda_{i+1}}; q)_{\infty}}{(q^{\lambda_i - \lambda_{i+1}}; q)_{\infty}}$$

ただし $l(\lambda) = 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ の個数

$$(a; q)_{\infty} = (1-a)(1-aq) \dots$$

$$Q_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T: \text{column strict tableau with } \lambda/\mu} \psi'_T x^T$$

$$\psi'_{\lambda/\mu} = \prod_{i \geq 1: \lambda_i = \mu_i, \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} + 1} (1 - q^{\mu_i - \mu_{i+1}})$$

2-13

注

- q -Whittaker 関数は マクドナルド 多項式 の 2 つの パラメータ (q, t) のうち $t=0$ としたものである。
- q -Whittaker 関数で $q=0$ のとき Schur 関数 になる。

$$P_{\mu/\lambda}(x) \xrightarrow{q \rightarrow 0} S_{\mu/\lambda}(x) \quad Q_{\mu'/\lambda'}(y) \xrightarrow{q \rightarrow 0} S_{\mu'/\lambda'}(y)$$

q -Whittaker 関数の関係式

$$x = (x_1, \dots, x_N) \\ y = (y_1, \dots, y_M)$$

$$(q1) \quad \sum_{\mu} P_{\mu/\lambda}(x) Q_{\mu'/\nu}(y) = \sum_{\tau} P_{\nu/\tau}(x) Q_{\lambda'/\tau}(y) \cdot \Pi(x, y)$$

$$\text{ただし } \Pi(x, y) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M (1 + x_i y_j)$$

特に $\lambda = \nu = \phi$ のとき

$$(q1)' \quad \sum_{\mu} P_{\mu/\lambda}(x) Q_{\mu}(y) = \Pi(x, y)$$

$$(q2) \quad \sum_{\lambda} P_{\lambda}(x) P_{\mu/\lambda}(y) = P_{\mu}(x, y)$$

$$(q2)' \quad \sum_{\lambda} Q_{\lambda}(x) Q_{\mu'/\lambda}(y) = Q_{\mu'}(x, y)$$

- $q \rightarrow 0$ にすると §2-3 (1), (2) 式 になる。

(1), (2) 式が そのままの 形で 一般化 されている。

⇒ §2-1 ~ §2-3 でやった GT 上の アイゼンスタット

$$S_{\lambda/\mu}(x) \rightarrow P_{\lambda/\mu}(x)$$

← 一般化 してみよう!

$$S_{\lambda'/\mu'}(y) \rightarrow Q_{\lambda'/\mu'}(y)$$

2-⑭

2-5. q -Whittaker process.

§2-3. GT pattern 上の遷移確率

$$G(\{\lambda^{(j)}\} \rightarrow \{\mu^{(j)}\}) = \prod_{j=1}^N \frac{S_{\mu^{(j)}/\mu^{(j-1)}}(1) S_{\mu^{(j)}/\lambda^{(j)}}(r)}{\Delta(\mu^{(j-1)}, \lambda^{(j)})}$$

↓

$$G_q(\{\lambda^{(j)}\} \rightarrow \{\mu^{(j)}\}) = \prod_{j=1}^N \frac{P_{\mu^{(j)}/\mu^{(j-1)}}(1) Q_{\mu^{(j)}/\lambda^{(j)}}(r)}{\Delta_q(\mu^{(j-1)}, \lambda^{(j)})}$$

と q を含んだ一般化してみる。

Thm 2-2

$$\sum_{\{\lambda^{(j)}\}} P_{i,r}^q(\{\lambda^{(j)}\}; t) G_q(\{\lambda^{(j)}\} \rightarrow \{\mu^{(j)}\}) = P_{q,i,r}(\{\mu^{(j)}\}; t+1)$$

ただし:

$$P_{i,r}^q(\{\lambda^{(j)}\}; t) = \frac{P_{\lambda^{(1)}}(1) P_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(1) \cdots P_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(1) Q_{\lambda^{(N)}}(\overbrace{r, r, \dots, r}^{t \text{ 回}})}{(1+r)^{tN}}$$

注

1. $P_{i,r}^q(\{\lambda^{(j)}\}; t)$ を q -Whittaker process とよぶ。

2. 上の定理の意味

$G_q(\{\lambda^{(j)}\} \rightarrow \{\mu^{(j)}\})$ で定義された確率過程において時刻 t における $\{\lambda^{(j)}\}$ の確率分布は $P_{i,r}^q(\{\lambda^{(j)}\}; t)$ で与えられる。

証明

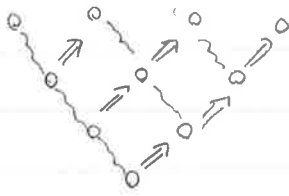
Th 2-1 と おたかハロレド、(1), (2) 式のかたみに (9.1), (9.2) 式を用いる。

問 $N=2, 3$ で確かめよ。

(余裕があれば N - 般で)

2-15

2-6. $G^q(\lambda \rightarrow \mu)$ ^{で定まる} 確率過程と、連続時間極限



- sequential update, push, exclusion dynamics は Schur の場合と 変わらない。

(*) これらの性質は G^q を構成する $S_{\lambda/\mu}$ や $P_{\lambda/\mu}$ が Column strict tableaux の場合のみ weight を与える $weight \neq 0$ という性質に 1 対 1 対応している。この性質は q -Whittaker も保持。

- 変化するのは 重み付きの場合における ホリゾント 確率

Schur の場合. 1 対 P である。

q -Whittaker の場合. weight が $1 \rightarrow \Psi_{\lambda/\mu}$ となることにおいて $\Psi_{\lambda/\mu}$

ホリゾント 確率が 状態に 依存する。

→ 離散時間の場合も複雑。

(c.f. Borodin-Corwin arXiv:1305.2972)

ここでは 連続時間極限 における L - t を計算する。

- $t \sim t+dt$ の間には 2つ以上の粒子が重なり 確率は $O(dt)^2$ なので 考慮しない

時間発展ルール

- 各粒子 $\lambda_i^{(j)}$ $1 \leq i \leq j \leq N$ は 各々 L - t $a^{(j)}$ を持っていて ジャンプしようとする。

- $t \sim t+dt$ の間には $\lambda_i^{(j)}$ が ジャンプしようとする

$$\lambda_n^{(m)}(t) = \lambda_{n-1}^{(m-1)}(t) \quad a^{(m)} \text{ が 重なりなし (exclusion)}$$

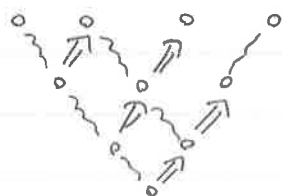
$$\lambda_n^{(m)}(t) < \lambda_{n+1}^{(m-1)}(t) \quad a^{(m)} \text{ が } \lambda_n^m(t+dt) = \lambda_n^m(t) + 1$$

$$\text{つまり } \lambda_n^m(t) = \lambda_n^m(t) = \dots = \lambda_{n+k}^{m+k}(t) < \lambda_{n+k+1}^{m+k+1}(t)$$

各粒子 $\lambda_n^{m+k}(t)$ $i=1, \dots, k$ は 有利的に ジャンプする (push)

2-⑮'

2-6 $G^q(\lambda \rightarrow \mu)$ 上の確率過程の意味.



• push, exclusion dynamics は Schur の場合と変わらない。

∴) これは $S_{\lambda/\mu}$ の $\sum_{T: \text{column}}$ (T で和をとる) という構造に帰因する。各 π_i における weight の詳細には依存しない。

• 変化するのは動かす場合におけるホップ確率。

$\lambda^{(t)}(t+1)$ の時間発展ルールは

$G^q(\{\lambda_i^{(t)}\} \rightarrow \{\mu_i^{(t)}\})$: 中の $\frac{P_{\mu^{(t)}/\mu^{(t-1)}}(1) Q_{\mu^{(t)}/\lambda^{(t)}}(r)}{\Delta_q(\mu^{(t-1)}, \lambda^{(t)}; r)}$ の部分が抜けている

weight が 0 であるのは

$$\mu_i^{(t-1)} \leq \mu_i^{(t)} \leq \mu_{i-1}^{(t-1)}, \quad \lambda_i^{(t)} \leq \mu_i^{(t)} \leq \lambda_i^{(t)} + 1, \quad \mu_i^{(t)} \leq \mu_{i-1}^{(t)}$$

を述べておくと

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^{(t-1)} = \lambda_i^{(t)} + 1 \quad \text{or} \quad \mu_i^{(t)} = \lambda_i^{(t)} + 1 \quad (\text{push}) \\ \mu_{i-1}^{(t-1)} = \lambda_i^{(t)} \quad \text{or} \quad \mu_i^{(t)} = \lambda_i^{(t)} \quad (\text{exclusion}) \\ \text{それ以外} \quad \mu_{i-1}^{(t-1)} = \lambda_i^{(t)} + X_i^{q(\lambda)} \end{array} \right.$$

$X_i^{q(\lambda)}$ がどのような乱数か。

$\mu_{i-1}^{(t-1)} = \lambda_i^{(t)}$ のときの weight

$$P_{\mu^{(t)}/\mu^{(t-1)}}(1) = \psi_{\mu^{(t)}/\mu^{(t-1)}} \Rightarrow \frac{1}{(q; q)_\infty} q^{\mu^{(t)}}$$

2- (1b)

L-1 の計算

出発点

$$P(\lambda^{(t+1)} = \mu^{(t)} \mid \lambda^{(t)} = \lambda^{(t)}, \lambda^{(t-1)} = \lambda^{(t-1)})$$

$$= \frac{P_{\mu^{(t)}/\lambda^{(t-1)}}(1) Q_{\mu^{(t)}/\lambda^{(t)}(r)} = \frac{\Psi_{\mu^{(t)}/\lambda^{(t-1)}} \Psi'_{\mu^{(t)}/\lambda^{(t)}} r^{|\mu^{(t)}|}}{\sum_k \Psi_{k/\lambda^{(t-1)}} \Psi'_{k/\lambda^{(t)}} r^{|k|}} \quad \text{--- } (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{(t)} = \lambda^{(t)} \cup \{0\}_R \text{ or } \lambda^{(t)} \cup \{0\}_{R-1} \text{ or } \lambda^{(t)} \cup \{0\}_{R+1} \\ \text{or } \mu^{(t)} = \lambda^{(t)} \cup \{0\}_R \text{ or } \lambda^{(t)} \cup \{0\}_{R-1} \text{ or } \lambda^{(t)} \cup \{0\}_{R+1} \end{array} \right.$$

