ラフパス理論の発生から
正則性構造理論の誕生まで

稲浜　譲　(名古屋大学)

確率論サマースクール
2014 年 9 月 9 日　信州大学

1　歴史的な経過

ものすごく大雑把な理解

♠　Terry Lyons のラフパス理論

　　= 伊藤流 SDE の脱ランダム化

♠　Martin Hairer の正則性構造理論

　　= ラフパス理論の SPDE 版みたいなもの

　　　(やや不正確)

未解決だった（または定式化すらできてなかった）重要な SPDE がいくつも解けた (KPZ eq., etc)

(1) Lyons の「元祖」ラフパス理論　(1998–)

(2) Gubinelli の「代数的」ラフパス理論　(2004–)
(= controlled path theory)　本講演の急所!

(3) Hairer 流のラフ SPDE 理論　(2010–2013)
(2) を土台にしている。複雑すぎて理解困難。

(4) Hairer の正則性構造理論 (2013–)　壮大な一般論

(注) (3) は今となっては勉強しないほうがよい。ただし
(3) を (4) の特殊例としてとらえるのは重要だと思う。

2 Driven ODE = controlled ODE

$x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$, 連続、十分「よい」

$\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n,d)$, $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

十分「よい」係数行列

♠ Driven ODE

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t + b(y_t)dt, \qquad y_0 \in \mathbf{R}^n.$$

これの**定義**は次の積分方程式である

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s)dx_s + \int_0^t b(y_s)ds.$$

簡単のため, $b \equiv 0$, $y_0 = 0$ とおいて, 次を考える。

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t, \qquad y_0 = 0 \in \mathbf{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow y_t = \int_0^t \sigma(y_s)dx_s$$

これが定式化可能かどうかは, 右辺のパス x に沿った線積分の定義が可能かどうかにかかっている.

(注) x が連続なだけでは、線積分は定義できない。

線積分可能な例

♠ x が区分的 C^1 級 $\quad\Longrightarrow\quad dx_t = x'_t dt$

♠ x が有界変動, またはリプシッツ連続

$\Longrightarrow$ リーマン・スティルチェス積分可能

♠ x が α-, y が β-ヘルダー連続, $\alpha + \beta > 1$

$\Longrightarrow$ ヤング (= 一般化 RS) 積分可能

こういう場合は y に対する不動点定理 (e.g., 逐次近似法) により、(たいていは) 一意解が求まる.

そのとき, $x \mapsto y$ を伊藤写像という.

確率論的に有用な方向に拡張できるか？

μ: d 次元ウィーナー測度 (=ブラウン運動)
$C_0([0,1],\mathbf{R}^d)$ 上の確率測度

しかし, $1/2$ ヘルダー連続な部分空間は確率 0
$\Longrightarrow$ ヤング (= 一般化 RS) 積分不可能
$\Longrightarrow$ BM のサンプル・パスに沿った線積分は
deterministic には無理 (ただし旧常識)

そこで伊藤流の確率積分．マルチンゲール性を使い確率論的．x-wise の意味はナシ．線積分写像や伊藤写像は x の連続写像にはならない

つまり, 次の相反する要請を同時に満たすことは不可能

♣ ウィーナー測度をのせたい

$\Longrightarrow$ パス空間　大,　　パスの性質　悪

♣ 線積分したい

$\Longrightarrow$ パス空間　小,　　パスの性質　良

Terry Lyons' rough path theory

パス x だけでなく、x が作る反復積分を組にして、パス概念を拡張 (ラフパス), これが上記の要請を両立することを示した. 線形代数を捨てて, 反復積分がみたすテンソル代数の世界に移行

- 線積分, ODE などは全て deterministic に定義できる上に, ラフパス空間からの連続写像になる.
(Lyons' continuity theorem)

- 特に BM のリフトをラフパスの意味の伊藤写像に代入すると、ストラトノヴィッチ型 SDE の解が得られる.

