

無限粒子系の確率幾何と力学

–ランダム行列と無限次元干渉ブラウン運動–

長田 博文 (九州大学)*

2015年3月21日

この講演では、干渉ブラウン運動と呼ばれる無限次元確率微分方程式を解く一般論を解説する。典型例は対数関数を通じて干渉し合う無限粒子系の確率力学で、Sine (Dysonモデル)、Airy、Bessel、更に Ginibre 干渉ブラウン運動に適用できる。最初の3つは、ランダム行列に関する1次元空間の無限次元確率力学である。GOE、GUE、GSEといったガウス型アンサンブルの極限の点過程を定常分布として持つ。これらは逆温度 β が1, 2, 4の場合に対応している。また、Sine、Airy、Bessel 点過程および干渉ブラウン運動は、Bulk、Soft Edge、Hard Edgeの極限として幾何的および力学的に普遍的なものと考えられる。Ginibreは2次元空間の平行移動不変、回転不変な無限粒子系の確率力学およびその定常分布で、Ginibre 点過程は非対称ガウス型ランダム行列の固有値の分布のBulk極限である。

逆温度 $\beta = 2$ かつ1次元系で対数関数で干渉し合う場合、時空間相関関数で確率力学を表示するという代数的構成が知られている。今回の成果である確率解析的構成は、極めて広いクラスに適用できるものだが、この場合に話を限ると、それで作った無限次元確率力学は、代数的構成とこの確率解析的構成とで同一のものとなる。

代数的構成からは、干渉をもつ無限粒子系にもかかわらず、モーメントなど諸量の核関数による表示・計算が可能になり定量的な情報が分かる。確率解析的構成からは、無限次元確率微分方程式の解としての表示、各粒子の運動のセミマルチンゲール性や粒子の軌道の連続性および非衝突性、無限粒子系全体の強マルコフ性など定性的情報が得られる。

2次元の無限粒子系である Ginibre 干渉ブラウン運動は、 $\beta = 2$ であり、非エルミートガウス型ランダム行列に関係し、対数干渉ポテンシャルをもつ。しかし、代数的構成は知られていない。今回の結果が唯一の構成である。さらにその粒子の大局的構造は、対数ポテンシャルの影響の強さを反映し、通常のブラウン運動・Ruelleクラスポテンシャルのもとで運動する確率力学と全く異なることが分かる。実際、無限次元確率微分方程式の多重表現の存在や、各粒子の劣拡散的大局挙動を証明できる。これら性質を確率力学的剛性とよぶ。定常分布である Ginibre 点過程には、様々な幾何的剛性が知られているが、この結果は幾何的剛性が力学的剛性へと遺伝することを表している。

1. Introduction.

この講演では、4つの論文 [36, 37, 38, 39] の結果を基に干渉ブラウン運動と呼ばれる無限次元確率力学について解説する。2014年度の解析学賞を頂いたが、それはこれら

本研究は日本学術振興会 科研費 (KIBAN-A, No. 24244010)、科研費 (KIBAN-B, No. 21340031)、科研費 (KIBAN-A, No. 17204011) の助成を受けたものである。

キーワード: Random matrix theory, Interacting Brownian motions, Infinite-dimensional stochastic differential equations

* 〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 数理学研究院
e-mail: osada@math.kyushu-u.ac.jp

の論文の結果に対するものと理解している。この方向の研究は、その後更に進展しており、それについても後で触れる。

まず切っ掛けになった Spohn 氏の講演について説明する。

1986年 Herbert Spohn at Minnesota:

Minnesota 大学で1982年に設立された IMA (Institute Mathematics and Its Applications) では1985-1986にかけて、Stochastic Differential Equations and Their Applications というプログラムが行われた。そこで1986年3月17日の週に George Papanicolau 氏がオーガナイザーとして研究集会「HYDRODYNAMIC BEHAVIOR AND INTERACTING PARTICLE SYSTEMS」を開催した。説明したいのは、その時に聴講した Spohn 氏の講演の記憶である。

大きな会場の壇上でホワイトボードに文字を書き付け、Spohn 氏が早口で講演している。彼を直接みたのは2度目だった。前年の秋の Oberwolfach の研究集会で、前列の席に陣取り、矢継ぎ早にコメントを加えていたのが彼だった。そのころ彼は多量の論文を発表して名を上げる最中だったのではないかと思う。実は私は、博士課程で「Burgers や2次元 Navie-Stokes といった流体の方程式に対するカオスの伝播 (平均場近似)」の研究をしていた。この問題は Kac や McKean の60年代の研究に始まり、McKean は Burgers 方程式に対するカオスの伝播という問題を60年代後半に提起した。当時は、そのような「数学的な」統計物理的諸問題から、流体力学極限に代表される、より面白い「統計物理に動機づけられた確率論の諸問題」に世の中がシフトする最中で、それに対して、彼の貢献は大きいと思う。

壇上の彼の講演を、私はほとんど理解できなかった。唯一印象に残ったのは、彼がホワイトボードの隅に書いた

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.1)$$

という無限次元の確率微分方程式—**Dyson model in infinite dimensions**—である。

記憶に残った理由は、無限次元確率微分方程式(1.1)が大変美しい形をしていたことと、一体全体、干渉の効果が、無限遠方まで大きく残るようなこの方程式をどうして解くのだろうか、と思ったからである。

確率微分方程式(1.1)は、対数関数(2次元 Coulomb ポテンシャル)で相互作用する無限粒子系を記述している。私は当時、渦度の形の2次元 Navier-Stokes 方程式を研究していた。特に2次元の渦の N 粒子系は対数関数で skew に干渉し合うことと、Nash の議論を使っていたからエントロピーを介して対数関数に対して敏感になっていた。それも、(1.1)が印象に残った理由かもしれない。

後に刊行されたプロシーディング [56] を読むと、彼は N 粒子系の確率微分方程式

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N} X_t^{N,i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

の $N \rightarrow \infty$ の極限として、形式的に無限次元確率微分方程式(1.1)を導入していた。だから、この(1.1)そのものを解いたわけではない。確率力学としては、(1.2)に付随する

アンラベル力学 X^N :

$$X_t^N = \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^N, i} \quad (1.3)$$

をまず考える。(1.2)の定常分布(不変確率測度) μ^N は、

$$\frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j}^N |x_i - x_j|^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N |x_k|^2 \right\} d\mathbf{x}_N \quad (1.4)$$

となる。対応するアンラベル粒子の分布も同じ μ^N で表す。これは X の定常分布である。ランダム行列論(直交多項式論)の結果から、その極限 μ がアンラベル粒子の空間(配置空間)の確率測度(つまり点過程)として存在し Sine₂ 点過程と呼ばれる。

Spohn は、 μ から構成される自然な正双線形形式が可閉であることを示し、その閉包である Dirichlet 形式に対応する $L^2(\mu)$ -マルコフ半群でもって確率力学を構成した。これが、彼の(1.1)に対する確率力学の意味である。彼の可閉性の証明は、Free Fermion を通じて証明すると言うものだった。ランダム行列、相関関数の行列表現、Fermionic representation など、かれの論文は知らないことばかりで、難解で、だけど面白かった。この講演は90年代の Tracy-Widom 分布、2000年前後の行列式測度や Airy 過程、最近の KPZ 方程式と言った話が現れるずっと昔のことである。

粒子の配置は揺動が極めて小さくなるのが、Spohn の論文で示されている。従って、無限次元確率微分方程式の係数の無限和の部分も、条件付き収束として意味を持つ。それでも、当時(そして現在でも、今回の仕事までは)長距離相関の場合は、例え Ruelle クラスという良いポテンシャルの場合でも、無限次元確率微分方程式を解くことが出来なかった。いわんや対数関数では無理だと思われた。その頃、1次元系の特別な構造でうまく行く可能性があるかもしれない、とも考えたが、とても大変そうであった。結局、その時、無限次元確率微分方程式(1.1)を解きたいと思いつつ、踏ん切りがつかず考え始められなかった。そして、いつか(1.1)が解ける日がくるのだろうかとか Spohn の論文[56]を眺めながら自問した。

2. 典型例

一連の論文[36, 37, 38, 39]は、干渉ブラウン運動と呼ばれる無限次元確率微分方程式を解くための一般論を構築するものである。干渉ブラウン運動は、自由ポテンシャル $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ と干渉ポテンシャル $\Phi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ によって、通常

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \nabla \Phi(X_t^i) dt - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^{\infty} \nabla \Psi(X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.1)$$

という形の無限次元確率微分方程式で記述される。実際、以下で Airy 以外はこの形をしている。ここで β は正の定数で、逆温度と呼ばれる。これが大きいと、より低温の状態を表し、系の様相に干渉の効果がより強く表れる。解 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は定義から $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値確率過程となる。