木の正確率 $P(1) \sim \alpha dt + O(dt^2) + \dots$ dt の 1-2 の位の項を
無視すればよい

$r=dt$
 $dt \rightarrow 0$ ↑ L-1

$$(*) \frac{\Psi_{\lambda^{(t)} \cup \{0\}_R / \lambda^{(t-1)}} \Psi'_{\lambda^{(t)} \cup \{0\}_R / \lambda^{(t)}} r^{|\lambda^{(t)}|+1}}{\Psi_{\lambda^{(t)} / \lambda^{(t-1)}} r^{|\lambda^{(t)}|} + O(r^{|\lambda^{(t)}|+1})} \sim \frac{\Psi_{\lambda^{(t)} \cup \{0\}_R / \lambda^{(t-1)}} \Psi'_{\lambda^{(t)} \cup \{0\}_R / \lambda^{(t)}} r^{|\lambda^{(t)}|+1}}{\Psi_{\lambda^{(t)} / \lambda^{(t-1)}} r^{|\lambda^{(t)}|}} r$$

↑ (†)
これは L-1

同

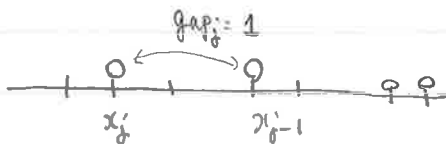
$$(*) = \frac{(1 - q^{\lambda_{n-1}^{(t)} - \lambda_{n+1}^{(t)} + 1}) (1 - q^{\lambda_{n-1}^{(t-1)} - \lambda_n^{(t)}})}{1 - q^{\lambda_n^{(t)} - \lambda_{n+1}^{(t)}}}$$

と仮定してよい

さらに $k=j$ に適用すると

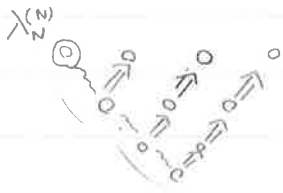
$$\frac{1 - q^{\lambda_{j+1}^{(t)} + 1}}{1 - q^{\lambda_j^{(t)} + 1}} (1 - q^{\lambda_{j-1}^{(t-1)} - \lambda_j^{(t)}}) = 1 - q^{\text{gap}_j}$$

↑
L-1



3-①

§3 q-TASEP における Fredholm 行列式公式



$x_N(t) = \lambda_N^{(N)}(t) - N$; 時刻 t における q-TASEP 粒子の位置

$$\text{Prob}(\{\lambda_i^{(N)}(t) = \lambda_i^{(N)}\}) = P_{u,r}^q(\lambda_i^{(N)}; t)$$

$$\text{Prob}(\{\lambda_i^{(N)}(t) = \lambda_i^{(N)}\}_{i=1, \dots, N}) = \frac{P_{\lambda^{(N)}}(1|N) Q_{\lambda^{(N)}}(1|t)}{(1+r)^{tN}}$$

↑
q-Whittaker measure

この章の目標

$$(*) \quad \left\langle \frac{1}{(\beta q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle_{qW} = \det(1 + K_{\beta})_{L^2(CW)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{m=1}^k \int_{C} d w_m \det [K_{\beta}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^m$$

$w_i = 1$ を与える
"行列の外に追加"

右辺) $K_{\beta}(w_i, w_j) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \Gamma(-s) \Gamma(1+s) (-s)^{\beta} q_{w, w'}(q^s) ds$

$$q_{w, w'}(x) := \frac{1}{xw - w'} \frac{(xw; q)_{\infty}}{(w; q)_{\infty}} \frac{(1+qr)^t}{(1+r)^t}$$

?

左辺) $\langle \rangle_{qW}$: q-Whittaker measure に関する期待値

$$\begin{aligned} (x; q)_{\infty} &:= (1-x)(1-xq)(1-xq^2) \dots (1-xq^{n-1}) \\ (x; q)_{\infty} &:= (1-x)(1-xq)(1-xq^2) \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{((1+qr)x; q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{kq!}, \quad kq! = \frac{(q; q)_k}{(1-q)^k} \quad \text{という関係が成り立つ}$$

⇒ したがって 左辺

$$\left\langle \frac{1}{(\beta q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle_{qW} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Prob}(\lambda_N = n)}{(\beta q^n; q)_{\infty}}$$

は $\text{Prob}(\lambda_N = n)$ の q-Laplace 変換とみなせる。

$$\left\langle \frac{1}{(\beta q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle_{qW} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k} \left\langle q^{\lambda_N k} \right\rangle_{qW}$$

3-②

一般に $f \in \mathcal{O}^1(0, 1, \dots, j)$ の q -Laplace 変換を

$$\hat{f}^q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(zq^n; q)_{\infty}}$$

とすると q -Laplace 変換は

$$f(n) = -q^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} (q^{n+1}z; q)_{\infty} \hat{f}^q(z) dz$$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{q^{-k}\}_{0 \leq k}$ に対し C_n は $z = q^{-M}$ $0 \leq M \leq n$ を通る contour.

とかける。したがって、(*) から

$$\text{Prob}(\lambda_N = n) = \frac{-q^n}{2\pi i} \int_{C_n} (q^{n+1}z; q)_{\infty} \det(1 + K_z)_{L^2(G)} dz$$

C_n は q^n とかける

• $|s| < 1$ の $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ に解析的拡張する。

3-1 q -差分演算子

• N 変数関数に作用する演算子 D_N を以下のように定義する。

$$D_N := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}$$

ただし T_{q, x_i} は シフト演算子で、 N 変数関数 $F(x_1, \dots, x_N)$ に対して

$$(T_{q, x_i} F)(x_1, \dots, x_N) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, qx_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \text{ と作用する。}$$

FACT 3-1 q -Whittaker 関数 $P_{\lambda}(x_1, \dots, x_N)$ は D_N の固有関数で:

固有値 $q^{|\lambda|}$ かつ

$$D_N P_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = q^{|\lambda|} P_{\lambda}(x_1, \dots, x_N)$$

3-③

注 D_N は Macdonald 差分作用素 D_N^r で $t=0$ としたものの

$$D_N^r = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=r}} t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

$P_\lambda(x_1, \dots, x_N) \cong$ Macdonald の項式と可なり。

$$D_N^r P_\lambda(x_1, \dots, x_N) = E_r(q^{\lambda_1} t^{n-1}, q^{\lambda_2} t^{n-2}, \dots, q^{\lambda_N}) P_\lambda(x_1, \dots, x_N)$$

ただし、 $E_r(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$
↑
elementary symmetric function.

3-2 D_N の 積分公式

FACT 3-1 5)

$$\begin{aligned} \langle q^{\lambda_N k} \rangle_{NW} &= \frac{\sum_{\lambda} q^{\lambda_N k} P_{\lambda}(1|1|N) Q_X(1|r)e}{(1+r)^{tN}} \\ &= \frac{\sum_{\lambda} q^{\lambda_N k} P_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) Q_X(1|r)e}{\prod(x:r)} \Bigg|_{\{x_i \rightarrow 1\}}, \quad \prod(x:r) = \prod_{i=1}^N (1+x_i r)^t \\ &= \frac{\sum_{\lambda} D_N^k P_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) Q_X(1|r)e}{\prod(x:r)} \Bigg|_{\{x_i \rightarrow 1\}} \\ &= \frac{D_N^k \prod(x:r)}{\prod(x:r)} \Bigg|_{\{x_i \rightarrow 1\}} \end{aligned}$$

$F(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f(x_i)$ という形の N 変数関数 f の D_N の作用について。

以下の積分公式が知られている。

3-④

prop 3-2 • $F(x_1, \dots, x_N) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_N)$

$f(x) : \{ q^j x_j \mid j=0, 1, \dots, N \}$ を含む \mathbb{R} 上の区間の近傍で正則かつゼロでない

よって $\Rightarrow x_1, \dots, x_N > 0$

$$\frac{D_N F(x_1, \dots, x_N)}{F(x_1, \dots, x_N)} = \frac{-1}{2\pi i} \oint \prod_{m=1}^N \frac{-x_m}{z - x_m} \times \frac{f(z)}{f(z)} \frac{dz}{z}$$

ただし、 z 積分は $\{x_1, \dots, x_N\}$ を正にまわる。

\therefore $f(x)$ の条件より、右辺の $\frac{f(z)}{f(z)}$ は z の contour の内部で正則したがって、右辺の pole の寄与は $\frac{1}{z - x_m}$ のみ

$$(\text{右辺}) = \sum_j \prod_{m \neq j} \frac{-x_m}{x_j - x_m} \times \frac{f(x_j)}{f(x_j)}$$

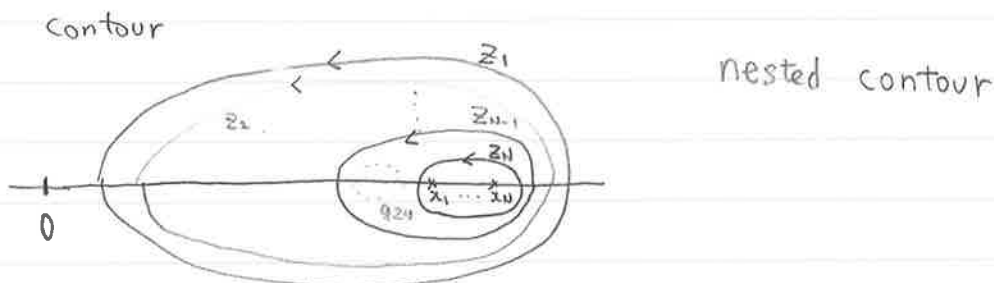
$$\therefore (\text{右辺}) \times F(x_1, \dots, x_N) = \sum_j \prod_{m \neq j} \frac{-x_m}{x_j - x_m} f(x_1) \dots f(x_j) \dots f(x_N) = D_N F //$$

prop 3-3 • $f(x) : \{ q^l x_j \mid l=0, \dots, k, j=1, \dots, N \}$ を含む \mathbb{R} 上区間の近傍で正則かつゼロでない。