-つまり「SDE 理論の脱確率論化」
あるいは「微分方程式と測度の分離」

- 使わないもの $\cdots$ マルチンゲール積分論, マルコフ性, フィルトレーション　　とても「実解析」的

3 \Geometric Rough Path

$\triangle := \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le 1\}, \quad \alpha \in (0,1],$
$A : \triangle \to \mathrm{R}^d$, 連続

$$\|A\|_\alpha := \sup_{0 \le s < t \le 1} |A_{s,t}|/|t-s|^\alpha$$

$T^{(2)}(\mathrm{R}^d) := \mathrm{R} \oplus \mathrm{R}^d \oplus (\mathrm{R}^d \otimes \mathrm{R}^d)$
(2 階の切り捨てテンソル代数)

定義 (ラフパス) $\alpha \in (1/3, 1/2]$ "ラフネス"

連続写像 $X = (1, X^1, X^2) : \triangle \to T^{(2)}(\mathrm{R}^d)$ が次の２条件を満たすときラフパスという.

(i) K. T. Chen's identity $0 \le s \le u \le t \le 1$,

$$X^1_{s,t} = X^1_{s,u} + X^1_{u,t},$$
$$X^2_{s,t} = X^2_{s,u} + X^2_{u,t} + X^1_{s,u} \otimes X^1_{u,t}$$

(ii) α ヘルダー条件

$\|X^1\|_\alpha < \infty$, $\|X^2\|_{2\alpha} < \infty$

- $\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$: ラフパスの全体とする
- $2 = [1/\alpha]$

例 (滑らかなラフパス)

$x : [0,1] \to \mathrm{R}^d$, リプシッツ連続、$x_0 = 0$.

$$X^1_{s,t} := x_t - x_s, \quad X^2_{s,t} := \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u$$

この X は明らかにラフパスになる. x のリフトという.
(この方法で得られる X を滑らかなラフパスと呼ぶ.)

定義 (幾何学的ラフパス空間)

$$G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d) = \overline{\{\text{smooth rough paths in } \mathrm{R}^d\}}^{d_\alpha} \subset \Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$$

可分完備距離空間

$\otimes$ を $T^{(2)}(\mathrm{R}^d)$ の掛け算とすると、チェンの恒等式は

$$\boldsymbol{X}_{s,t} = \boldsymbol{X}_{s,u} \otimes \boldsymbol{X}_{u,t}$$

(ある群上の通常の意味のパスの「差分」の式である.)
$\Longrightarrow$ 実は２階の自由ベキ零群

$X^2_{s,t}$ の対称部分は $(X^1_{s,t} \otimes X^1_{s,t})/2$
新情報は次の反対称部分にのみ存在.

$$2\mathcal{A}^{ij}(X^2_{s,t}) = \text{''}\int_s^t \{(x^j_u - x^j_s)dx^i_u - (x^i_u - x^i_s)dx^j_u\}\text{''}$$

- $X^1 = Y^1$ だが $X^2 \neq Y^2$ となる $G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$ の元の例がある.　(リフトの非一意性)

- $X, Y \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$ に対して, 一般には加法は定義できない. (スカラー倍はできる.)

- 直和ペアのラフパス $(X, Y) \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d \oplus \mathrm{R}^r)$ も一般には定義できない

ただし X, Y の片方が例えば smooth ラフパスならば, 加法も直和ペアもできる. 第２レベルパスの”cross term” がスティルチェス積分を使って定義できるからだ.

4　ラフパスに沿った線積分 (Lyons 流)

Riemann-Stieltjes 積分の一般化

$x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$, $f : \mathbf{R}^d \to \mathrm{Mat}(n,d)$ を十分良

$0 < t - s << 1$ として、形式的計算.

$$\int_s^t f(x_u) dx_u$$

$$= \int_s^t \left\{ f(x_s) dx_u + \frac{\nabla^1 f(x_s)}{1!} \langle X^1_{s,u}, dx_u \rangle + \cdots \right\}$$

$$= f(x_s) X^1_{s,t} + \nabla^1 f(x_s) X^2_{s,t} + \cdots$$

(テーラー展開と $\nabla^k f$ の対称性を用いた)