目標としていたのは、ランダム行列論、対数干渉ポテンシャルに関する無限次元確率微分方程式である。この場合干渉ポテンシャル Ψ は

$$\Psi(x, y) = -\log |x - y| \quad (2.2)$$

となる。以下にその典型例を挙げる。下記で粒子の動く空間は S と表す。ただし Bessel 以外は、 $S = \mathbb{R}^d$ なので次元 d で識別する。Bessel の場合は、 $S = [0, \infty)$ である。

ランダム行列に関係する最初の4つの例では、干渉ポテンシャルは、(2.2) の対数ポテンシャルである。また、最後の二つは統計力学で標準的な、Ruelle クラスのポテンシャルの典型例である。いずれも強い長距離相互作用を持ち、確率力学として構成し解析することに関して、従来理論が適用できなかった。

無限次元確率微分方程式を考える場合、空間全体 $S^{\mathbb{N}}$ で方程式が意味を持つはずもなく、適切な部分集合を設定しないとイケない。一つの自然な方法は、確率微分方程式に自然に備わる定常分布 μ をまず考えることである。 μ は、 $S^{\mathbb{N}}$ の上の確率測度ではなく、 $S^{\mathbb{N}}$ をアンラベルした空間 \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{s} = \sum_i \delta_{s_i}; \mathbf{s}(S_r) < \infty \quad \text{for all } r \in \mathbb{N} \right\}$$

上の確率測度である。ここで、 $S_r = \{s \mid |s| \leq r\}$ 、また \mathbf{S} は S の点質量からなるラドン測度の空間の部分空間で漠位相を入れて Polish 空間と見なしている。 \mathbf{S} を S の上の配置空間という。 $\mathbf{s} = (s_i) \in S^{\mathbb{N}}$ をラベル粒子、 $\mathbf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \in \mathbf{S}$ をアンラベル粒子という。

また、 $\mathbf{u}(\mathbf{s}) = \sum_i \delta_{s_i}$ で定義される写像 $\mathbf{u}: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ をアンラベル写像、それを逆関数に持つ写像 $\mathbf{l}: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ をラベル写像という。 \mathbf{u} は一意だが、 \mathbf{l} は無数にある。

さて、話を戻して、無限次元確率微分方程式を考える上で、その解の空間(初期条件の空間)の選択は重要な問題で有る。そこで、各方程式に対して適切に選ばれた配置空間の確率測度 μ のサポート \mathbf{S}_μ の逆像 $\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{S}_\mu)$ の部分集合を解の空間として選択する。従って、以下の確率微分方程式の例において点過程 μ も明記する。後で示すように、各確率微分方程式に対して適切に μ を選ぶとは、確率微分方程式から決まる「 μ についての微分方程式」を解くことである。そういう意味でも、今回の理論は幾何的である。

概念を幾つか思い出しておく。 $(S, \mathcal{B}(S))$ の確率測度 μ を (S の上の) 点過程とよぶ。 S の点過程 μ に対して、対称な関数 $\rho^n: S^n \rightarrow [0, \infty)$ は次の条件を満たすときラドン測度 m に対する μ の n -点相関関数と呼ばれる:

$$\int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1, \dots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_n) = \int_{\mathbf{S}} \prod_{i=1}^m \frac{s(A_i)!}{(s(A_i) - k_i)!} d\mu \quad (2.3)$$

但し、 $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(S)$ 、 $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ 、 $k_1 + \dots + k_m = n$ 。 $s(A_i) - k_i < 0$ の時は、 $s(A_i)! / (s(A_i) - k_i)! = 0$ と解釈する。点過程 μ が核関数 $K: S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ とラドン測度 m に付随する行列式測度(行列式点過程)とは、 μ の m に対する相関関数が

$$\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

で与えられることである。 K が Hermite 対称かつスペクトルが $[0, 1]$ の範囲にあれば、 (K, m) 点過程が一意に存在することが知られている。この abstract では、以下、すべて m が Lebesgue 測度の場合のみ扱う。干渉ブラウン運動の典型例を述べる。

2.1. Sine $_\beta$ 干渉ブラウン運動: 無限次元 Dyson model

Let $d = 1$, $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$, and $\beta = 1, 2, 4$. We set

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.4)$$

全体としてアンラベル粒子の定常分布は平行移動不変性を持ち、係数の和は、絶対収束はしない。この無限次元確率微分方程式は $\beta = 2$ の時、特に **Dyson model in infinite dimensions** と呼ばれる。これが前述の (1.1) と対応している。

アンラベル粒子の定常分布は、Sine₂ 点過程と呼ばれるもので、行列式点過程の一つで有り、Lebesgue 測度に対する n 点相関関数は

$$\rho_{\text{sin},2}^n(x) = \det[K_{\text{sin},2}(x_i - x_j)]_{i,j=1}^n$$

で与えられる。ここで $K_{\text{sin},2}$ は sine 核で、次で定義される連続関数である。

$$K_{\text{sin},2}(x - y) = \frac{\sin \pi(x - y)}{x - y} \quad (2.5)$$

$\beta = 1, 4$ の場合は、類似の公式が 4 元数を用いて与えられる。他のランダム行列の関わる 1 次元系も同様である。

2.2. Airy _{β} 干渉ブラウン運動:

Let $d = 1$, $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$, and $\beta = 1, 2, 4$.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \int_{|x| < r} \frac{\hat{\varrho}(x)}{-x} dx \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.6)$$

ここで関数 $\hat{\varrho}$ は

$$\hat{\varrho}(x) = \frac{1_{(-\infty, 0)}(x)}{\pi} \sqrt{-x}. \quad (2.7)$$

アンラベル力学の定常分布 $\mu_{\text{Ai},2}$ は、行列式点過程であり、その n 点相関関数は $\rho_{\text{Ai},2}^n$ は

$$\rho_{\text{Ai},2}^n(\mathbf{x}_n) = \det[K_{\text{Ai},2}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (2.8)$$

核関数は 次式で与えられる連続関数である。

$$K_{\text{Ai},2}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y} \quad (x \neq y), \quad (2.9)$$

ただし $\text{Ai}'(x) = d\text{Ai}(x)/dx$ また $\text{Ai}(\cdot)$ は Airy 関数で次で定義される。

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk e^{i(zk + k^3/3)}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

2.3. Bessel _{α, β} 干渉ブラウン運動:

Let $d = 1$ and $S = [0, \infty)$. Let $1 \leq \alpha < \infty$. 無限次元確率微分方程式は

$$dX_t^i = dB_t^i + \left\{ \frac{\alpha}{2X_t^i} + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.11)$$

定常分布 $\mu_{\text{Be},\alpha,\beta}$ は行列式過程であり、Bessel _{α, β} 点過程と呼ばれる。ただし、 $\beta = 1, 2, 4$, $[0, \infty)$ の Lebesgue 測度に対する n -点相関関数 $\rho_{\text{Be},\alpha,2}^n$ は、

$$\rho_{\text{Be},\alpha,2}^n(\mathbf{x}^n) = \det[\mathbf{K}_{\text{Be},\alpha,2}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \quad (2.12)$$

で与えられる。 $\beta = 2$ の時、核関数 $\mathbf{K}_{\text{Be},\alpha,2}$ は連続関数であって、

$$\mathbf{K}_{\text{Be},\alpha,2}(x, y) = \frac{J_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\alpha(\sqrt{y}) - \sqrt{x}J'_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J_\alpha(\sqrt{y})}{2(x - y)} \quad (x \neq y) \quad (2.13)$$

である。

2.4. Ginibre 干渉ブラウン運動:

Let $d = 2$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$, and $\beta = 2$. 無限次元確率微分方程式は

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.14)$$

と

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.15)$$

である。定常分布は Ginibre 点過程 μ_{gin} と呼ばれる行列式過程で有り、その核関数は \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} と同一視して、複素関数で表すと

$$K_{\text{gin}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}|x|^2 + x\bar{y} - \frac{1}{2}|y|^2\right\} \quad (2.16)$$

となる。

明らかに、これら二つは異なる方程式だが、Ginibre 点過程のサポートの上では、共に強解を持ちパスワイズに一意的である。更にこれらの強解は同じ解になる。相異なる無限次元確率微分方程式が同じ一意的強解を持つのである。これは、対数干渉ポテンシャルに付随する干渉ブラウン運動の力学的剛性の最初の例である。

以上の例は、すべてランダム行列に関係した。次に、Ruelle クラスポテンシャルに付随する Gibbs 測度の例を挙げる。実は、この研究の一般論は、本質的にすべての Gibbs 測度に適用できる。以下は、その具体例である。次の二つの例では、定常分布は、Gibbs 測度となる。尚、Gibbs 測度の定義は (5.5) で与える。

2.5. Lennard-Jones 6-12 potential:

Let $d = 3$, $\beta > 0$, and $\Psi_{6,12}(x) = \{|x|^{-12} - |x|^{-6}\}$. 干渉ポテンシャル $\Psi_{6,12}$ は Lennard-Jones 6-12 ポテンシャルと呼ばれる。対応する無限次元確率微分方程式は