それと prop 3-2 と同じ条件

$$\frac{D_N^k F(x_1, \dots, x_N)}{F(x_1, \dots, x_N)} = \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k} \oint \dots \oint \prod_{1 \leq a < b \leq k} \frac{q(z_a - z_b)}{z_a - q z_b} \prod_{c=1}^k \left(\prod_{m=1}^N \frac{-x_m}{z_c - x_m} \times \frac{f(q z_c)}{f(z_c)} \frac{dz_c}{z_c} \right)$$

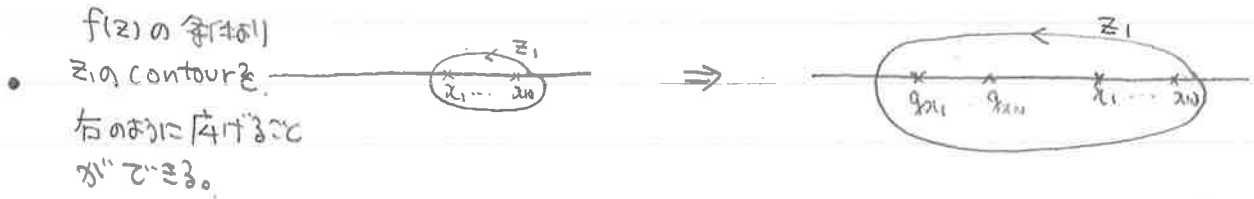
ただし z_c は $\{ q z_{c1}, \dots, q z_{cR}, x_1, \dots, x_N \}$ を含む



3-⑤

∴)

$$k=2 \text{ 次の } D_N D_N F = \frac{-1}{2\pi i} \oint D_N \left(\prod_{m=1}^N \frac{-x_m}{z_1 - x_m} f_2(x_m) \right) \times \frac{f_2(z_1)}{f(z_1)} \frac{dz_1}{z_1}$$



- $f_2(x) = \frac{-x}{z_1 - x} f(x)$ は $x = \{x_j \mid j=0, 1, \dots, N\}$ の近傍で正則かつ non zero
 $\Rightarrow \prod_{j=1}^N f_2(x_j)$ に対して prop 3-2 が適用出来る。

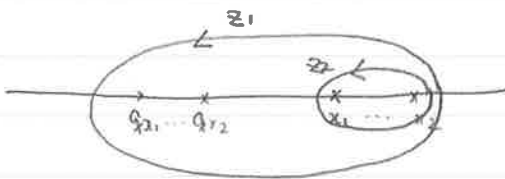
したがって

$$D_N D_N F = \frac{-1}{2\pi i} \oint \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \oint \prod_{m=1}^N \left(\frac{-x_m}{z_2 - x_m} f_2(x_m) \right) \cdot \frac{f_2(z_2)}{f_2(z_2)} \frac{dz_2}{z_2} \right\} \frac{f_2(z_1)}{f(z_1)} \frac{dz_1}{z_1}$$

$$\text{ここで: } f_2(x_m) = \frac{-x_m}{z_1 - x_m}$$

$$\frac{f_2(q_{z_2})}{f_2(z_2)} = \frac{-q_{z_2}}{z_1 - q_{z_2}} = \frac{z_1 - z_2}{-z_2} \frac{f_2(z_2)}{f_2(z_2)}$$

$$= \frac{(-)^2}{(2\pi i)^2} \oint \oint \prod_{m=1}^N \frac{-x_m}{z_2 - x_m} \frac{-x_m}{z_1 - x_m} f(x_m) \times \frac{q(z_1 - z_2)}{z_1 - q_{z_2}} \frac{f(q_{z_2}) f(q_{z_2})}{f(z_1) f(z_2)} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2} //$$



問 上の議論をふまえて一般 k について帰納法で証明せよ。

//

3-⑥

Thm 3.4

$g(z)$: 有理形関数 (特異点の極の2次) の極の集合 $A = \{z_1, \dots, z_n\}$

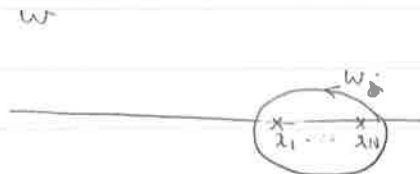
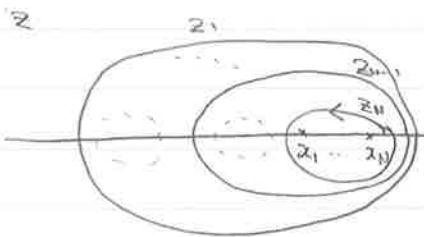
$g \in A \quad j=1, 2, \dots \times$ disjoint

二重積分

$$\frac{(-)^k}{(2\pi i)^k} \oint \dots \oint \prod_{1 \leq a < b \leq k} \frac{g(z_a - z_b)}{z_a - qz_b} \prod_{m=1}^k \frac{g(z_m)}{z_m} dz_m$$

$$= (g: g)_k \sum_{\substack{\lambda = k \\ \lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots}} \frac{1}{m_1! m_2! \dots} \frac{1}{(2\pi i)^{\sum \lambda_j}} \oint \dots \oint \det \left[\frac{1}{w_i q^{\lambda_j} - w_j} \right]_{i,j=1}^{\sum \lambda_j} \\ \times \prod_{j=1}^{\sum \lambda_j} \oint w_j \dots \oint (q^{\lambda_j - 1} w_j) dw_j$$

ただし $z_i \times w_j$ の contour



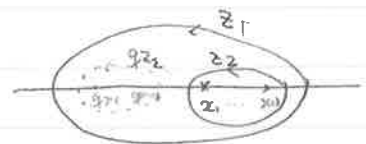
注

1. $k=2$ の場合

$$\text{左辺} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{g(z_1 - z_2)}{z_1 - qz_2} \frac{f(z_1)f(z_2)}{z_1 z_2} dz_1 dz_2$$

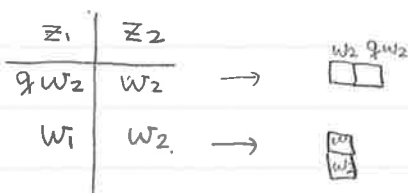
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint g(q-1)w_2 \frac{f(qz_2)f(z_2)}{qz_2 z_2} dw_2$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{g(w_1 - w_2)}{w_1 - w_2} \frac{f(w_1)f(w_2)}{w_1 w_2} dw_1 dw_2$$



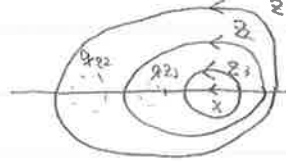
$$= (1-q)(1-q^2) \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{(q^2-1)w_2} f(w_2) f(qw_2) dw_2$$

$$+ (1-q)(1-q^2) \times \frac{1}{2} \times \oint \oint \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{(q-1)w_1} & \frac{1}{w_1 q - w_2} \\ \frac{1}{w_2 q - w_1} & \frac{1}{(q-1)w_2} \end{array} \right| f(w_1) f(w_2) \frac{dw_1 dw_2}{(2\pi i)^2}$$



3-⑦

k=3



z_1	z_2	z_3	
$q^2 w_3$	$q w_3$	w_3	$\begin{matrix} w_3 & q w_3 & q^2 w_3 \end{matrix}$
w_1	$q w_3$	w_3	} $\begin{matrix} q w_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{matrix}$
$q w_2$	w_2	w_3	
$q w_3$	w_2	w_3	
w_1	w_2	w_3	} $\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix}$

2. 大事な式

右辺の行列式が Fiedholm 構造の起源.

(証明の概略) kについての帰納法.

左辺の z_N について積分を実行.

$$\text{左辺} = \sum_{j=1}^N \frac{-\text{Res}_{z=x_j} f(z)}{x_j} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi i)^{k-1}} \oint \dots \oint \prod_{1 \leq A < B \leq k-1} \frac{q(z_A - z_B)}{z_A - z_B} \frac{\tilde{f}_j(z_1) \dots \tilde{f}_j(z_{k-1})}{z_1 \dots z_{k-1}} dz_1 \dots dz_{k-1}$$

↑
⊗

ただし $\tilde{f}_j(z) = f(z) \frac{q(z - x_j)}{z - q x_j}$

⊗に帰納法の仮定を適用し、右辺が存在することを確認する。

<おしは. Borodin - Corwin. Prob. Theory. Relat. Fields. 158. 225, 2014

Prop 3.8.

//

3-②

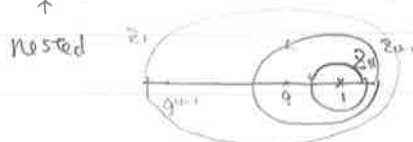
3-3. Fredholm 行列式公式

これまで議論した積分公式より

$$\int^R \langle g^{\lambda_{nk}} \rangle = \frac{D_N^k \prod(\lambda; r)}{\prod(x; r)} \Big|_{|x_i| \rightarrow 1}, \quad \prod(x; r) = \prod_{i=1}^N (1+x_i r)^t$$

prop 3-3

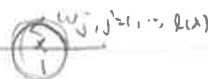
$$= \frac{g^k (-)^k}{2\pi i} \oint \dots \oint \prod_{\text{isocycle}} \frac{g(z_a - z_b)}{z_a - q z_b} \prod_{c=1}^R \left(\frac{1}{1-z_c} \right)^N \left(\frac{1+qz_c}{1+z_c r} \right)^t \frac{dz_c}{z_c}$$



$$f(z) = (1+zr)^t$$

Thm 3-4

$$= (g=q)_k \sum_{\lambda \vdash R} \frac{1}{m_1! m_2! \dots} \frac{1}{(2\pi i)^{L(\lambda)}} \oint \dots \oint \det \left[\frac{1}{w_i q^{\lambda_i} - w_j} \right]_{i,j=1}^{L(\lambda)} \times \prod_{j=1}^{L(\lambda)} \int^{\lambda_j} g(w_j) \dots g(q^{\lambda_j-1} w_j) dw_j$$