$X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$, $f : \mathrm{R}^d \to \mathrm{Mat}(n,d)$ を C^3 級
($x_t := X^1_{0,t}$ とおく)
積分 $\displaystyle\int f(X)dX$ を $G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^n)$ の元として定義したい.

$$\hat{Y}^1_{s,t} = f(x_s)X^1_{s,t} + \nabla f(x_s)X^2_{s,t}$$
$$\hat{Y}^2_{s,t} = f(x_s) \otimes f(x_s)X^2_{s,t}$$

$\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ を区間 $[s,t]$ の分割, $|\mathcal{P}|$ を分割の幅として

修正リーマン和の極限

$$Y^1_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0} \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}^1_{t_{i-1},t_i}$$

$$Y^2_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}^2_{t_{i-1},t_i} + Y^1_{s,t_{i-1}} \otimes Y^1_{t_{i-1},t_i}\right)$$

は収束して, $Y \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^n)$ となる.

($Y = \int f(X)dX$ と書く)

(注)　一般には, $\int f(Z)dX$ は定義できない

(定理) $f : \mathrm{R}^d \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, d)$ を C^3 とする．このとき，

$$G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d) \ni X \mapsto \int f(X)dX \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^n)$$

は局所リプシッツ連続であり，通常のリーマン・スティルチェス積分 $\int_0^{\cdot} f(x_u)dx_u$ の拡張になっている．

(注) Lyons 流の議論では、積分写像はラフパス空間からラフパス空間への写像である

5 Rough Differential Equation (Lyons 流)

$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{Mat}(n, d)$ を C_b^3 と仮定する.
- 与えられた R^d 値の (ラフ) パス X に対して R^n 値の (ラフ) パス Y を解とする次の方程式を考える.

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t,\ Y_0 = 0 \Longleftrightarrow Y_t = \int_0^t \sigma(Y_u)dX_u$$

このままでは、右辺が定義できない。そこで

$$\begin{cases} dX_t &= dX_t \\ dY_t &= \sigma(Y_t)dX_t \end{cases}$$

ここで $\hat{\sigma} : \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(d+n, d+n)$ を以下で定める.

$$\hat{\sigma}(z)\langle z' \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \sigma(y)x' \end{pmatrix}$$

この記号を使うと, 次に同値.

$$dZ_t = \hat{\sigma}(Z_t)dZ_t \qquad \text{with } \pi_1 Z_t = X_t$$

これはラフパスの積分写像として意味がつくので、これを RDE の定義とする。(Z もしくは $Y = \pi_2 Z$ のことを与えられた X に対する解という。)

定理 (Lyonsの連続性定理) $\sigma : \mathrm{R}^n \to \mathrm{Mat}(n, d)$ を C_b^2 級とし, 上記の RDE を考える. このとき, 任意の $X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$ に対して, 解 $Z \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d \oplus \mathrm{R}^n)$ が存在する. さらに σ が C_b^3 級だと仮定すると, 一意解があり, 以下をみたす.

(1) $X \mapsto Z$ は局所リプシッツ連続.

(2) 伊藤写像 $X \mapsto Y = \pi_2 Z = \Phi(X) \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^n)$ は局所リプシッツ連続.

証明は定石どおりに時間区間を縮めた上で、Picard 式の逐次近似を行う.

RS 積分の意味での ODE を拡張したものになっている.

6 \A Little Bit of Stochastics

パス空間上の測度であるウィーナー測度 μ を持ち上げて, ラフパス空間上の測度を得たい. $(1/3 < \alpha < 1/2)$
$w \in C_0(\mathbf{R}^d)$ と $m \in \mathbf{N}$ に対して, $w(m)$ を分点 $\{0, 1/2^m, 2/2^m, \ldots, 2^m/2^m = 1\}$ に対応した２進折れ線近似とする.
$w(m)$ はリプシッツ. RP リフト $W(m)$ が存在

$$\exists W := \lim_{m\to\infty} W(m) \qquad \mu\text{-a.s. in } G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$$

Brownian RP (RP 世界における BM みたいなもの)

さきほどの伊藤写像に代入すると, $t \mapsto \Phi(W)^1_{0,t}$ はストラトノヴィッチ型 SDE の解 y と一致.

$$dy_t = \sigma(y_t) \circ dw_t, \quad y_0 = 0$$

証明は Lyons の連続性定理と Wong-Zakai 近似定理による.