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \left\{ \frac{12(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^{14}} - \frac{6(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^8} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.17)$$

2.6. Riesz potentials of Ruelle's class:

Let $d < a \in \mathbb{N}$, $0 < \beta$, and set $\Psi_a(x) = (\beta/a)|x|^{-a}$. 対応する無限次元確率微分方程式は

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^{a+2}} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.18)$$

一見するとこの無限次元確率微分方程式 (2.18) は (2.4) や (2.14) と似ている。実際 (2.18) は (2.4) と (2.14) で $a = 0$ の場合に対応している。しかし確率微分方程式のドリフト項は (2.4) や (2.14) と異なって絶対収束する。

一般に Ruelle クラスのポテンシャルを持つ干渉ブラウン運動は、拡散的スケールリングで独立なブラウン運動と同じ大局的挙動をする [41, 32, 33, 34]。正確には、1次元で互いに順序交換を許す場合か、2次元以上の空間の場合である。干渉ポテンシャルが凸のハードコアを持つ場合に、粒子の密度によらず常に拡散的スケールリングで非退化なブラウン運動に収束することが証明されている [34]。尚、ここでは平衡分布は平行移動不変なものを考えている。

3. ランダム行列と干渉ブラウン運動

この章ではランダム行列と干渉ブラウン運動の関係を説明する。

N 次のガウス型ランダム行列 $M^N = [m_{ij}]_{i,j=1}^N$ とは、正方行列であって、その成分が対称性-実対称、Hermit 対称、quaternion 対称 (分布の直交、ユニタリ、シンプレクティック不変性)- からくる制約を除いて独立定常な確率変数である。これらのランダム行列は G(O/U/S)E と呼ばれる。今、 \mathbb{F} を実数体/複素数体/4元数体の何れかとする。これらは G(O/U/S)E に対応している。 M^N は \mathbb{F} 対称、かつその成分が、平均ゼロの \mathbb{F} 値ガウス確率変数、更に、分散は $i < j$ で 1 であるものである。対角線 $i = j$ では分散 1 の実ガウス変数とする。この時、 N 次のランダム行列 M^N の固有値の分布は

$$m_\beta^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N |x_k|^2 \right\} d\mathbf{x}_N, \quad (3.1)$$

但し、 $\mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$ 、 $d\mathbf{x}_N = dx_1 \cdots dx_N$ 。ここで GOE, GUE, GSE は $\beta = 1, 2, 4$ にそれぞれ対応している。この (3.1) はすべての $0 < \beta < \infty$ に対して意味を持つ。対数ガスの典型例である [8]。

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間を \mathcal{P} とおく。 $m_\beta^N(d\mathbf{x}_N)$ の下で \mathcal{P} 値確率変数

$$\mathbb{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i/\sqrt{N}} \quad (3.2)$$

を考え、 μ_β^N をその分布とする。定義から μ_β^N は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間 \mathcal{P} の上の確率測度である。 \mathcal{P} の元 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を

$$\sigma_{\text{semi}}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{(-2,2)}(x) \quad (3.3)$$

で定義する。 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ は形から半円分布と呼ばれる。有名な Wigner の半円法則とは、 $\{\mu_\beta^N\}$ がノンランダムな $\delta_{\sigma_{\text{semi}}(x)dx}$ に弱収束することを主張する:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_\beta^N = \delta_{\sigma_{\text{semi}}(x)dx} \quad \text{weakly.} \quad (3.4)$$

極限がノンランダムという意味で、この定理はランダム行列論の大数の法則と見なせる。では、中心極限定理の対応物はどうなるのだろうか?

半円分布 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を考察した \mathbb{R} の各点をマクロな位置とよぶ。各マクロな位置 $\theta \in \mathbb{R}$ において意味のある極限があるように、適切に (3.3) をリスケールする。これは $|\theta| < 2$ と $\theta = \pm 2$ の場合に可能で前者を Bulk、後者を Soft Edge の位置と呼ぶことにする。

3.1. Bulk 極限と普遍性

Bulk の位置 $\{|\theta| < 2\}$ のスケールリングを Bulk 極限という。このとき

$$x_i \mapsto \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}} \quad (3.5)$$

とスケーリングする。すると $m_\beta^N(ds_N)$ の分布は

$$\tilde{m}_\beta^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| \frac{s_k + \theta N}{\sqrt{N}} \right|^2 \right\} ds_N \quad (3.6)$$

対応する配置空間 \mathbf{S} の分布を $\mu_{\beta,\theta}^N$ と表すと、極限は Sine $_{\beta,\theta}$ 点過程 $\mu_{\beta,\theta}$ になる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{\beta,\theta}^N = \mu_{\beta,\theta} \quad \text{weakly.} \quad (3.7)$$

ただし $\mu_{\beta,\theta}$ は Lebesgue 測度に対する相関関数が、核関数

$$K_\theta(x, y) = \frac{\sin\{\sqrt{4 - \theta^2}(x - y)\}}{\pi(x - y)} \quad (3.8)$$

で与えられる行列式点過程である。ここで $\theta = 0$ の場合が、(2.5) で現れた。一般の場合は、その密度を定数倍したものである。行き先が、常に Sine 点過程 (密度のパラメーターがマクロな位置に依存するが) となるという意味で、bulk 極限は普遍性を持つ。次にこの普遍性の確率力学版を考える。

(3.6) から対応する N 粒子系の確率微分方程式は次で与えられる。この確率微分方程式の形は部分積分をして生成作用素を計算することで簡単に得ることができる。 β は一般とする。 $i = 1, \dots, N$ に対して、 $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の方程式は

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2N} X_t^{N,i} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt \quad (3.9)$$

この確率微分方程式で N を形式的に飛ばした極限は

$$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j}} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt \quad (3.10)$$

この方程式は $\theta = 0$ 以外では正しい極限を与えない。実際、極限の無限次元確率微分方程式は— いつでも —

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r, j \neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.4)$$

となる。実際、河本氏と共に以下の現象—SDE gap—を最近証明した。

Theorem 3.1 (河本-O. [25]). $\beta = 2$ とする。アンラベル粒子の初期分布を $\mu_{\beta,\theta}^N$ で与え、初期のラベルを適切に設定すると、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の最初の m 個は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (X^{N,i})_{i=1}^m = (X^i)_{i=1}^m \quad \text{weakly in } C([0, \infty); \mathbb{R}^m). \quad (3.11)$$

ここで右辺は(2.4)の解である。

上で「SDE gap」と述べたのは、確率微分方程式 (SDE) の形が有限粒子系と極限の無限次元確率微分方程式とで異なる (gap ができる) からである。行き先が θ に依存せず常に同じ無限次元確率微分方程式になるという意味で、この現象は上述の (幾何的) 普遍性に対応する力学的普遍性になっている。確率微分方程式が θ を全く含まなくなるので、むしろそれ以上の普遍性かもしれない。なお、 θ は初期条件の中だけに含まれている。この無限次元確率力学は極めて非エルゴード的であり、自らが発した層 (無限次元の部分多様体) にずっととどまる。しかしそれを記述する確率微分方程式は同一になるわけである。

この結果は一般の β アンサンブルでも成り立つと思われる。なお、河本氏との仕事では、 N 粒子系の確率微分方程式から無限粒子系の確率微分方程式への遷移・収束に関する一般論を構築し、その系としてこの結果をえている。それを応用するとき、Ruelle クラスであれば、計算なしに自明に適用できる。しかし、上の定理に应用する場合は、精密な計算が必要になる。なお、 $\theta = 0$ の場合は、後で述べる代数的方法でもこの収束を証明できる [47, 48]。つまり、1次元系で $\beta = 2$ かつ対数干渉ポテンシャルの場合は、2種類の相異なる証明が存在する。

3.2. Soft Edge 極限と Airy 過程

半円分布の両端の点 $\theta = \pm 2$ でのスケーリングを Soft Edge 極限という。この時、

$$x \mapsto 2\sqrt{N} + \frac{s}{N^{1/6}} \quad (3.12)$$

という対応を考える。すると N 粒子系の分布 $m_{\text{Ai},\beta}^N(ds)$ は、

$$m_{\text{Ai},\beta}^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| 2\sqrt{N} + \frac{s_k}{N^{1/6}} \right|^2 \right\} ds_N. \quad (3.13)$$

これから対応する N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,N})$ が満たす確率微分方程式は次で与えられることが分かる。

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2} \left\{ N^{1/3} + \frac{1}{2N^{1/3}} X_t^{N,i} \right\} dt. \quad (3.14)$$