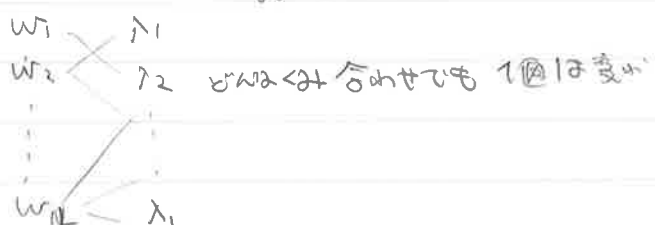
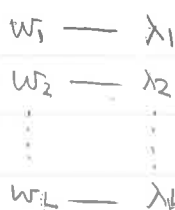
$$g(w) = \left(\frac{1}{1-w} \right)^N \left(\frac{1+qwr}{1+wr} \right)^t$$

もう少し変形する。

$$\frac{\int^R \langle g^{\lambda_{nk}} \rangle}{(g=q)_k} = \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots \\ \sum m_i = L \\ \sum m_i = R}} \frac{L!}{m_1! m_2! \dots} \frac{1}{(2\pi i)^L} \oint \dots \oint I_L(\lambda; w; z) dw$$

$$= \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 1 \\ \sum n_i = R}} \oint \dots \oint I_L(n; w; z) dw$$

$$\frac{L!}{m_1! \dots m_L!} \int I_L(\lambda; w; z) dw_1 \dots dw_L = \sum_{(n_1, \dots, n_L) \models \lambda} \int I_L(n; w; z) dw_1 \dots dw_L$$



3-9

また.

$$\begin{aligned}
 g(w) g(qw) \dots g(q^{N-1}w) &= \left(\frac{1}{1-w} \dots \frac{1}{1-wq^{N-1}} \right)^N \\
 &= \left(\frac{1+qwr}{1+w} \frac{1+q^2wr}{1+qwr} \dots \frac{1+q^{N-1}wr}{1+q^{N-2}wr} \right)^t \\
 &= \frac{(wq^{N-1})_{\infty}^N}{(w;q)_{\infty}^N} \left(\frac{1+q^{N-1}wr}{1+w} \right)^t
 \end{aligned}$$

したがって.

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \langle q^{Nk} \rangle}{(q;q)_k} = \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 1 \\ \sum n_i = L}} \phi \dots \phi \det \left[\frac{1}{w_i q^{n_i} - w_j} \right]_{i,j=1}^L \frac{L! \sum n_i}{\prod_{i=1}^L (w_i q^{n_i})_{\infty}^N} \left(\frac{1+q^{N-1}wr}{1+w} \right)^t$$

とわかる.

Thm 3.5

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{1}{(\sum q^{n_i} q)_{\infty}} \right\rangle_{qw} &= \det(1+K)_{L^2(z_{\infty}, C_1)} \\
 &= \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 1}} \phi \dots \phi \det \left[K(n_i w_i : n_j w_j) \right]_{i,j=1}^L
 \end{aligned}$$

$$K(n_1 w_1 : n_2 w_2) = \frac{1}{q^{n_1} w_1 - w_2} \sum_{n_1} \frac{1}{(w_1 q^{n_1})_{\infty}^N} \left(\frac{1+q^{N-1}wr}{1+w} \right)^t$$

∴) 上の式で両辺を k にしてわかる.

左辺) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle q^{Nk} \rangle}{(q;q)_k} = \left\langle \frac{1}{(\sum q^{n_i} q)_{\infty}} \right\rangle_{qw}$

右辺) $\det(1+K)$

//

Thm 3.6

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(zq^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle_{qW} &= \det (1 + K_S)_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \oint_{C_1} d w_1 \dots d w_k \det (K_S(w_i, w_j))_{i,j=1}^k \end{aligned}$$

$$K_S(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \Gamma(-s) \Gamma(1+s) (-z)^s g_{w_1, w_2}(q^s) ds$$

$$g_{w_1, w_2}(z) = \frac{1}{z(w_1 - w_2)} \frac{(zw; q)_{\infty}^N}{(w; q)_{\infty}^N} \left(\frac{1+zw_1r}{1+wr} \right)^t$$

∴)

出発点 Thm 3.5.

$$\left\langle \frac{1}{(zq^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle_{qW} = \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{n_1, \dots, n_L \geq 1} \oint \dots \oint \det [K(n_i, w_i; n_j, w_j)]_{i,j=1}^L$$

(実数 $n_i = \mathbb{F}_57211$)

$$\rightarrow \sum_{L \geq 0} \frac{1}{L!} \oint \dots \oint \det \left[\sum_{n_i \geq 1} K(n_i, w_i; w_j) \right]$$

問題: 正確か? よ.

かつ.

$$\sum_{n \geq 1} K(n, w_1; w_2) = \sum_{n \geq 1} z^n g_{w_1, w_2}(q^n) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sum_{k \geq 1} \int_{\Gamma_k} \Gamma(-s) \Gamma(1+s) (-z)^s g_{w_1, w_2}(q^s) ds$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \Gamma(-s) \Gamma(1+s) (-z)^s g_{w_1, w_2}(q^s) ds$$

∴) $\Gamma(-s)$ は $s=k!$ $k=1, 2, 3, \dots$ に -1 の極を持つ

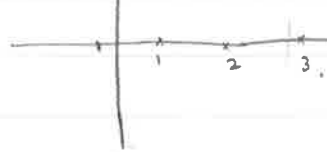
$$\text{Res}_{s=k} \Gamma(-s) = (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

よって

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \Gamma(-s) \Gamma(1+s) (-z)^s g_{w_1, w_2}(q^s) ds$$

$$= (-)^{k+2} \frac{1}{k!} k! (\times \zeta)^k g(\zeta^k) = \zeta^k g(\zeta^k)$$

②


 \Rightarrow

 $\leftarrow \Gamma_k$
 $= 12$

$g(\zeta^k)$ が右半平面で極を持たない。

Γ_k の積分が $k \rightarrow \infty$ で消える。

§ 3 補遺

(Thm 3.4 の証明)

$$\text{右辺} = (q; q)_k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots}} \frac{1}{m_1! m_2! \dots} \frac{1}{(2\pi i)^k} \oint \dots \oint \det \left[\frac{1}{w_i q^{\lambda_i} w_j} \right]_{i,j=1}^k \prod f(w_j) \cdot f(q^{\lambda_j-1} w_j) dw_j$$

$f(x)$ の極 $b_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ $i=1 \sim k$

留数積分 w_1, w_2, \dots, w_k の等号について
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 b_1, b_2, b_k

$b_i = b_j \quad i \neq j \Rightarrow$ 消える

$\lambda_i = \lambda_{i'} = a_{i'} \Rightarrow \begin{matrix} w_i \\ \downarrow \\ b_i \end{matrix} \begin{matrix} w_{i'} \\ \downarrow \\ b_{i'} \end{matrix} \text{ と } \begin{matrix} w_{i'} \\ \downarrow \\ b_{i'} \end{matrix} \begin{matrix} w_j \\ \downarrow \\ b_j \end{matrix}$ の等号は同じ

$|\lambda_i| = m_j \quad a_{i'} \Rightarrow m_j! =$ 同じ等号が成り立つ

しなべて

$$\text{右辺} = (q; q)_k \sum_S \prod_{j=1}^k \text{Res } f(w) \cdot f(q b_j) \dots f(q^{\lambda(b_j)-1} b_j) \det \left[\frac{1}{b_i q^{\lambda(b_i)} - b_j} \right]_{i,j=1}^k$$

$S \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$, disjoint
 $S = (S_1, S_2, \dots) \quad |S_i| = m_i, \quad m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots = k$

$$= \{ \underbrace{b_1, \dots, b_{m_1}}_{S_1}, \underbrace{b_{m_1+1}, \dots, b_{m_1+m_2}}_{S_2}, \dots, b_k \}$$

$l = m_1 + m_2 + \dots$

$\lambda(b_i) \quad b_i$ の含み数 S_j の index: j

k 次元の留数法

$$\text{左辺} = \sum_{j=1}^N \frac{\text{Res } f(z)}{z_j} \frac{(-)^{k-1}}{(2\pi i)^{k-1}} \oint \dots \oint \prod_{1 \leq \alpha < \beta < k-1} \frac{q(z_\alpha - z_\beta)}{z_\alpha - q z_\beta} \frac{\tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_{k-1})}{z_1 \dots z_{k-1}} dz_1 \dots dz_{k-1}$$

(*) \leftarrow 留数法の仮定を適当

$$= (q; q)_{k-1} \sum_{j=1}^N \sum_{S_j} \frac{1}{x_j} \det \left[\frac{1}{b_i q^{\lambda(b_i)} - b_j} \right]_{b_i, b_j \in S_j}$$

$$\times \prod_{b \in S_j, 1 \leq \alpha < \beta} \text{Res}_{w=b} \tilde{f}_j(w) \cdot \tilde{f}_j(qb) \dots \tilde{f}_j(q^{\lambda(b)-1} b)$$

$$\times \text{Res}_{w=x_j} f(w) \cdot \text{Res}_{w=qx_j} \tilde{f}_j(w) \cdot \tilde{f}_j(q^2 x_j) \dots \tilde{f}_j(q^{\lambda(qx_j)} x_j)$$

関数式

• $l \neq j$

$$\operatorname{Res}_{w=x_l} \tilde{F}_j(w) \cdot \tilde{F}_j(qx_l) \cdots \tilde{F}_j(q^{\lambda(x_l)-1}x_l) = \frac{q^{\lambda(x_l)-1} x_l - x_j}{x_l - qx_j} q^{1-\lambda(x_l)} \operatorname{Res}_{w=x_l} f(w) \cdot f(qx_l) \cdots f(q^{\lambda(x_l)-1}x_l)$$

• $\operatorname{Res}_{w=qx_j} \tilde{F}_j(w) \cdot \tilde{F}_j(q^2x_j) \cdots \tilde{F}_j(q^{\lambda(x_j)}x_j) = (q^{\lambda(x_j)}x_j - x_j) q^{1-\lambda(x_j)} f(qx_j) \cdots f(q^{\lambda(x_j)}x_j)$