SDE の解が連続写像の像として得られた！

7 RDE driven by Gaussian RP

ある種のガウス過程はラフパスにリフトできる.

(代表例：fractional BM with $1/4 < H \leq 1/2$)

セミマルチンゲールではないことに注意

$\Longrightarrow [1/\alpha] = 2, 3$ のラフパス理論 (３重積分まで)

♠ こういったガウス RP で駆動される RDE の解の研究が最近はやり始めた.　　この確率過程は新種．何か？

♠ 弱気派 正体不明だし、応用も見つかってないし、研究する意味あるの？

♠ 強気派　数学的構造がしっかりあるから問題ない.
応用など必要なし（or 後から見つかるはず）.

♠ 無思想派 $\ni$ 講演者
「論文書けるなら、何でもいいや､､､」

第二、第三カテゴリーに属する人々が、この種の「SDEモドキ」をバリバリ研究をしはじめた。

♠ すでに相場のできた話題

- Stroock-Varadhan 型の台定理
- Schilder 型（Freidlin-Wentzell 型）の大偏差原理
- Laplace の方法 (上記の大偏差原理の精密化)

♠ 勃興中の話題

- Malliavin Calculus for RDEs

これは以下の技術的な進展によるところが大

(i) ヤコビアン過程の可積分性 (Cass-Litterer-Lyons)

(ii) RDE の解が $\mathbb{D}_\infty$ であること (I.)

(iii) Hörmander 条件下での Malliavin 共分散行列の非退化性 (Cass-Hairer-Litterer-Tindel)

♠ 次に来そうな話題

- RDE に対する数値解析的な問題
- RDE に対する統計学的な問題

どちらも通常の SDE に関してはたくさん論文がある
でもラフパスの枠組みではほとんど手がついていない.
今なら早いもの勝ち (かも).

講演者もこの件に関して、情報を集めてますので、
詳しい方はぜひよろしく.

8 Gubinelli's theory of controlled paths

- Lyons 流の積分は $\int f(X)dX$ の拡張
- 一般には $\int Y dX$, $\int f(Y)dX$ は存在せず

- 両方ともそろって X の場合だけ、というのは不便
- しかし、駆動するラフパス X と被積分関数 $f(X)$ を独立に動かすのは無理
- Gubinelli は「中間地点」まで、がんばって進んだ. X ごとに「被積分関数のなすバナッハ空間」を設定 ($f(X)$ はこのバナッハ空間に含まれている.)

３つ組 (Y, Y', R^Y) が, $X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$ の integrand(=controlled path) であるとは,

(i) $Y \in C^\alpha([0,1], \mathrm{R}^n)$

(ii) $Y' \in C^\alpha([0,1], \mathcal{L}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^n))$

(iii) $R^Y \in C^{2\alpha}(\triangle, \mathrm{R}^n)$

(iv) $Y_t - Y_s = Y'_s \cdot X^1_{s,t} + R^Y_{s,t} \ (0 \le s \le t \le 1)$

最後の式は「Y の挙動の悪さがだいたい X の挙動の悪さと同じ」という意味だとみなせる.

(記号) $(Y, Y') \in$ or $(Y, Y', R^Y) \in \mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n)$.

$\mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n)$ はバナッハ空間

$\|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha} + |Y_0| + |Y'_0|$

被制御パス (controlled path) 空間のキモチ

ラフパス空間の上にあるベクトル束みたいなもの

- $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$; 底空間. 無限次元多様体みたいなもの
- $\mathcal{Q}^\alpha_X(\mathbf{R}^n)$; 各 $X \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ 上に立っている「ファイバー」に相当するバナッハ空間

異なる $X \neq \hat{X}$ に対して、$\mathcal{Q}^\alpha_X(\mathbf{R}^n)$ と $\mathcal{Q}^\alpha_{\hat{X}}(\mathbf{R}^n)$ はよく似ているのだが、あくまで違うバナッハ空間である