ここで $N \rightarrow \infty$ の極限をとる難しさは、(3.14) の係数が

$$-\frac{\beta}{2} N^{1/3} dt$$

という発散項を含むからである。種村氏との一連の共同研究 [44, 45, 46, 47, 48] で無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \int_{|x| < r} \frac{\hat{\rho}(x)}{-x} dx \right\} dt \quad (3.15)$$

がパスワイズに一意的な強解を持つことを示し、更に [25] と [48] で (3.14) の解が (3.15) の解に収束することを示した。

以下、(3.15)の無限次元確率微分方程式が導出される理由を説明する。Soft Edge 極限の逆変換を考え、極限の半円分布を変換する：

$$\hat{\varrho}^N(x) = N^{1/3} \sigma_{\text{semi}}(xN^{-2/3} + 2). \quad (3.16)$$

この(3.16)の $\hat{\varrho}^N$ を、 N 粒子系の点 x で条件つけた Palm 測度の1-相関関数 $\rho_{\text{Ai}, \beta, x}^{N,1}$ の第一近似と考える。すると、

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\varrho}^N(x) dx = N. \quad (3.17)$$

簡単な計算から

$$\hat{\varrho}^N(x) = \frac{1_{(-4N^{2/3}, 0)}(x)}{\pi} \sqrt{-x \left(1 + \frac{x}{4N^{2/3}}\right)}, \quad (3.18)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\varrho}^N(x) = \hat{\varrho}(x) \quad \text{compact uniformly.} \quad (3.19)$$

鍵になるのは、次の等式である。

$$N^{1/3} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varrho}^N(x)}{-x} dx. \quad (3.20)$$

方程式(3.18)と(3.19)は、無限次元確率微分方程式(3.15).において $\hat{\varrho}(x)$ が現れる原因である。実際 $N \rightarrow \infty$ の時

$$\begin{aligned} dX_t^i &\sim dB_t^i + \frac{\beta}{2} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - N^{1/3} \right\} dt \\ &\sim dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \int_{|x| < r} \frac{\hat{\varrho}^N(x)}{-x} dx \right\} dt \quad \text{by (3.20)} \\ &\sim dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \int_{|x| < r} \frac{\hat{\varrho}(x)}{-x} dx \right\} dt \quad \text{by (3.19).} \end{aligned}$$

このように無限次元確率微分方程式(3.15)が得られる。この手続きは、Soft Edge 極限全体で共通していると思われる。尚、極限の方程式の解が非衝突を満たすこともわかる。つまり、 $\mathbf{X} = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は次を満たす。

$$P(X_t^i \neq X_t^j \text{ for all } 0 \leq t < \infty, i \neq j) = 1. \quad (3.21)$$

そこで粒子のラベルを $X_t^i > X_t^j$ for all $i < j \in \mathbb{N}$. と選択すると、確率力学は $(X_t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a $\mathbb{R}_{>}^{\mathbb{N}}$ -値過程となる。但し、 $\mathbb{R}_{>}^{\mathbb{N}} = \{(x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; x_i > x_j (i < j)\}$.

代数的に構成された $\beta = 2$ の場合この対象は、Johannson、Spohn、Ferrariその他によって研究された。特に右端の粒子 X^1 は Airy 過程と呼ばれ様々な性質が研究されている。この対象は確率解析的構成による対象と一致する [44, 45, 46, 47, 48, 25]。

4. 代数的構成:時空間相関関数の方法

干渉ポテンシャルが対数関数の時、1次元系に於いて逆温度 $\beta = 2$ ならば、時空間相関関数を拡張核関数の行列式で具体的に与えることで確率力学を構成できる。1章で述べた1次元の無限粒子系の代表例、Sine、Airy、Bessel点過程の場合に、この拡張核関数を明示する。

S値過程 X_t の多重時間モーメント生成関数を以下で定義する。

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] \equiv \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\mathbb{R}} f_m dX_{t_m} \right\} \right], \quad (4.1)$$

いま $\mathbb{K}(s, x; t, y)$ を拡張核関数とする。以上の例に於いては以下で定義する \mathbb{K} の Fredholm 行列式を用いて $\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}]$ を表示できる。

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] = \underset{\substack{(s,t) \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}^2, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2}}{\text{Det}} \left[\delta_{st} \delta(x-y) + \mathbb{K}(s, x; t, y) \chi_t(y) \right], \quad (4.2)$$

ここで $M \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M) \in C_0(\mathbb{R})^M$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$ ($0 < t_1 < \dots < t_M < \infty$) である。また、 $\chi_{t_m} = e^{f_m} - 1$, $1 \leq m \leq M$ 。 \mathbb{K} は時空間相関関数と呼ばれる [20, 23].

(i) *Extended sine kernel* $\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s < t, \\ K_{\text{sin}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s > t. \end{cases} \quad (4.3)$$

(ii) *Extended Airy kernel* $\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y) \equiv \begin{cases} \int_0^\infty du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s < t, \\ K_{\text{Ai}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\int_{-\infty}^0 du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s > t. \end{cases} \quad (4.4)$$

(iii) *Extended Bessel kernel* $\mathbb{K}_{J_\nu}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{K}_{J_\nu}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^1 du e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if } s < t, \\ K_{J_\nu}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\int_1^\infty du e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if } s > t. \end{cases} \quad (4.5)$$

これらの関数を使ってS値確率力学が定義できることが知られている。実は有限粒子系で対応する表示が有り、これらの無限次元アンラベル確率力学はその極限である。しかし有限系はマルコフ性を持つ（拡散過程になる）が、その性質が無限系まで遺伝するかどうかは非自明である。なぜなら状態空間の基礎の測度が粒子が異なれば互い

に特異だからである。マルコフ性については[23]、強マルコフ性については[47]で示された。これらの結果と、最近の[44, 45, 46, 47, 48]の結果を合わせると、時空間相関関数で構成した確率力学と、[44]で確率解析的に構成したものが一致することが分かる。

もともと Airy に関する無限次元確率力学は、Prähofer-Spohn, や Johansson によって有限系の時空間相関関数の極限を考えることにより構成されていた[49, 19]。しかし、最初は極限の粒子の軌跡が連続であることを示すことさえ非自明であった。特に、粒子同士がぶつからないことを示すのはこの方法では難しい。極限の確率力学の各粒子の軌跡が semimartingale を示すことが[19]で未解決問題として提起され、Hägg [14] や Corwin-Hammond [5]によって示されたが、それはこれらが確率微分方程式の解 (Airy 干渉ブラウン運動) となることを示した結果からは、自明に従う。

香取-種村両氏は一連の研究で Dyson や Airy といった無限粒子系の確率力学を代数的手法によって研究してきた。上述の拡張核は、いわば無限次元の「遷移確率密度」の類似だが、これをもちいて、特別な出発点から動き出す無限粒子系の確率密度を明快に表現した[22]。そういう意味で確率論の可解モデルの風を持っている[20, 21, 22, 23, 24]。

5. 1977年 Richard Lang: 干渉ブラウン運動の一般論の始まり

干渉ポテンシャル $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で相互作用しながら運動する \mathbb{R}^d のブラウン粒子は次の確率微分方程式で記述される。この方程式は(2.1)で $\Phi = 0$ の場合である。

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \nabla \Psi(X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (5.1)$$

ここで $\beta \geq 0$ は、逆温度と呼ばれる定数、また、 $\{B^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は無限個の独立な d 次元標準ブラウン運動である。この確率力学 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ である。

直感的には、(5.1)の解の不変測度 $\check{\mu}$ は、

$$\check{\mu}(d\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i \neq j, i, j=1}^{\infty} \Psi(x_i - x_j)} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \quad (5.2)$$

となるが、

$$d\mathbf{x}^{\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \quad (5.3)$$

つまり、Lebesgue 測度の無限直積 $d\mathbf{x}^{\infty}$ を含み、そのままでは正当化できない。これを解決する伝統的な手法は DLR 方程式に基づく Gibbs 測度を導入することである。

粒子を区別しない配置空間 \mathbf{S} を考える。一般に \mathbf{S} の確率測度の正則条件付き確率 $\mu_{r, \xi}^n$:

$$\mu_{r, \xi}^n(d\mathbf{x}) = \mu(\pi_{S_r}(\cdot) \in \cdot | \pi_{S_r^c}(\mathbf{x}) = \pi_{S_r^c}(\xi), \mathbf{x}(S_r) = n) \quad (5.4)$$

ここで、 $\pi_A(\mathbf{s}) = \mathbf{s}(\cdot \cap A)$ 、 $S_r = \{s \in \mathbf{S}; |s| < r\}$ 、 $\xi \in \mathbf{S}$ 。つまり S_r の外で ξ 、内部にちょうど n 個の粒子が存在するという条件付き確率である。今は \mathbf{S} の確率測度と見なしているが、しばしば S^n の対称な確率と同一視する。