を用いて

左辺)

$$= (q-1)_{k-1} \sum_{d=1}^N \sum_{S_j} \frac{-1}{x_j} \det \left[\frac{1}{\tilde{b}_x q^{\lambda(\tilde{b}_x)} - \tilde{b}_x} \right]_{\tilde{b}_x, \tilde{b}_y \in \tilde{S}_j}$$

$$\times \prod_{\tilde{b} \in S_j \setminus \{qx_j\}} \frac{q^{\lambda(\tilde{b})} \tilde{b} - x_j}{\tilde{b} - qx_j} q^{1-\lambda(\tilde{b})} \operatorname{Res}_{w=\tilde{b}} f(w) \cdot f(q\tilde{b}) \cdots f(q^{\lambda(\tilde{b})-1}\tilde{b})$$

$$\times \operatorname{Res}_{w=qx_j} f(w) \cdot (q^{\lambda(x_j)}x_j - x_j) q^{1-\lambda(x_j)} f(qx_j) \cdots f(q^{\lambda(x_j)}x_j)$$

$\tilde{b} \in \tilde{S}_j = (\tilde{S}_{j,1}, \tilde{S}_{j,2}, \dots)$, $\tilde{S}_{j,l} \subset (A \setminus x_{j+1} \cup \{qx_j\})$
disjunctive $|\tilde{S}_{j,l}| = m_l$ $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots = k-1$

$$= \left\{ \underbrace{\tilde{b}_1 \cdots \tilde{b}_{m_1}}_{S_j}, \dots \right\}$$

$\tilde{S}_j \Rightarrow S \cong$ 積

$$\left\{ \begin{array}{l} qx_j \in \tilde{S}_{j,l} \quad a \in \mathbb{Z} \\ S_l = \tilde{S}_{j,l} \setminus \{qx_j\} \quad ; \quad S_{l+1} = \tilde{S}_{j,l+1} \cup \{qx_j\} \quad ; \quad S_m = \tilde{S}_{j,m+1} \quad m \neq l, l+1 \\ qx_j \notin \tilde{S}_j \\ S_1 = \tilde{S}_{j,1} \cup \{qx_j\} \quad ; \quad S_m = \tilde{S}_{j,m} \quad \dots, m > 1 \end{array} \right.$$

感覚的には

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}_x = b_x \quad \tilde{\lambda}(\tilde{b}_x) = \lambda(b_x) \\ \tilde{b}_y = q b_y \quad \tilde{\lambda}(\tilde{b}_y) = \lambda(b_y) - 1 \end{array} \right.$$

4-①

§ 4. η -TASEP の極限

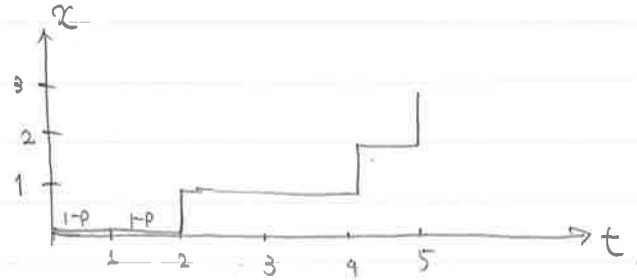
4-1. 連続時間極限

- Bernoulli random walk.

$$x(0) = 0$$

$$x(t+1) = x(t) + X_t$$

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{with prob. } p \\ 0 & \text{with prob. } 1-p. \end{cases}$$



次のような連続時間極限を考える

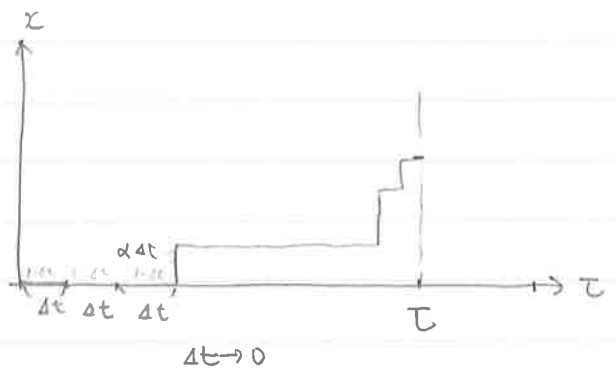
$$\Delta t : \text{ハズレ}$$

$$t = \tau / \Delta t$$

$$p = \alpha \Delta t \quad \alpha < 1$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

Δt だけ $\alpha \Delta t$ の確率で hop する。



$$\text{Prob}(x(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}$$

上の極限で

$$\text{Prob}(x(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n} \rightarrow \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!} \quad \text{ポアソン分布}$$

= 項分布

これは、レート α のポアソンラングムル過程となる。
上の連続時間極限で

証明を示せ。

- GT_N 上の成長過程の連続時間

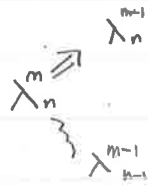
- 各粒子の持っているレート α を計算してみる。

つまり各粒子は、レート

の "exponential clock" を持っている。

4-②

- $\tau \sim \tau + dt$ の間に $\lambda_n^m(\tau)$ の clock が鳴る可能性がある。



- $\lambda_n^m(\tau) = \lambda_{n-1}^m(\tau)$
 ときは鳴らない。(exclusion)

- $\lambda_n^m(\tau) < \lambda_{n-1}^m(\tau)$ ときは

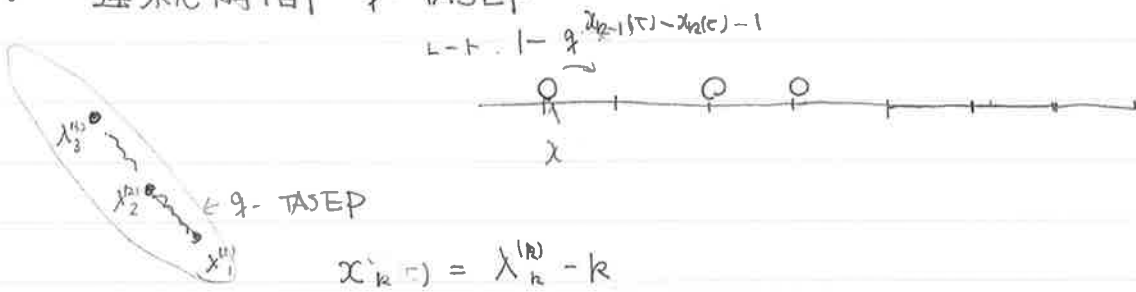
$$\lambda_n^m(\tau + dt) = \lambda_n^m(\tau) + 1$$

さらに $\lambda_n^m(\tau) = \lambda_n^{m+1}(\tau) = \dots = \lambda_n^{m+k}(\tau) < \lambda_n^{m+k+1}(\tau)$

を満たすすべての $\lambda_n^{m+i}(\tau)$ ($i=1, \dots, k$) を同時に +1 する。(push dynamics)

- $\tau \sim \tau + dt$ の間に 2つ以上の粒子の clock が鳴る確率は 0.

連続時間 q-TASEP



- Fredholm det 表示

離散時間 Th.3.6

$$\left\langle \frac{1}{(s q^{\lambda_N} : q)_0} \right\rangle_{qW} = \det(1 + K_S)_{L^2(c_1)}$$

$$K_S(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} t(-s)\Gamma(1+s)(-s)^s q_{w_1, w_2}(q^s) ds$$

$$q_{w_1, w_2}(x) = \frac{1}{x w_1 - w_2} \frac{(x w : q)_{\infty}^N}{(w : q)_{\infty}^N} \left(\frac{1+xwr}{1+wr} \right)^t$$

$$r = \frac{P}{1-P}$$

4-③

この連続極限. $t = \frac{\tau}{\Delta t}$, $P = \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$

$$g_{w_1, w_2}(x) \text{ の } \left(\frac{1 + \alpha w r}{1 + w r} \right)^t = \left(\frac{1 + \frac{\alpha w \Delta t}{1 - \Delta t}}{1 + \frac{\Delta t}{1 - \Delta t} w} \right)^{\frac{\tau}{\Delta t}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \sim \left(1 + (\alpha + 1) w \Delta t + O(\Delta t^2) \right)^{\frac{\tau}{\Delta t}} \longrightarrow e^{(\alpha + 1) w \tau}$$

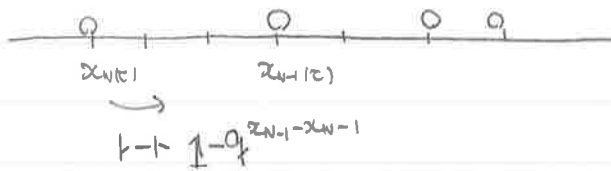
したがって連続時間の場合. Thm 3.6 は $g_{w_1, w_2}(x)$ が

$$g_{w_1, w_2}(x) = \frac{1}{\alpha w_1 - w_2} \frac{(w_1 q)_\infty^N}{(w_1 q)_\infty^N} e^{(\alpha + 1) w \tau}$$

と変化するのは変らなない。

4-2 弱馬区動極限

出発点: 連続時間 q -TASEP



弱馬区動極限を考慮

$$q = e^{-\varepsilon}, \tau = \varepsilon^{-2} s, x_{k+k} = \varepsilon^{-2} s - (k-1) \varepsilon^{-1} \log e^{-1} - \varepsilon^{-1} y_k$$

$\varepsilon \rightarrow 0.$

• $q \sim 1$ 馬区動力が弱い.

• y_k : x_k のゆらぎ. $\varepsilon^{-1} \propto \sqrt{\tau}$ のスケール (拡散のスケール)
 フラウンの揺らぎがみえるスケール

↳

$$1 - q^{x_{N-1} - x_N - 1} = 1 - \varepsilon e^{y_{N-1} - y_N} \text{ と変る.}$$

問題 2.4 を見よ.