したがって、違うバナッハ空間の元をうかつに演算してはいけない

(注) 今後ほとんど全ての操作が「X 上のファイバー」のなかで行われる (X を reference RP とも呼ぶ)

被制御パス空間の重要例

$X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$: a reference RP

(1) X^1 自身 $X^1_t := X^1_{0,t}$ とおく

$$\Longrightarrow \quad (X^1, \mathrm{Id}_d) \in \mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^d)$$

(2) 2α ヘルダーなパス $Y \in C^{2\alpha}([0,1], \mathrm{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad (Y, 0) \in \mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n)$$

(3) 性質のいいスカラー作用

$(Y, Y') \in \mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n), \quad h \in C^{2\alpha}([0,1], \mathrm{R}^1)$

$$\Longrightarrow \quad (h \cdot Y,\ h \cdot Y') \in \mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n)$$

(4) 代入　（重要！）

$(Y, Y') \in \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$,　$f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^l$　(C^2 級)

$\Longrightarrow$　$(f(Y), \{f(Y)\}') \in \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$,

where $\{f(Y)\}'_t := \nabla f(Y_t) \cdot Y'_t \in \mathcal{L}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^l)$

(注) 普通の微分積分に出てくる「合成関数の微分公式」と形式的には同じ

(5) 被制御パスの接続 $(Y, Y') \in \mathcal{Q}_X^\alpha([0, T_1], \mathrm{R}^n)$,

$(Z, Z') \in \mathcal{Q}_X^\alpha([T_1, T_2], \mathrm{R}^n)$, かつ $Y_{T_1} = Z_{T_1}$

$\Longrightarrow$　接続したパス

$(Y, Y') \bullet (Z, Z') \in \mathcal{Q}_X^\alpha([0, T_2], \mathrm{R}^n)$

$\mathcal{Q}_X^\alpha(\mathcal{L}(\mathrm{R}^d,\mathrm{R}^n))$ の元に対して，以下の修正リーマン和の極限として，積分がえられる

$$(Z_t - Z_s :=) \quad \int_s^t Y_u dX_u$$

$$= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_i \left\{ Y_{t_{i-1}} X^1_{t_{i-1},t_i} + Y'_{t_{i-1}} \cdot X^2_{t_{i-1},t_i} \right\}$$

実は相棒を $Z' = Y$ ととると

$$(Z, Z', R^Z) = \left(\int_0^\cdot Y dX,\, Y,\, R^Z\right) \in \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$$

Gubinelli 流の積分写像は $\mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^d) \to \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$

X の被制御パス空間から X の被制御パス空間への写像

(注)　すこし拡張して $\int_s^t Y_u dW_u$ も定義できる.

Lyons 流の積分との整合性

被積分関数 Y として特に $f(X) = f(X^1)$ の形のもの

をとると、上記の性質 (1)(4) により,

$\{f(X)\}_t' = \nabla f(X_t^1)\cdot(X^1)_t' = \nabla f(X_t^1)$ なので

$$\int_s^t f(X_u)dX_u$$

$$= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_i \left\{ f(X_{t_{i-1}}^1)X_{t_{i-1},t_i}^1 + \nabla f(X_{t_{i-1}}^1)X_{t_{i-1},t_i}^2 \right\}$$

となり、第１レベルに関しては完全に一致している

さて $\mathcal{L}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^n) = \mathrm{Mat}(n, d)$ 値の σ を係数行列とする RDE

$$\boldsymbol{Y_t = \int_0^t \sigma(Y_s) dX_s, \qquad Y_0 = a \in \mathrm{R}^n}$$

の解はこの枠組みでは、$\mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$ 内の不動点として解釈される．（解はラフパスではない）

(注)　X に関する連続性（=Lyons の連続性定理）ももちろん成立する．(第 1 レベル Y の場合であれば、大きなバナッハ空間 $C^\alpha([0,1], \mathrm{R}^n)$ のなかで差を評価すればよい)

豆知識（トリビア）

$X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$, $\quad (Y, Y') \in \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathcal{L}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^1))$.