Λ を Lebesgue 測度を強度とする Poisson 点過程 (後述) とし、 $\Lambda_r^n = \Lambda(\cdot \cap S_r^n)$ とおく。但し、 $\mathbf{S}_r^n = \{s \in \mathbf{S}; \mathbf{s}(S_r) = n\}$ 。 μ が (Φ, Ψ) -カノニカル Gibbs 測度とは、次の関係式 (DLR 方程式) を満たすことである。各 $n, r \in \mathbb{N}$ と $\xi \in \mathbf{S}$ に対して、

$$\mu_{r, \xi}^n(d\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}_{r, \xi}} \Lambda_r^n(d\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

ここで $\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \mathcal{I}_{r,\xi}$ とする。ただし

$$\mathcal{H}_r(\mathbf{s}) = \beta \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi(s_i) + \sum_{i < j, s_i, s_j \in S_r} \Psi(s_i, s_j) \right\}, \quad \mathcal{I}_{r,\xi} = \beta \sum_{s_i \in S_r, \xi_k \in S_r^c} \Psi(s_i, \xi_k) \quad (5.6)$$

\mathcal{H}_r が S_r 内のハミルトニアン、 $\mathcal{I}_{r,\xi}$ は内部と外部の干渉項である。このように (5.2) の代わりに、DLR を介して (Φ, Ψ) -カノニカル Gibbs 測度を考える。

Lippner や Rost による 1 次元の特別な例を除き、確率微分方程式 (5.1) は、Lang [26, 27] によって始めて一般的に解かれた。通常、確率微分方程式を解くためには、Ito scheme を用いる。つまり常微分方程式の場合と類似の Picard 近似による方法をとる。従って、少なくとも局所的な、係数の Lipschitz 連続性が必要となる。この方法を無限次元で実行する難しさは、無限次元では、係数が Lipschitz 連続は全く期待できないし、局所化も非常に複雑になる点である。実際、係数が定義されているのも空間のごく一部である。

Lang は係数が、

$$\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d) \quad (5.7)$$

の場合に、Gibbs 測度の評価と組み合わせることにより、実行した。したがって、たとえ Ruelle クラスという扱いやすい範疇でも多項式減衰の Ψ の場合は、Lang の方針—伝統的な伊藤の方法を用いること—で証明するのはとても無理だった。

Dyson model (1.1) の場合、干渉ポテンシャルは対数ポテンシャルである：

$$\Psi(x, y) = -\log |x - y| \quad (5.8)$$

減衰どころか、無限遠点で無限大に発散する対数ポテンシャルになるわけで、通常なら DLR 方程式が意味を持ち、局所密度の一樣評価など様々な手段が使えるが、それらが不可能になる。これが、当時私が無限次元確率微分方程式 (1.1) をとても解けないと考えた理由である。逆にこのような遠方で強く相互作用を生むポテンシャルの元で運動する粒子の様相は、通常の Ruelle クラスのそれと鮮やかに異なるはずである。それを追求することは興味深い問題だと思われた。

一般に、無限次元確率微分方程式が無限個の異なる係数 b_i によって

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dB_t^1 + b_1(\mathbf{X}_t) dt \\ dX_t^2 &= dB_t^2 + b_2(\mathbf{X}_t) dt \\ dX_t^3 &= dB_t^3 + b_3(\mathbf{X}_t) dt \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

と言う形で与えられる。もし、 b_i が $i \rightarrow \infty$ で十分に早く 0 に収束すれば、(収束の早さ次第で) 通常の SDE と同様に解くことが出来る。今の場合、問題は b_i が「対称性」を持ち、従って、 $i \rightarrow \infty$ で減衰しない点である。つまり、無限次元確率微分方程式自体が、1 つの関数 $b: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ によって、次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dB_t^1 + b(X_t^1, X_t^{1\diamond}) dt \\ dX_t^2 &= dB_t^2 + b(X_t^2, X_t^{2\diamond}) dt \\ dX_t^3 &= dB_t^3 + b(X_t^3, X_t^{3\diamond}) dt \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで $X^{i\diamond} = \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j}$ である。繰り返すが、ここで関数 $b(x, \mathbf{s})$ が粒子の番号 i に依存しないことに注意する。

対称性は従来の感覚の手法を使う障害となった。しかし、逆にそのことにより、系全体を配置空間に値をとる対象と見なすことが出来て、その確率力学

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i} \quad (5.11)$$

は不変確率測度を持ちうる。そしてより幾何的な確率解析的手法、Dirichlet 形式論が有効になる。

6. Dirichlet form approach : Brownian 運動の場合

Dirichlet form approach とは、正双線形形式を考え Markov 過程 (拡散過程) を構成し解析する手法である。有限次元のブラウン運動 $B = (B^1, \dots, B^d)$ の場合、Dirichlet 空間は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{dx}(f, g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{D}[f, g] dx \\ L^2(\mathbb{R}^d, dx) \end{aligned} \quad (6.1)$$

で与えられる。ここで \mathbb{D} は \mathbb{R}^d の標準的な 2 次場

$$\mathbb{D}[f, g] = \frac{1}{2} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d} \quad (6.2)$$

である。標準的と言ったのは、それが Lebesgue 測度と共にブラウン運動を定義するからで、 \mathbb{D} の形の自然さは異論の無いところではないかと思う。重要なことは \mathbb{D} を介して、

$$dx \iff (\mathcal{E}^{dx}, L^2(\mathbb{R}^d, dx)) \iff B = \{B_t\} \quad (6.3)$$

という対応関係があることである。 dx を一般の Radon 測度 μ に置き換えても (緩やかな仮定の下で) この関係は成立する。

$$\mu \iff (\mathcal{E}^\mu, L^2(\mathbb{R}^d, \mu)) \iff X = \{X_t\} \quad (6.4)$$

ここで最右辺は μ 可逆な拡散過程である。この対応関係が成り立つ十分条件として、 μ が Lebesgue 測度に対する上半連続な密度関数をもつことが挙げられる。この場合、対応する拡散過程 (もしくは Dirichlet 形式) は distorted Brownian motion とよばれる。尚、一般に Dirichlet 形式においてどの領域を選択したかを記述する必用があり、というよりは領域の選択次第で、粒子の挙動が著しく変化するので、重要な問題だが、ここではあえて書いていない。ブラウン運動の場合は、 $H^1(\mathbb{R}^d)$ である。また、Lebesgue 測度に対して密度をもたない μ に対しても、うまく領域を選ぶことで、良い性質を持つ拡散過程を構成することが出来る。この手法でフラクタル上に拡散過程を構成している。

今、(6.4) を念頭に \mathbb{D} から構成される Radon 測度から「正双線形形式」の空間、さらにそこから「拡散過程の空間」への写像 $F_{\mathbb{D}} = F_{\mathbb{D}}(\mu)$

$$\mu \mapsto (\mathcal{E}^\mu, L^2(\mathbb{R}^d, \mu)) \mapsto X = \{X_t\} \quad (6.5)$$

を考える。この写像が本当に何処まで意味を持つのが問題で、拡散過程の空間までたどり着くための十分条件を探したい。

重要なことは、この方針は \mathbb{R}^d にとどまらず、良い2次場 \mathbb{D} が存在する空間で有効なことである。「では、よい2次場 \mathbb{D} とは何か」が問題だが、それは最も良い拡散過程(ブラウン運動)を最も良い測度(Lebesgue 測度)で(6.3)の対応で表現できる2次場ということに成る。つまり、「ブラウン運動」と「Lebesgue 測度」の二つがあれば \mathbb{D} は構成できる。(6.3)の関係式から、「ブラウン運動」と「Lebesgue 測度」と「 \mathbb{D} 」のうちどれか二つがあれば他の一つは自然に構成できることが期待できる。

6.1. 無限次元ブラウン運動の列：2次場 \mathbb{D} とブラウン運動だけの世界

無限次元確率微分方程式を解く空間は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ である。無限次元確率微分方程式には、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ -ブラウン運動 $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ が現れる。幸い $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ では、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ -ブラウン運動 $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ と2次場 \mathbb{D}^{∞} で標準的なものが存在する。

実際、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ -ブラウン運動 $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ の構成は簡単で、単に d 次元標準ブラウン運動 B の加算無限個の独立なコピーを準備するだけである。その生成作用素 \mathbb{L}^{∞} は

$$\mathbb{L}^{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \quad (6.6)$$

となる。ここで各 Δ_i は \mathbb{R}^d のラプラシアンである。 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の2次場 \mathbb{D}^{∞} は

$$\mathbb{D}^{\infty}[f, g] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla_i f, \nabla_i g)_{\mathbb{R}^d} \quad (6.7)$$

となる。従って Dirichlet 形式は前述の対応から Dirichlet 形式を考えると、

$$\mathcal{E}^{d\mathbf{x}^{\infty}}(f, g) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{\infty}} \mathbb{D}^{\infty}[f, g] d\mathbf{x}^{\infty}, \quad L^2((\mathbb{R}^d)^{\infty}, d\mathbf{x}^{\infty}) \quad (6.8)$$