4 ⊕

以下直観的な議論

時間間隔 $d\tau = \varepsilon^{-2} ds$ ($ds \ll d\tau \ll t$)

の間に x_N がジャンプした回数 $x_N(\tau + d\tau) - x_N(\tau)$

$$x_N(\tau + d\tau) - x(\tau) \simeq \underbrace{(x_N \text{ のジャンプ率 } t)}_{\textcircled{1}} \times \underbrace{\left(\frac{d\tau}{t} \right)^{\text{ジャンプ回数}}}_{\textcircled{2}}$$

① $1 - \varepsilon e^{y_{N-1} - y_N}$

② $\sim d\tau$
 \downarrow
 $\varepsilon^{-2} ds + \varepsilon^{-1} (B_N(s+ds) - B_N(s))$
標準化して元に戻す
 $\varepsilon^{-2} \text{ の } t^{-2}$ $\varepsilon^{-1} \text{ の } t^{-1}$

したがって

$$x_N(\tau + d\tau) - x(\tau) = \varepsilon^{-2} ds - \varepsilon^{-1} (y_N(s+ds) - y_N(s))$$

$$= (1 - \varepsilon e^{y_{N-1} - y_N}) (\varepsilon^{-2} ds + \varepsilon^{-1} (B_N(s+ds) - B_N(s)))$$

$$\varepsilon^{-2} ds = ds$$

$$\varepsilon^{-1} e^{y_N} \frac{y_N(s+ds) - y_N(s)}{ds} = e^{y_{N-1}} - e^{y_N} \frac{B_N(s+ds) - B_N(s)}{ds}$$

$\longrightarrow e^{y_N} = z_N$ $\varepsilon \ll ds \rightarrow 0$ とおくと
 $B_N \rightarrow -B_N$

$$\frac{dz_N}{ds} = z_{N-1} + \dot{B}_N z_N \quad \text{と表す}$$

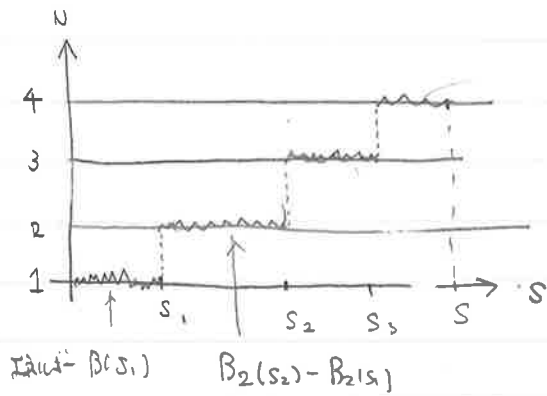
N=1 $\frac{dz_1}{ds} = \dot{B}_1 z_1$ $z_1 = e^{B_1(s)}$

N=2 $\frac{dz_2}{ds} = e^{B_1(s)} + \dot{B}_2 z_2$ $z_2 = \int_0^s ds_1 e^{B_2(s) - B_2(s_1) + B_1(s)}$

N $\frac{dz_N}{ds} = z_{N-1} + \dot{B}_N z_N$ $z_N = \int_{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{N-1} < s} ds_1 \dots ds_{N-1} e^{B_N(s) - B_N(s_{N-1}) + B_{N-1}(s_{N-1}) - B_{N-1}(s_{N-2}) + \dots + B_1(s)}$

4⑤

$(\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})$ 上の
この Z_N は ランダム媒質中のポリマーの分配関数とみなせる。



ポリマー

$$\int_{0 < s_1 < s_2 < s_3 < s} ds_1 ds_2 ds_3 e^{E[s_1, s_2, s_3]}$$

$$E := B_1(s_1) + B_2(s_2) - B_2(s_1) + B_3(s_3) - B_3(s_2) + B_4(s) - B_4(s_3) //$$

$N=2$ Matsumoto-Yor (1999)

N -一般 O'Connell (2009) ← 量子戸田

ジャンプがポアソンで起る場合の $e^{E[s_1, s_2, \dots, s_{N-1}]}$ の期待値

区間 $(0, s)$ 中の $(s_j - s_{j-1}, ds_j)$ $j=1 \sim N-1$ でジャンプが起る確率

$$e^{-s} ds_1 \dots ds_{N-1}$$

(*) ジャンプは一様に起る。

$$\int_{0 < s_1 < \dots < s_{N-1} < s} e^{-s} ds_1 \dots ds_{N-1} = \frac{s^{N-1} e^{-s}}{(N-1)!} \leftarrow \text{ポアソン分布}$$

したがって $e^{E[s_1, s_2, \dots, s_{N-1}]}$ の期待値は

$$\tilde{Z}_N(s) := e^{-s} Z_N(s) \text{ で } s \geq 0 \text{ なる}$$

≡ \tilde{Z}_N は

$$\frac{d\tilde{Z}_N(s)}{ds} = (\tilde{Z}_{N-1} - \tilde{Z}_N) + B_N(s) \tilde{Z}_N \text{ を満たす}$$

問題に与えられた。

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{dZ(x, s)}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} Z(x, s) + V(x, s) Z(x, s)$$

連続近似

Stochastic heat equation. ホフマン-イブ

4-⑥

まとめ.

高次元 q-TASEP



連続 q-TASEP

・ 弱相互作用

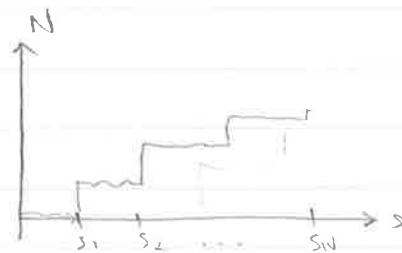
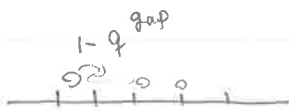


O'Connell-Tor
Polymer



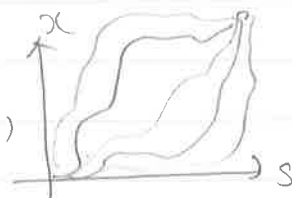
N → x
連続

Stochastic
heat eq



$$\frac{dZ_N}{ds} = Z_{N-1} + B_N Z_N$$

$$\frac{dZ(\alpha, s)}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(\alpha, s) + \eta(\alpha, s) Z(\alpha, s)$$



$$Z(\alpha, s) = e^{h(\alpha, s)} \quad \text{Cole-Hopf}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta(\alpha, s)$$



1次元 KPZ 方程式から.

5-①

§ 5 KPZ 方程式

1次元 Kardar - Parisi - Zhang 方程式 (1986)

$h(x, t) \in \mathbb{R}$: 位置 $x \in \mathbb{R}$ 時刻 $t > 0$ における界面の高さ

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \sqrt{D} \eta$$

$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$ ホワイトノイズ

スケールリング

$$\frac{\lambda}{2\nu} h_{\nu\lambda D} \left(x, \frac{t}{2\nu} \right) = h_{\frac{1}{2}, 1, 1} (d^2 x, d^4 t), \quad d = \frac{\lambda D^{\frac{1}{2}}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

→ 以下では "標準" KPZ 方程式 ($\nu = \frac{1}{2}, \lambda = 1, D = 1$)

を考える

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta$$

$h(x, t)$ のゆらぎ

$$\Delta h(x, t) \sim t^{\frac{1}{3}} \quad t \rightarrow \infty$$

$\frac{1}{3}$... growth exponent (普遍的)
KPZ 普遍クラス ($t \rightarrow \infty$)

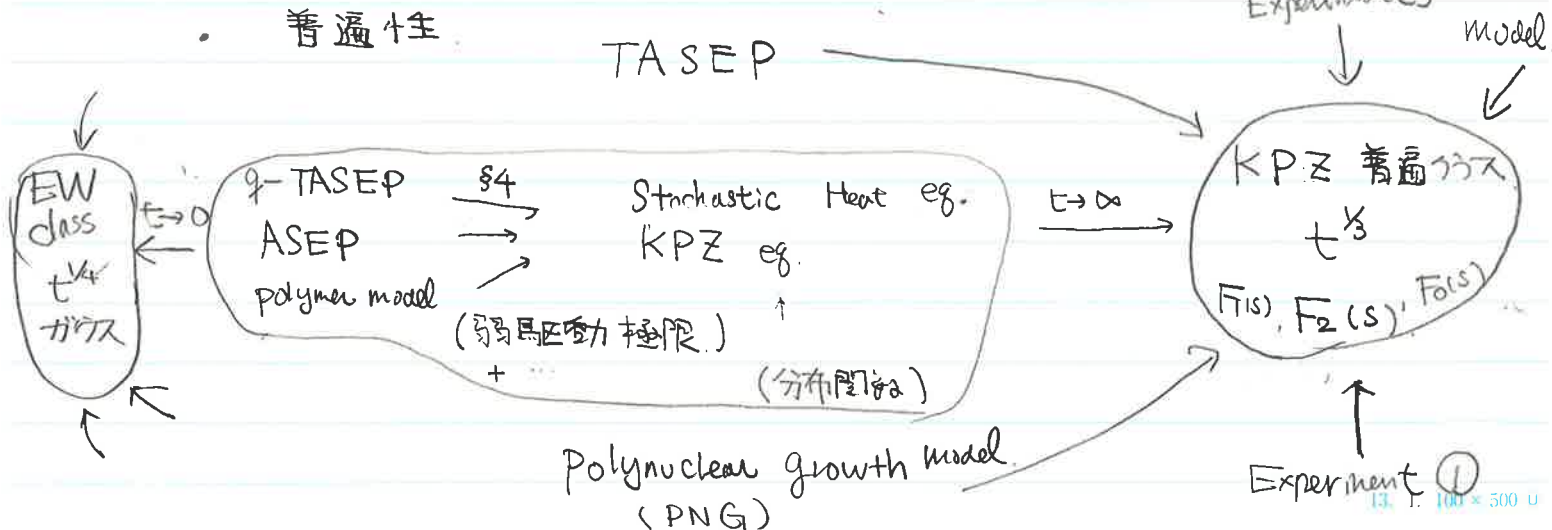
高さゆらぎの分布関数

Sasamoto - Spohn (2010)
Amir - Corwin - Quastel (2010)

インパクト

- 普遍性の理解
- 数理的発展 \Rightarrow KPZ 威力 (Macdonald, Duality) 2010 - 2011 - 2011 - Experiment (2)

普遍性



5-①

§5 KPZ 方程式と q-TASEP

1次元 Kardar-Parisi-Zhang 方程式 (1986)

$h(x, t) : \text{位置 } x \in \mathbb{R} \cdot \text{時刻 } t > 0 \text{ における界面の高さ}$
 $\in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \sqrt{D} \eta$$

$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = d(x-x') \delta(t-t')$ $\neq \eta(x) \eta(x')$

- $h(x, t)$ のゆらぎが $t \rightarrow \infty$ で $t^{1/3}$ に比例
 $\frac{1}{3}$ growth exponent \leftarrow 普遍的
 KPZ 普遍クラス ($t \rightarrow \infty$)