超関数"$Y \cdot \partial_t X^1$"がなぜか well-defined.

実際 ϕ をテスト関数とすると, $\phi Y \in \mathcal{Q}_X^\alpha(\mathcal{L}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^1))$

なので

$$\phi \mapsto \int_0^1 \phi_t Y_t \cdot dX_t \quad \text{"} = \text{"} \quad \int_0^1 \phi_t Y_t \cdot (\partial_t X^1)_t dt$$

と見なせばよい

(注) Y, X^1 は α ヘルダー, $\partial_t X^1$ は $\alpha - 1$ ヘルダー

$\alpha + (\alpha - 1) = 2\alpha - 1 < 0$.

一般にベゾフ空間 $B^{\alpha}_{\infty,\infty}$ の元と $B^{\beta}_{\infty,\infty}$ の元とが「掛け算」できるためには $\alpha + \beta > 0$ だったはず.
(これが大体ヤング積分に相当するはず)

一般論の限界を超えた？
(なお $\alpha > 0$ なら, $B^{\alpha}_{\infty,\infty}$ は通常のヘルダー空間)

♠ ちなみに, 超関数 $\boldsymbol{Y} \cdot \partial_t \boldsymbol{X}^1$ の情報と、
不定積分 $\displaystyle\int_0^{\cdot} \boldsymbol{Y}_t \cdot d\boldsymbol{X}_t$ の情報とは同値.

被制御パス理論のまとめ

♣ reference RP $X \in G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d)$ を固定するごとに, 関数空間 $\mathcal{Q}^\alpha_X(\mathrm{R}^n)$ を設定する。

♣ ほとんどの操作 (線積分や ODE の解の存在など) は, X を固定したうえで, その関数空間内 (=X 上のファイバー内) で行う.

♣ ただし最後に X を動かした場合の連続性に関しては, 巨大な「入れ物」であるバナッハ空間のノルムに関して示す. (計算に出てくる全ての量が「近い」と仮定すれば, 計算結果も「近い」にきまっている、という感じ.)

正則性構造理論における一般化の（超大雑把な）予定

- a (reference) RP $X \longrightarrow$ a model
- controlled paths の空間 $\mathcal{Q}_X^\alpha(\mathrm{R}^n)$

  $\longrightarrow$ the space of modelled distributions
- RP 積分の超関数微分形 $Y \cdot \partial_t X^1$ を作る操作

  $\longrightarrow$ the reconstruction operator
- 関数の定義域は 1 次元 $\longrightarrow$ 多次元
- Brownian RP $W := \lim_{m\to\infty} W(m)$

  $\longrightarrow$ 往々にして対応物は存在 (収束) せず

  そこで renormalization という技を使う

9 Hairer's rough stochastic PDE theory

Martin Hairer による rough SPDE 理論
$\Longrightarrow$ 時間ではなく、空間変数にラフパス理論を使う
$\Longrightarrow$ 解概念が拡張されて、いくつかの ill-defined SPDE が解けた
$\Longrightarrow$ なんと KPZ 方程式まで解けた（周期的な場合）

以下では簡単な例を見てみよう

確率熱方程式 (最単純 SPDE).

$$\partial_t \psi = \triangle_x \psi + \xi, \qquad \psi(0,x) \equiv 0$$

ここで, $\psi : [0,T] \times S^1 \to \mathbf{R}^d$ であり, 通常通り $S^1 \cong \mathrm{R}/\mathrm{Z} \cong [0,1]$.
ξ は d-dim. $[0,T] \times S^1$ space-time white noise

ψ は２変数連続ガウス過程. 時間変数に関しては $1/4 - \epsilon$ ヘルダー連続. 空間変数に関しては $1/2 - \epsilon$ ヘルダー連続. $(\forall \epsilon > 0)$

時刻 t を固定すると $\psi(t,\cdot)$ はだいたいピンド BM 的な挙動をするので, これをラフパスにリフトできる.

$$\Psi_t^1(x,y) = \psi(t,y) - \psi(t,x),$$
$$\Psi_t^2(x,y) = \int_x^y \{\psi(t,z) - \psi(t,x)\} \otimes \circ d_z \psi(t,z)$$

$(0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le y \le 1)$.