となるが、これは正当化できない。なぜなら、Lebesgue 測度の無限直積 $d\mathbf{x}^{\infty}$ を含むからである。そのため、(6.5)の対応の第一段階から壊れてしまう。

「ブラウン運動があるのに Dirichlet 形式がない」というのは困った状況である。そのため測度のない空間の Dirichlet 形式を考える必要がある。そこで $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の代わりに測度を持つ空間の Dirichlet 形式の列で $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ を解析しよう。

6.2. $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の近似列—小さな無限次元と大きな無限次元—

$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の代わりに $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上の配置空間 S

$$S = \{s = \sum_i \delta_{s_i}; s(K) < \infty \text{ for all compact } K \subset \mathbb{R}^d\} \quad (6.9)$$

を考える。 S は漠位相で Polish 空間 (完備可分距離空間と位相同型な空間) となる。この空間の点は、可算個の名前のつけない粒子 $s = \sum_i \delta_{s_i}$ を表す。Radon 測度と見なしているため、自然に位相が入り便利である。一方、粒子に名前 (ラベル) (s_1, s_2, \dots) をつけると $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の元と見なすことになる。

無限直積 $d\mathbf{x}^{\infty}$ の代用品として通常使用されるのは、Lebesgue 測度を強度 (intensity) とする Poisson 点過程である。つまり Lebesgue 測度 λ に対して S 上の確率測度 Λ を

(1) $A \cap B = \emptyset$ ならば、 $\Lambda \circ \pi_A^{-1}$ と $\Lambda \circ \pi_B^{-1}$ は独立。

(2) $\Lambda(s(A) = n) = e^{-\lambda(A)} \lambda(A)^n / n!$

で定める。ここで $\pi_A: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ は $\pi_A(s) = s(\cdot \cap A)$ 。 \mathbf{S} の関数 f は、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \cup \{\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^i\}$ の部分集合上の対称な関数 \check{f} によって

$$f(s) = \check{f}(s_1, s_2, \dots) \quad (s = \sum_i \delta_{s_i}) \quad (6.10)$$

と一意的に表示される。 \mathbf{S} 上の2次場 \mathbb{D} を

$$\mathbb{D}[f, g](s) = \mathbb{D}^\infty[\check{f}, \check{g}](s_1, s_2, \dots) \quad (6.11)$$

で与える。右辺は、 (s_i) について対称で有り、 $s = \sum_i \delta_{s_i}$ の関数と見なせる。 Dirichlet 形式

$$\mathcal{E}^\Lambda(f, g) = \int_{\mathbf{S}} \mathbb{D}[f, g] d\Lambda, \quad L^2(\mathbf{S}, \Lambda) \quad (6.12)$$

を考えると、それに対して、 \mathbf{S} 値ブラウン運動 \mathbf{B}

$$\mathbf{B}_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{B_t^i} \quad (6.13)$$

が対応する。つまり $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ に比べてはるかに小さな無限次元空間 \mathbf{S} には、 Lebesgue 測度 Λ と2次場 \mathbb{D} とブラウン運動 \mathbf{B} が存在し (6.3) の関係を有している。

尚、各時刻 t において (6.13) をみたす B_t^i には、様々な選択の余地がある。うまく選べば、 $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値ブラウン運動となる。この選択は後述するように、各 B_t^i が連続過程かつ互いにぶつからなければ初期のラベルの任意性だけで一意に定まる。

二つの無限次元空間 \mathbf{S} と $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ との間には、大きな差がある。そこで、小さな無限次元 \mathbf{S} と大きな無限次元 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ を繋ぐ無限次元空間の列を考える。

$$\mathbf{S}, \quad \mathbb{R}^d \times \mathbf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^3 \times \mathbf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^4 \times \mathbf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^5 \times \mathbf{S}, \quad \dots \quad (6.14)$$

それぞれの空間の「Lebesgue 測度」の列は

$$\Lambda, \quad dx \times \Lambda, \quad dx^2 \times \Lambda, \quad dx^3 \times \Lambda, \quad dx^4 \times \Lambda, \quad dx^5 \times \Lambda, \quad \dots \quad (6.15)$$

ブラウン運動の列は、 $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{B_t^i}$ 、 $\mathbf{B}^n = (B^1, \dots, B^n)$ と置くと

$$\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^1 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^2 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^3 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^4 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^5 \times \mathbf{B}, \quad \dots \quad (6.16)$$

という対応関係になる。これらの列の n 番目の要素に対しては Dirichlet 形式

$$\Xi^{[n]} := (\mathcal{E}^{dx^n \times \Lambda}, L^2((\mathbb{R}^d)^n \times \mathbf{S}, dx^n \times \Lambda)) \quad (6.17)$$

が付随している。ここで Campbell 測度の概念 (後述) を Λ に適用する。 $\Lambda^{[n]} = dx^n \times \Lambda$ である。更に $\mathbf{S}^{[n]} = (\mathbb{R}^d)^n \times \mathbf{S}$ と置いて、

$$\Xi^{[n]}(\Lambda) = (\mathcal{E}^{\Lambda^{[n]}}, L^2(\mathbf{S}^{[n]}, \Lambda^{[n]})) \quad (6.18)$$

と表すことにする。 $\Xi^{[n]}(\Lambda)$ の表記は一般の点過程 μ でも意味を持つから、 $\Xi^{[n]}(\mu)$ を Theorem 7.3 で使用する。

今、 $d \geq 2$ とする。するとブラウン運動粒子は互いにぶつからないから、初期状態でラベル l を一つ選ぶと、各粒子はそのラベルを変えずずっと背負っていきける（ゼッケンである）。従って S 値のパス空間 $C([0, \infty); S)$ から $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値パス空間 $C([0, \infty); (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ への自然な写像をラベル l から構成できるので l_{path} と表す。この時

$$l_{\text{path}}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad (6.19)$$

である。重要なことは、この対応は、Dirichlet 形式の間のカップリングを与えることである。つまり、元々 $\Xi^{[0]}$ で構成された拡散過程（ブラウン運動）である \mathbf{B} とこの写像 l_{path} によって、 $\Xi^{[n]}$ で構成される拡散過程（ブラウン運動）は表示できる。言い換えると、加算無限個の Dirichlet 形式の列の各要素 $\Xi^{[n]}$ は、元来それぞれ他の Dirichlet 形式とは無関係な拡散過程 $\mathbf{B}^n \times \mathbf{B}$ — $(\mathbb{R}^d)^n \times S$ 値ブラウン運動—を構成するのだが、それらすべての拡散過程の間に、 l_{path} を用いて作ったカップリングが存在するのである。すべては最も小さい空間のブラウン運動 \mathbf{B} の関数として表現できる。つまり、一番小さい Dirichlet 空間は、無限個の Dirichlet 空間の間の構造を入れる役割を果たす。そして、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(B^1, \dots, B^n) \quad (6.20)$$

をうまく扱う Dirichlet 空間 $\Xi^{[n]}$ を構成しその間の関係を見出したから、それによって $\mathbf{B} = (B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ をうまく扱う $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上の Dirichlet 空間を作ったことになる、と考えているのである。この視点は、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ のすべてをカバー出来ないにせよ、目標としている無限次元確率微分方程式を解くためには十分である。

7. Dirichlet form approach : 干渉ブラウン運動の場合

前節のアイデアを非自明な場合、つまり干渉ブラウン運動に対して実行し主結果を述べる。この章の目的は、つぎの無限次元確率微分方程式をとく一般論を展開することである。

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, X_t^{i\diamond}) dB_t^i + b(X_t^i, X_t^{i\diamond}) dt \quad (7.1)$$

ただし

$$X_t^{i\diamond} = \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j}$$

この確率微分方程式は (2.1) と (5.1) および具体例のすべてを含んでいる。鍵になるのは点過程 μ の準 Gibbs 性と対数微分概念である。前者はアンラベル拡散過程、後者は確率微分方程式 (7.1) の解の構成に主な役割を果たす。

7.1. アンラベル拡散過程の構成

まず、(6.5) の対応を念頭に与えられた点過程 μ に付随する Dirichlet 形式からアンラベル拡散過程を構成するための一般的定理を紹介する。準 Gibbs 測度の導入から始める。

Definition 7.1. Φ, Ψ をそれぞれ自由および干渉ポテンシャルとする。 μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度とは、(5.4) で定義された正則条件付き確率 $\mu_{r,\xi}^n$ が、 (r, ξ, n) に依存する正定数 $C = C(r, \xi, n)$ に対して次の不等式を満たすことである。 μ -a.s. ξ とすべての $r, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C(r, \xi, n)^{-1} e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n \leq \mu_{r,\xi}^n(ds) \leq C(r, \xi, n) e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n \quad (7.2)$$