スケール

$$\frac{\lambda}{2\nu} h_{\nu, \lambda, D}(x, \frac{t}{2\nu}) = h_{\frac{1}{2}, 1, 1}(d^2 x, d^4 t) \cdot d = \frac{\lambda D^{\frac{1}{2}}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

\Rightarrow 以下では “標準” KPZ 方程式 ($\nu = \frac{1}{2}, \lambda = 1, D = 1$) を考える.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta$$

① Cole-Hopf 解

KPZ 方程式は 実は well-defined ではない。
 \Rightarrow Cole-Hopf 解と呼ばれる正則化が知られている。

• C.H. を用いた正則化 (Hairer 2011)

② L²ノリカ法

$$Z_t(x, t) := e^{h(x, t)} \quad (\text{Cole-Hopf 変換を用いて})$$

$$Z_t(x, 0) = f(x) \Rightarrow h(x, t) = -\frac{|x|}{\delta}$$

narrow wedge



5-②

Z の k 次 モーメント (h の k 次 積取 モーメント)

$$\langle Z^k(x, t) \rangle = \langle e^{kh(x,t)} \rangle$$

q-TASEP

$$\langle q^{kN} \rangle_{qW}$$

Z の モーメント 関係

$$G_{\delta t}(s; X)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}ns + \frac{t}{24} + \frac{1}{2}X^2)^k}{k!} \langle Z^k(2n^2 X, t) \rangle$$

(2n^2 積取 積取)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{kN}}{(k!)_q} \langle q^{kN} \rangle_{qW}$$

送

$$\langle e^{-e^{\delta t}(\tilde{h}(x) - s)} \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{1 - \frac{1}{q} q^{kN}} : q \rangle_{qW}$$

with $\delta t = (\frac{t}{2})^{1/2}$

$$h(x, t) = -\frac{t}{24} - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}\tilde{h}(x)$$

70) 方法

$$G_{\delta t}(s; X) = \det(1 - L_1)_{L^2(\mathbb{R}_{>0})}$$

Th 3.5

$$= \det(1 - L_2)_{L^2(\mathbb{R}_{>0})}$$

Th 3.6

$$L_1(w_j, w_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi} e^{-n(w_j + w_k) - 2i q \delta t^3 n^3 q^2 + \frac{t}{24} n^2 \delta t n s}$$

$$L_2(z_j, z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dy A_i(z_j + y) A_i(z_k + y) \frac{1}{e^{\delta t(z_j - y)} + 1}$$

この形式は KPZ の 分布 になる。

Sasamoto - Spohn 2010

この 関係は 見逃すな

Amir - Corwin - Quastel 2010

ASEP → KPZ

Lipshitz, Dotseanko 2010, Carabrese - Le Doussal - Rosso 2010

5-③

5-1 Cole-Hopf 解.

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \partial_x^2 h + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 + \eta$$

$$z(x,t) = e^{h(x,t)} \quad (\text{Cole-Hopf 変換})$$

$z(x,t)$ の偏微分方程式を素朴に考えよう。

$$(5-1) \quad dz = z dh$$

$$\begin{aligned} dh &= \frac{1}{2} \partial_x^2 h dt + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 dt + \overbrace{\eta dt}^{dW_{t \times t}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{\partial_x z}{z} \right) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_x z}{z} \right)^2 dt + dW \\ &= \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{\partial_x z}{z} \right)^2 + \frac{\partial_x^2 z}{z} \right) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_x z}{z} \right)^2 dt + dW \\ &= \frac{1}{2z} \partial_x^2 z + dW \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dz(x,t)}{dt} = \frac{1}{2} \partial_x^2 z + \underbrace{z \eta}_{\text{Stratonovich 型}} \quad \text{解釈可能}$$

(5-1) の変換に Itô の公式を適用しよう。

$$dz = z' dh + \frac{1}{2} z'' (dh)^2$$

$dW dW \rightarrow \delta(t) dt$

$$\therefore \frac{dz(x)}{dt} = \frac{1}{2} \partial_x^2 z + \underbrace{z \eta}_{\text{Itô 型}} + \frac{1}{2} \delta(t)$$

この2つの式は、ill-defined であることが知られている。

そこで、以下のように考える。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \partial_x^2 z + \underbrace{z \eta}_{\text{Stratonovich}}$$

Stratonovich \rightarrow Itô 型になる

これは、数学的に well defined.

5-④

$$\text{つまり) } \frac{dZ}{dt} = \frac{1}{2} \partial_x^2 Z + Z \overset{\downarrow + \eta}{\eta}$$

$h = \log Z$ の定義より h は KPZ 方程式の Cole-Hopf 変換という。
(Bertini - Giacomin 947)

この h は、正則化 KPZ 方程式

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \partial_x^2 h + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 + \eta - \frac{1}{2} \delta(x)$$

に等しい。

Feynman-Kac-formula (Bertini - Cancreri 1995) $\delta(B(t))$

$$Z(x, t) = \mathbb{E}_x \left(\exp \left[\int_0^t \eta(B_x(s), t-s) ds \right] Z(B_x(t), 0) \right) e^{-\frac{\delta(x)}{2} t}$$

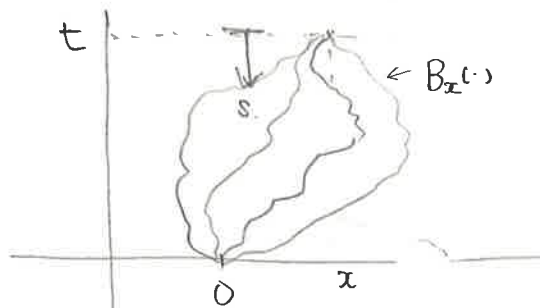
$B_x(s)$: 出発点が x の標準 BM.

\mathbb{E}_x : $B_x(\cdot)$ に関する平均.

空間 (x, t) 上.

$B_x(\cdot)$: polymer の 軌道 directed.

$Z(x, t)$: ランダムウォークの 分岐関数.



$$Z(x, t) = \int_{x(0)=0}^{x(t)=x} D[x(s)] e^{-S[x(s)] - \frac{\delta(x)t}{2}}$$

という書き方もある.

$$S[x(s)] = \int_0^t ds \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \eta(x, s) \right\}$$

5-②

$$\langle Z(x, t) \rangle = \mathbb{E}_x \left(e^{\int_0^t \frac{\delta(s)}{2} ds} \delta(B_x(t)) \right) e^{-\frac{\delta(x)}{2} t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\langle e^{\int_0^t \eta(x, s) ds} \rangle = e^{\frac{1}{2} \iint \langle \eta(x, s) \eta(x, s') \rangle ds ds'}$$

$$\langle \eta(x_1, s_1) \dots \eta(x_n, s_n) \rangle = 0 \quad n \text{ odd}$$

$$\langle \eta(x_1, s_1) \dots \eta(x_n, s_n) \rangle = \sum_{\text{pairings}} \langle \eta(x_{i_1}, s_{i_1}) \eta(x_{i_2}, s_{i_2}) \rangle \dots \times \langle \eta(x_{i_{k-1}}, s_{i_{k-1}}) \eta(x_{i_k}, s_{i_k}) \rangle$$

$$\langle \eta(x_1, s_1) \eta(x_2, s_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) \delta(s_1 - s_2)$$

つまり Stratonovich の場合

$$Z(x, t) = \mathbb{E}_x \left(e^{\int_0^t \eta(B_x(t-s), s) ds} \delta(B_x(t)) \right)$$

$$\langle Z(x, t) \rangle = \mathbb{E}_x \left(e^{\frac{\delta(x)}{2} t} \delta(B_x(t)) \right) \rightarrow \text{発散}$$

5-⑥

5-2 L-ポリカ法

k-Lポリカ分配関数 $\langle \prod_{j=1}^k Z(x_j, t) \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle \prod_{j=1}^k Z(x_j, t) \rangle \\ &= E_{x_1} E_{x_2} \dots E_{x_k} \left[\left\langle e^{\sum_{j=1}^k \int_0^t ds_j \eta(B_{x_j}(t-s_j), s_j)} \prod_{j=1}^k \delta(B_{x_j}(t)) \right\rangle \right] e^{-\frac{\delta_0 k t}{2}} \\ &= E_{x_1} E_{x_2} \dots E_{x_k} \left[e^{\sum_{i,j=1}^k \int_0^t \delta(B_{x_i}(t-s) - B_{x_j}(t-s)) ds} \prod_{j=1}^k \delta(B_{x_j}(t)) \right] e^{-\frac{\delta_0 k t}{2}} \\ & \quad \sum_{i,j} \int_0^t \dots \text{の } i=j \text{ の項が } -\frac{\delta_0 k t}{2} \text{ と相殺} \\ &= E_{x_1} E_{x_2} \dots E_{x_k} \left[e^{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k \int_0^t \delta(B_{x_i}(t-s) - B_{x_j}(t-s)) ds} \prod_{j=1}^k \delta(B_{x_j}(t)) \right] \end{aligned}$$

したがって、 $\langle \prod_{j=1}^k Z(x_j, t) \rangle$ は

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \prod_{j=1}^k Z(x_j, t) \rangle = -H \langle \prod_{j=1}^k Z(x_j, t) \rangle \quad \text{を 満たす。}$$

$$\text{ただし、} \quad H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \delta(x_j - x_k)$$

δ 関数 $\underbrace{\text{相互作用する}}_{\text{引力}}$ Boson (Lieb-Linigerモデル)

Bethe 仮説と呼ばれる手法を用いて H の固有値、固有関数が知られて
いる。(Lieb-Liniger 1963)

$$H \Psi_E = E_E \Psi_E$$

$$\Psi_E(x_1, \dots, x_k) = C_E \sum_{P \in S_N} \text{sgn } P \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_{P(i)} - z_{P(j)} + i \text{sgn}(x_i - x_j)) e^{i \sum_{\alpha=1}^k z_{P(\alpha)} x_\alpha}$$

$$C_E = \left(\frac{\prod_{\alpha=1}^M n_\alpha}{k!} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1}{|z_i - z_j|^2} \right)^{1/2}$$

$$E_E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k z_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha q_\alpha^2 - \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^M (n_\alpha^3 - n_\alpha)$$