Ψ は $C([0,T], G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d))$ 値 r.v.
$(1/3 < \forall \alpha < 1/2)$
この Ψ が主役で、reference RP の役割を果たす.

次の SPDE を例にあげて考えよう. $(u(t,x) \in \mathrm{R}^d)$

$$\partial_t u = \triangle_x u + g(u)\partial_x u + \xi \text{ with } u(0,x) = u_0(x)$$

ここで, $g : \mathrm{R}^d \to (\mathrm{R}^d)^{\otimes 2}$ は十分よい関数だとする. 通常の枠組みでは未解決だった (というより意味がついていなかった) らしい

基本方針　　解 u の挙動の悪さは, ψ の挙動の悪さとほぼ同じだと信じる. よって $u(t,x)$ は各 t を固定するごとに, ラフパス Ψ_t の被積分関数の空間に入っているとして, SPDE の解の定義を与える.

Ψ の実現をひとつ固定しよう．すなわち Ψ を $C([0,T],G\Omega_\alpha(\mathrm{R}^d))$ の任意の元とする.
u は連続で, t を固定するごとに Ψ_t の被積分関数の空間に入っているものを考える.

積分方程式としての見なし方 (重要！) (キーワード：熱半群、熱核、Duhamel の原理、マイルド解)
「Duhamel の原理」的な考察をすると、主要部である $\triangle_x$ が生成する半群作用との時間畳み込みで（形式的には）方程式が書けるはず
さらに $\triangle_x$ が生成する半群は熱核との空間畳み込みで書ける

よって、熱核 (=時間空間グリーン関数) との時間空間畳み込みで（形式的には）方程式が書けるはず

♠ マイルド解としての定義；

$$u(t,x) = (e^{t\triangle_x}u_0)(x) + \int_0^t ds \int_0^1 p_{t-s}(x-y)\xi(s,y)dy + \int_0^t ds \int_0^1 p_{t-s}(x-y)g(u(s,y))d_y u(s,y)$$

注：● 右辺第 3 項の積分は Ψ_s の被積分関数の空間で行われている　● 実は右辺第 2 項 $= \psi(t,x)$

● 通常どおり、マイルド解 $\Longleftrightarrow$ 弱解 (超関数解)

実際は $v := u - \psi - U$ と置き直して処理．新たな未知関数 $v_t = v(t, \cdot\,)$ のみたすべき方程式は，

$$\begin{aligned} v_t = & \int_0^t ds\, e^{(t-s)\triangle_x}\Big[g(v_s + \psi_s + U_s)\cdot\partial_x(v_s + U_s)\Big] \\ & + \int_0^t ds \int_0^1 p_{t-s}(\cdot - y) \\ & \times g(v(s,y) + \psi(s,y) + U(s,y))d_y\psi(s,y) \end{aligned}$$

$(U(t,x) = (e^{t\triangle_x}u_0)(x))$．$\Psi$ を固定するごとに，上の方程式を $C([0,T], C^1([0,1], \mathrm{R}^d))$ において，不動点定理に持ち込んで解く．またラフパス理論の常識どおり，$\Psi \mapsto u$ は (適当な位相に関して) 連続になる．

その後、Hairer はこの類いの論法を延長して、周期的な場合に KPZ 方程式を解いた. (Ann. of Math. '13)
空間を $S^1 \cong [0,1]$, 時間を $[0,T]$ として, 次の実数値の SPDE を考える. ($\lambda > 0$ は結合定数)

$$\partial_t h = \triangle_x h + \lambda(\partial_x h)^2 + \xi$$

ただし、$\mathrm{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = 4\pi\delta_{x-y}\cdot\delta_{t-s}$ と調節した WN

♣ 未解決 (or 未定義). (今までは"Cole-Hopf 解"という非厳密解で代用)

♣ Hairer は RP を使って, 空間が S^1 の場合に定式化し、Cole-Hopf 解との一致を示した. (1 次元値?)