ここで二つの測度 μ と ν が $\mu \leq \nu$ とは、すべての A に対して $\mu(A) \leq \nu(A)$ が成り立つことを表す。 $\mathcal{H}_r(s)$ は(5.6) で定義された S_r 内部だけのハミルトニアンである。

Remark 7.1. (1) Gibbs 測度は準 Gibbs 測度である。

(2) $C(r, \xi, n)$ が ξ にも依存していることに注意する。この概念は自由ポテンシャルの変動に対してロバストで μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度ならば、任意の局所有界な Φ_0 に対して μ は $(\Phi + \Phi_0, \Psi)$ 準 Gibbs 測度である。

(3) 典型例で挙げた対数関数で干渉しあう点過程はすべて $(0, -\beta \log |x - y|)$ 準 Gibbs 測度である。

実際の定理より少し制限した条件でアンラベル拡散過程の構成定理を述べる。これは簡単のためである。

Theorem 7.1 ([32, 38]). μ が上半連続なポテンシャル (Φ, Ψ) を持つ準 Gibbs 測度、かつある $1 < p$ に対して μ の n 点相関関数がすべての $n \in \mathbb{N}$ について L^p 局所有界とする。このとき *Dirichlet* 形式は可閉となり、更にその閉包に付随する拡散過程 $(X, \{P_s\}_{s \in \mathbb{S}})$ が存在する。

点過程 μ が準 Gibbs 測度になるための具体的な十分条件は [38, 39] で与えられた。それを用いてこの abstract のすべての点過程の準 Gibbs 性を示すことができる。ただし、対数関数を扱う場合、それでも計算は各モデルに依存し、非自明である。[38, 39] の一般論では与えられた干渉ポテンシャルに対して、それに応じた μ の幾何的剛性の下で準 Gibbs 性が成立することを証明した。この必用な幾何的剛性の証明が、各対数干渉ポテンシャルに対して case by case の証明になるのである。

7.2. 無限次元確率微分方程式

つぎに確率微分方程式 (7.1) をとく。そのため、対数微分 d^μ の概念を導入する。まず μ の k -Campbell 測度 $\mu^{[k]}$ とは

$$\mu^{[k]}(dx ds) = \rho^k(\mathbf{x}) dx \mu_x(ds) \quad (7.3)$$

ただし $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, ρ^k は μ の k 点相関関数、更に、 μ_x は \mathbf{x} で条件づけられた reduced Palm 測度である：

$$\mu_x(ds) = \mu(ds - \mathbf{x} | \mathbf{s}(x_i) \geq 1 \text{ for all } i) \quad (7.4)$$

S 上の局所的、かつ、滑らか、かつ有界な関数全体を \mathcal{D} と表す。

Definition 7.2. d^μ が μ の対数微分とはすべての $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S} d^\mu f d\mu^{[1]} = - \int_{\mathbb{R}^d \times S} \nabla_x f d\mu^{[1]} \quad (7.5)$$

以上を $d^\mu(x, s) = \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, s)$ と表す。次に、 μ に関する次の微分方程式を考える。

$$2b(x, s) = \nabla_x a(x, s) + a(x, s) \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, s) \quad (7.6)$$

ここで

$$a(x, s) = 2\sigma(x, s) {}^t\sigma(x, s) \quad (7.7)$$

与えられた係数に対して μ についての微分方程式 (7.6) を解くための十分条件は [37] で与えられている。この十分条件はこの abstract のすべての例に適用できる。また Ruelle クラスのポテンシャルであれば (7.6) が解けるのは明らかである。[37] に於いては、 μ の対数微分を計算するための一般論—(7.6) を解くための一般論—を用意した。それを用いて、この abstract の例はすべて計算できる。やはり準 Gibbs 性と同様に、 μ に応じた幾何的剛性を証明するのが鍵になるが、その部分是对数ポテンシャルに関しては case by case であり、しばしば精密な評価を必用とする。

Theorem 7.2 ([37]). 微分方程式 (7.6) の解 μ が存在したとする。更に μ が Theorem 7.1 の仮定、および各粒子が非衝突かつ非爆発という条件をみたすとする。このとき与えられたラベル l に対して確率微分方程式 (7.1) は μ^l -a.s. の出発点に対して解をもつ。解は、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値拡散過程になる。また対応するアンラベル確率力学は μ 可逆拡散過程である。

この定理はこの abstract のすべての例に適用できる。

証明の鍵は Section 6 で説明した consistency (カップリングの存在) が Theorem 7.1 で構成したアンラベル拡散過程に対しても成立することである。つまり 6 章のように、各 Campbell 測度 $\mu^{[k]}$ に対応する $(\mathbb{R}^d)^k \times S$ の上の Dirichlet 空間を $\Xi^{[k]}(\mu)$ と置く。

Theorem 7.3 ([36]). $\Xi^{[k]}(\mu)$ に対して 6 章の Λ の場合と同じカップリングが存在する。

一旦、Theorem 7.3 を証明すれば (7.1) を解くことは難しくない。実際、 $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ において、各座標関数 x_i は Dirichlet 形式 $\Xi^{[k]}$ 、但し $i \leq k$ の定義域に局所的に入る。そこでそれに対して伊藤の公式 (福島分解と Revue 対応) を使えば、これらが確率微分方程式 (7.1) を満たすことが分かる。カップリングの存在から、 k まででなく、すべての $i \in \mathbb{N}$ で (7.1) が解けたことになる。

8. その後の展開

8.1. 無限次元確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性

2011 年から種村氏との共同研究が始まった。一連の研究 [44, 45, 46, 47, 48] で様々な進展があった。まず [44] によって、確率微分方程式 (7.1) の強解の存在とパスワイズの一意性が一般的に証明された。仮定も現段階とほとんど変わらない。無論、この abstract のすべての例に適用できる。

アイデアとしては、無限次元確率微分方程式にたいして新しい解の概念を導入したことである。この概念は、無限次元特有であり、従来のもと同値だが、無限次元を解析する上で適切である。一言で述べると、無限次元確率微分方程式が、無限個の有限次元確率微分方程式の列で consistency を持つものと同値であると言うのが、基本的なアイデアである。ここでも前述のカップリングの類似を使う。

consistency が成り立つ原因は、アンラベル拡散過程 X の存在である。更に、ラベルについてのパス空間の末尾 σ -field を無限次元確率微分方程式の境界条件に対する境界条件と見なし、その自明性と無限次元確率微分方程式の解の存在やパスワイズ一意性が一対一対応することを一般的に示すものである。このあたりの議論はロバストであり、伊藤型確率微分方程式を超えて様々な無限次元確率微分方程式に有効であると思われる。そして、最後に、パス空間の末尾 σ -field の自明性を、配置空間 S の点過程 μ についての自明性に帰着されることを、確率幾何的考察によって示したものである。このアイデアは、今後多くの応用を持つと思われる。

[45] では Airy 干渉ブラウン運動の無限次元確率微分方程式を解いた。Soft Edge 場合が他の Bulk や Hard Edge に比べて計算が一番大変になる。2011 年に種村氏が Airy の場合の対数微分、従って、無限次元確率微分方程式の形を特定し、この共同研究が始まった。3.2 章の計算は [45] から転載したものだが、これはその時の氏の発見に基づいている。それまで Airy については、非常に多くの研究があったのにもかかわらず極限の確率微分方程式は、形すら分かっていなかった。有限系の時空間相関関数の極限として、何か確率力学がある、ということが分かっていた感じだった。それでも様々な種類の興味深い有限粒子系の極限として(少なくとも右端の Airy 過程は) 出現するものなので、大きな興味を集めていた。極限の分布、今の場合は、Wigner の半円分布、が与えられたとき、その端の点に対応する無限次元確率微分方程式を導出する、この考えは普遍的だと思われる。半円分布以外の様々な極限分布と関連する極限定理があるが、他の Soft Edge でも同様の [45] の手順で、確率微分方程式の形が導出されるはずである。

一旦、確率微分方程式の解の一意性が証明されると、様々な応用が考えられる。例えば、Dirichlet 形式の一意性 [46, 48] や SDE Gap [25]、代数的構成と解析的構成の一致 [44, 45, 46, 47, 48] などである。

8.2. 力学的普遍性

ランダム行列に関係する点過程について Soshnikov [55], Tao [59], H.T. Yau [4] など様々な形の普遍性が調べられてきた。しかしその確率力学的対応物は、[25] が初めてである。今後、この研究は様々な方向に進展すると思われる。Sine/Airy/Bessel 点過程への収束が、ランダム行列の世界の中心極限定理ならば、その次に、Donsker の不変原理の対応物があるはずである。それが当面の目標である。