5-7

Z : 擬運動量 (状態を特徴づける量)

$$Z_j = q_a - \frac{i}{2}(n_a + 1 - 2r_a)$$

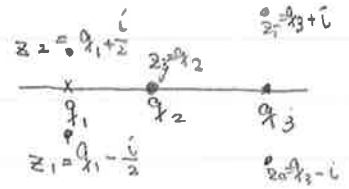
$$q_a \in \mathbb{R}, n_a \in \{1, 2, \dots\}, a=1, \dots, M$$

q_a は中心にあるストリートの長さ

$$r_a = 1, 2, \dots, n_a \quad \sum_{a=1}^M n_a = k$$

$$j = \sum_{\beta=1}^{a-1} n_\beta + r_a$$

例 $M=3, n_1=2, n_2=1, n_3=3$



$\{z_j\}_{j=1, \dots, k}$ は $\{q_a\}_{a=1, \dots, M}$ $\{n_a\}_{a=1, \dots, M}$ を指定すると決まる。

完全性 (Oxford 1979, Heckman-Opdam 1997, Prohac-Spahn 2011)

$$\sum_{\mathbb{Z}} \Psi_{\mathbb{Z}}(x_1, \dots, x_k) \Psi_{\mathbb{Z}}^*(y_1, \dots, y_k) = \prod_{i=1}^k \delta(x_i - y_i)$$

ここで $\Psi_{\mathbb{Z}}(x_1, \dots, x_k)$, $E_{\mathbb{Z}}$ を用いて k -粒子分配関数を展開する。
 $\langle Z(x, t)^k \rangle$

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{Z}}(x, x, \dots, x) &= C_{\mathbb{Z}} e^{ix \sum_{a=1}^M q_a} \sum_{P \in S_k} (z_{P(1)} - z_{P(2)} + i \operatorname{sgn}(x_i - x_j)) \\ &= C_{\mathbb{Z}} e^{ix \sum_{a=1}^M q_a} k! \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_i - z_j) \end{aligned}$$

と因子化されることに注意。

$$\langle Z(x, t)^k \rangle = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-E_{\mathbb{Z}} t} \Psi_{\mathbb{Z}}(x, \dots, x) \Psi_{\mathbb{Z}}^*(0, \dots, 0)$$

$$= \sum_{\mathbb{Z}} C_{\mathbb{Z}}^2 e^{ix \sum_{a=1}^M q_a} (k!)^2 \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_i - z_j)^2 \quad \text{とある}$$

$$\sum_{\mathbb{Z}} = \sum_{M=1}^k \frac{1}{M!} \prod_{a=1}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_a}{2\pi} \sum_{n_a=1}^k \sum_{r_a=1}^{n_a} \right)$$

5-⑧

$\{z_j\} \in \mathbb{C}^M, n_a, a=1, \dots, M$ と表す.

Cauchy's determinant formula

$$\frac{\prod_{\alpha < \beta} (a_\alpha - a_\beta)(b_\alpha - b_\beta)}{\prod_{\alpha, \beta} (a_\alpha - b_\beta)} = \det \left(\frac{1}{b_\alpha - a_\beta} \right)_{i,j=1}^M$$

を用いると.

$$\langle Z^k(x, s) \rangle = k! \sum_{M=1}^k \frac{1}{M!} \prod_{\alpha=1}^M \left(\int_0^\infty d w_\alpha \sum_{n_\alpha=1}^k \right) \times \det \left(L_{-1, n_\alpha, w_\alpha = w_j^-} \right)_{i,j=1}^M$$

$$\text{where } L_{-1, n, w_1, w_2} = e^{-n(w_1+w_2)} \int_{-b}^{\infty} \frac{dq}{\pi} e^{i n q x - \frac{t}{2} n q^2 - 2 i q (w_j - w_k)}$$

c.f) §3 q-TASEP Th. 3.5 の公式.

• generating function

$$G_{\text{He}}(s; x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(s_1 s + \frac{t}{2} s^2 + i x s^2) k}}{k!} \langle Z(2s x, t)^k \rangle = \det (1 - L_2) L^2(\mathbb{R}_{>0})$$

$$L_2(w_1, w_2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n(w_1+w_2) + \frac{t}{2} n^3 - i x n s} \int_{-b}^{\infty} \frac{dq}{\pi} e^{-t n^3 q^2 - 2 i q (w_j - w_k)}$$

$$q \rightarrow q + i x / t$$

$x = \text{任意}$

Airy 関数の公式

$$e^{m^3 n^3 / 3} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}(y) e^{m n y}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \text{Ai}(p^2 v) e^{i p x} = \frac{1}{2^{1/3}} \text{Ai}(2^{-1/3}(v+x)) \text{Ai}(2^{-1/3}(v-x))$$

を用いると.

$$G_{\text{He}}(s; x) := \det (1 - L_3) L^2(\mathbb{R}_{>0})$$

$$L_3(\beta_1, \beta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}(\beta_1 + y) \text{Ai}(\beta_2) \frac{1}{e^{\beta_2(s-y)} + 1} \quad \text{c.f) §3 //$$

5-9

• divergent sum

• レプリカ法の意味

1. 高さ分布の厳密解を与える。← Fredholmの積分で与えられる。

2. 分布関数より、むしろ指数モーメント関数に着目し、単一のFredholm行列式構造を得た。

⇒ Macdonald過程におけるq-モーメント関数のFredholm行列式構造の発見につながった。

• 数学的には正当化できない操作を含んでいる。

$$\langle z^{k(t,t)} \rangle = \sum_{\mathbb{Z}} e^{E_{\mathbb{Z}}} \Psi_k(z_1, \dots, x) \Psi_k(0, \dots, 0)$$

$$E_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^M n_a q_a^2 - \frac{1}{24} \sum_{a=1}^M (n_a^3 - n_a)$$

基底状態 E_g : $M=1, n_1=k$

$$E_g \propto -k^3$$

$$e^{-E_g} \propto e^{k^3}$$

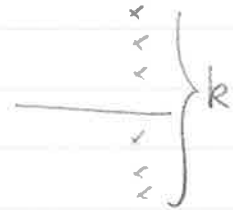
$$\therefore \langle z^k \rangle \propto e^{k^3}$$

$$\therefore G = \sum \frac{e^{k^3}}{k!} \langle z^k \rangle \dots \text{発散級数}$$

Any trick

$$e^{m^3 k^3 / 3} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}(y) e^{mky}$$

$$e^{k^3} \longrightarrow e^k \leftarrow k \text{ に関する和をとる}$$



5-10

• L₇₀₁力法 と マクドナルド 方程式 (q-TASEP)

KP z

q-TASEP

$z = e^h$ Cole Hopf

←

q^{λ_N}

$\langle z^k \rangle$

←

$\langle q^{k\lambda_N} \rangle$

$G = \langle e^{-e^{\alpha\epsilon}(\hat{n}(k)-s)} \rangle$

←

$\langle \frac{1}{(\sum q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \rangle$

"=" $\frac{(e^{\alpha\epsilon s})^k}{k!} \langle z^k \rangle$

←

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum^k}{(k, k) q} \langle q^{\lambda_N k} \rangle$

↑
正規化して

↑
正規化して (∵ $q < 1$)

5-①①

35 補遺

path integral rep. of 函數的理解 (2011)

Path integral representation (Itô vs. Stratonovich)

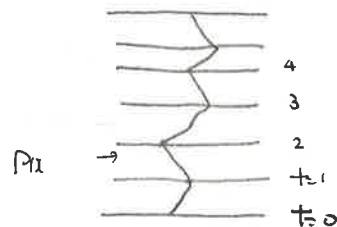
We consider two SPDE

$$(1) \quad \frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} + \eta Z(x,t) \quad \dots \quad \text{in the sense of Itô}$$

$$(2) \quad \frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} + \eta \circ Z \quad \dots \quad \text{in the sense of Stratonovich}$$

$$\text{i.c. } Z(x,0) = \delta(x-x_0)$$

The solution is expressed as



$$Z(x,t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_{N-1} \dots dx_1 P(x,t | x_{N-1}, t_{N-1}) P(x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2}) \dots \times P(x_1, t_1 | x_0, 0)$$

$$t_{j+1} - t_j = \frac{t}{N} = \Delta t$$

 $P(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$: Green's function.

①

Itô

$$P(x, t+\Delta t | y, t) = P(x, t | y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t | y, t) \Delta t + \eta(x, t) P(x, t | y, t) \Delta t$$

↑
forward difference

$$= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta t + \eta(x, t) \Delta t \right) \delta(x-y)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-y)} \left(1 - \frac{k^2}{2} \Delta t + \eta(x, t) \Delta t \right)$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-y) - \frac{k^2}{2} \Delta t + \eta(x, t) \Delta t - \frac{\delta(0)}{2} \Delta t}$$

(3)

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi \Delta t}} e^{-\left(\frac{(x-y)^2}{2\Delta t} - \eta(x, t) \Delta t + \frac{\delta(0)}{2} \Delta t \right)}$$

5-12

(2)

Stratonovich

$$P(x, t + \Delta t | y, t)$$

$$= P(x, t | y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t | y, t) \Delta t$$

$$\text{central difference} + \frac{1}{2} (P(x, t | y, t) + P(x, t + \Delta t | y, t)) \eta(x, t) \Delta t$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta t + \frac{\eta(x, t)}{2} \Delta t\right) \left(1 - \frac{\eta(x, t)}{2} \Delta t\right)^{-1} \delta(x - y)$$

$$\sim \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta t + \eta(x, t) \Delta t + \frac{\zeta(x)}{2} \Delta t\right) \delta(x - y)$$

$$(4) \quad \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta t}} e^{-\left(\frac{(x-y)^2}{2\Delta t} - \eta(x, t)\Delta t\right)}$$

Thus, we have

$$(It\ddot{o}) \quad Z(x, t) = \int D[x] e^{-\int_0^t d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \eta(x, \tau)\right)} \times e^{-\frac{1}{2} \zeta(x) t}$$

(∵ (3))

(Stratonovich)

$$Z(x, t) = \int D[x] e^{-\int_0^t d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \eta(x, \tau)\right)}$$

(∵ (4))