形式的に Cole-Hopf 変換すると,

$$dZ = \triangle_x Z dt + \lambda Z dW \qquad (\partial_t W = \xi)$$

という (乗法的) 確率熱方程式になる (well-defined)
これの $\lambda^{-1}\log$ をとると, KPZ が形式的に得られるが,
実は定数 ”$-\infty$” が出て来て困る.
$\longrightarrow$ renormalization がラフパス理論に初登場

- しかし、あまりに複雑すぎて、まず理解不可能
- これを一般化して、きれいに整理してきたもの

が、”theory of regularity strucuture” である

- 高度に一般化されているため、もはやラフパス理論の

一部とは言えない

10　参考文献　　　(大きいものだけ)

♠ Lyons 流のラフパス理論

[1] は原論文．[2] はラフパス理論に関する最初の本．これが一世を風靡した時期もあったが，読みにくかったり，間違いがあったりするので，最近はあまり読まれなくなった．[3] はラフパス理論の決定論的な部分 (Lyons の連続性定理まで) を丁寧に証明している本．まさにその部分が [2] ではあやしかった．[4] は大著で，自由ベキ零群という観点の強調，ガウス・ラフパスに関する大量の情報，A. Davie によるラフパス版の Euler 近似のような RDE の解法などが特徴である．また３番目の結果と

して, RDE の後に (少しだけ) ラフパス積分が登場するという常識に反した構成になっているのも [4] の特徴である. [5] は完全な手前味噌. わずか 24 ページのなかで, ラフパス空間上の確率解析の現状を解説したので, 努力が嫌いな人にはおすすめである.

References

[1] Lyons, T.; Differential equations driven by rough signals. Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), no. 2, 215–310.

[2] Lyons, T.; Qian, Z.; System control and rough paths. Oxford University Press, 2002.

[3] Lyons, T.; Caruana, M.; Lévy, T.; Differential equations driven by rough paths. Lecture Notes in Math., 1908. Springer, 2007.

[4] Friz, P.; Victoir, N.; Multidimensional stochastic processes as rough paths. Cambridge University Press, 2010.

[5] 稲浜譲, ラフパス理論と確率解析, 「数学」に掲載予定. (2014+), 24 pages. 著者のウェブサイト

♠ Gubinelli 流のラフパス理論

[1] は原論文．いくつかの理由で読みにくい．このテーマに関しては本やサーベイがほとんど存在せず，おそらくは出版予定の [2] だけである．120 ページだった前バージョンには大量の誤植や小ミスがあったが，２倍に増量された現バージョンでは直っているだろうか？

References

[1] Gubinelli, M. Controlling rough paths. J. Funct. Anal. 216 (2004), no. 1, 86–140.

[2] Friz, P.; Hairer, M.; A course on rough paths.
約 250 pages. ハイラーのウェブサイト

♠ Hairer 流のラフ SPDE 理論

正則性構造の理論ができてしまった今となっては, むしろ真面目に勉強しないほうがいいと個人的には思っているが, 参考のために３点挙げておく. [1][2] が事始め. [3] において KPZ 方程式を周期的な場合に解決した.

References

[1] Hairer, M.; Rough stochastic PDEs. Comm. Pure Appl. Math. 64 (2011), no. 11, 1547–1585.

[2] Hairer, M.; Weber, H.; Rough Burgers-like equations with multiplicative noise. Probab. Theory Related Fields 155 (2013), no. 1-2, 71–126.

[3] Hairer, M.; Solving the KPZ equation. Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 2, 559–664.

♠ 正則性構造の理論

[1] は原論文. 長くて難解である. そこで本人の手による短いサーベイ [2][3] が便利かもしれない. なお Friz-Hairer の本の後半にも正則性構造の理論を解説した部分があるので, 必要ならば参照せよ.

References

[1] Hairer, M.; A theory of regularity structures. To appear in Invent. Math. 約 180 pages

[2] Hairer, M.; Introduction to Regularity Structures, arXiv:1401.3014

[3] Hairer, M.; Singular stochastic PDEs, to appear in Proceedings of the ICM 2014. arXiv:1403.6353