8.3. 力学的剛性

Ginibre 点過程は様々な幾何的剛性を持つが、その反映として、Ginibre 干渉ブラウン運動が力学的剛性を持つことが期待できる。それに関して、tagged 粒子が劣拡散的挙動をするという予想を提唱している。この問題は、2006 年から考え始め、ずっとこの研究の目標としてきたものである。更に、当時から β について、自己拡散行列に対する相転移が生じるという予想を見だし、その解決を一遠い目標にしてきた。尚、この相転移予想の Toy モデルである、周期的クーロンランダム環境における粒子のホモジナイゼーションについて、相転移が起こることは、何年か前に既に証明し何度か講演したが、まだ論文にはしていない。これは相転移予想が成立することを強くサポートする結果である。

8.4. Ginibre 点過程の幾何的剛性—そして、対数干渉ポテンシャルを超えて

Ginibre 点過程は最も代表的な、かつ現時点では唯一の2次元空間の2次元クーロンポテンシャルで相互作用する平行移動不変な点過程である。それについての剛性が、Ghosh [12], Ghosh-Peres [13], O.[40], O.-Shirai [42, 43], Shirai [52] などですべて見つかった。

今回の研究 [36, 37, 38, 39] は、2002年のMSJ-IRIの研究会での講演から始まった。準Gibbs性の概念を導入してアンラベル確率力学を構成する部分、および、確率幾何的剛性から準Gibbs性の導出する部分の一般論はすぐに完成したが、当時はまだこの一般論の適用例が少ないことが不満だった。Soshnikov[54]の論文には様々な点過程が挙げられていて、その中でも2次元空間の中の2次元Coulomb点過程であるGinibre点過程は非常に面白いものと思われた。しかし、当時、それに一般論を適用しGinibre干渉ブラウン運動を構成するためには、Ginibre点過程に対する確率幾何的剛性を示さなければならなかった。

2004年に九州大学へ移ってすぐに、ファカルティクラブでランチをした後、白井朋之氏からひとつのプレプリント [52] を頂いた。「こんなものありますよ」とひょいと投げられるように渡されたプレプリントは、まさにGinibre点過程の剛性を示したものであった。それによって、Ginibre点過程を適用例のラインナップに加えることが出来た。以来、Ginibre点過程が最も重要な対象だと考えている。

今後、より剛性の強いGAF（ガウシアン解析関数の零点）を始め、 β アンサンブル、すべての行列式過程、更に世の中にある様々な点過程に、この研究が発展していくものと思われる。それには、これらの点過程の剛性、さらには、様々な確率幾何的研究が欠かせない。まず、必用なものは準Gibbs性と対数微分の表現の2点である。

参考文献

- [1] Anderson, G.W., Guionnet, A., Zeitouni, O. : An Introduction to Random Matrices, Cambridge university press, 2010.
- [2] Borodin, A., Olshanski, G.: Infinite-dimensional diffusion as limits of random walks on partitions. *Probab. Theory Relat. Fields* **144**, 281-318 (2009)
- [3] Borodin, A., Gorin, V.: Markov processes of infinitely many nonintersecting random walks. *Probab. Theory Relat. Fields* **155**, 935-997 (2013)
- [4] Bourgade, P., Erdős, L., Yau, H.T., *Universality of general β -ensembles*, *Duke Math. J.* **163** (2014) 1127-1190.
- [5] Corwin, I., Hammond, A.: Brownian Gibbs property for Airy line ensembles. *Inventiones mathematicae* **195**, 441-508 (2014)
- [6] Dyson, F. J. : A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *J. Math. Phys.* **3**, 1191-1198 (1962).
- [7] Eynard, B., Mehta, M. L. : Matrices coupled in a chain: I. Eigenvalue correlations. *J. Phys. A* **31**, 4449-4456 (1998).
- [8] Forrester, Peter J., *Log-gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press (2010).
- [9] Fritz, J. *Gradient dynamics of infinite point systems*, *Ann. Probab.* **15** (1987) 478-514.
- [10] Fukushima, M., *On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities*, *J. Math. Soc.* **155** (1971) 455-473.
- [11] Fukushima, M., *et al.*, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd ed., Walter de Gruyter (2011).

- [12] Ghosh, S., *Rigidity and Tolerance in Gaussian zeroes and Ginibre eigenvalues: quantitative estimates*, (preprint) arXiv:1211.3506 [math.PR].
- [13] Ghosh, S., Peres Y., *Rigidity and Tolerance in point processes: Gaussian zeroes and Ginibre eigenvalues*, (preprint) arXiv:1211.2381 [math.PR].
- [14] Hägg, J. : Local Gaussian fluctuations in the Airy and discrete PNG Processes, Ann. Prob. **36**, 1059-1092 (2008)
- [15] Honda, R., Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to the Bessel random point fields*, arXiv:1405.0523 [math.PR] (preprint).
- [16] Ikeda, N., Watanabe, S., *Stochastic differential equations and diffusion processes*, 2nd ed, North-Holland (1989).
- [17] Inukai, K., *Collision or non-collision problem for interacting Brownian particles*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82**, (2006), 66-70.
- [18] Johansson, K.: Non-intersecting paths, random tilings and random matrices. Probab. Theory Relat. Fields **123**, 225-280 (2002).
- [19] Johansson, K.: Discrete polynuclear growth and determinantal processes. Commun. Math. Phys. **242**, 277-329 (2003).
- [20] Katori, M., Tanemura, H.: Noncolliding Brownian motion and determinantal processes. J. Stat. Phys. **129**, 1233-1277 (2007).
- [21] Katori, M., Tanemura, H.: Zeros of Airy function and relaxation process, *J. Stat. Phys.* **136**, 1177–1204 (2009).
- [22] Katori, M., Tanemura, H.: *Non-Equilibrium Dynamics of Dyson's Model with an Infinite Number of Particles*, Communications in Mathematical Physics, **293**, 469–497 (2010).
- [23] Katori, M., Tanemura, H.: *Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels*, Markov processes and related fields **17**, 541-580 (2011).
- [24] Katori, M., Tanemura, H., *Noncolliding processes, matrix-valued processes and determinantal processes*, Sugaku Expositions **24** (2011) 263–289.
- [25] Kawamoto, Y., Osada, H.: Finite particle approximations of interacting Brownian motions in infinite dimensions and SDE gaps. (in preparation)
- [26] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977) 55-72.
- [27] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978) 277-299.
- [28] Lyons, R., *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003) 167-212.
- [29] Ma, Z.-M. and Röckner, M., *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer-Verlag, 1992.
- [30] Mehta, M. L. : Random Matrices. 3rd edition, Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [31] Nagao, T., Forrester, P. J. : Multilevel dynamical correlation functions for Dyson's Brownian motion model of random matrices. Phys. Lett. **A247**, 42-46 (1998).
- [32] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Commun. Math. Phys. **176**, 117–131 (1996).
- [33] Osada, H., *An invariance principle for Markov processes and Brownian particles with singular interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **34** (1998), 217–248.
- [34] Osada, H. *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields **112** (1998), 53–90.
- [35] Osada, H., *Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimensions and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields*, in Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, eds. T. Funaki and H.

- Osada, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **39**, 2004, 325-343.
- [36] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, *J. Math. Soc. Japan*, **62**, No. **3** (2010), 867-894.
- [37] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, *Probability Theory and Related Fields*, Vol **153**, (2012) pp 471-509.
- [38] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, *Annals of Probability*, Vol **41**, (2013) pp 1-49.
- [39] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, *Stochastic Processes and their Applications*, Vol **123**, (2013) pp 813-838.
- [40] Osada, H., *Palm resolution and restore density formulae of Ginibre point process*, (preprint/draft).
- [41] Osada, H., Saitoh, T., *An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains*, *Probab. Theory Related Fields* **101** (1995), 45-63.
- [42] Osada, H., Shirai, T., *Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B6**, 193–200 (2008).
- [43] Osada, H., Shirai, T., *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, (preprint) arXiv:1406.3913 [math.PR].
- [44] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ -fields*, (preprint) arXiv:1412.8674 [math.PR].
- [45] Osada, H., Tanemura, H. *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint) arXiv:1408.0632 [math.PR].
- [46] Osada, H., Tanemura, H., *Cores of Dirichlet forms related to Random Matrix Theory*, *Proc. Jpn. Acad., Ser. A*, Vol. 90, 145-150 (2014).
- [47] Osada, H., Tanemura, H. *Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels*, (preprint) arXiv:1412.8678 [math.PR] .
- [48] Osada, H., Tanemura, H. *Uniqueness of quasi-regular Dirichlet forms describing interacting Brownian motions in infinite dimensions*, (in preparation).
- [49] Prähofer, M., Spohn, H. : Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, *J. Stat. Phys.* **108**, 1071-1106 (2002).
- [50] Ruelle, D., *Superstable interactions in classical statistical mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **18** (1970) 127–159.
- [51] Shiga, T. *A remark on infinite-dimensional Wiener processes with interactions*, *Z. Wahrschverw. Gebiete* **47** (1979) 299-304.
- [52] Shirai, T., *Large deviations for the Fermion point process associated with the exponential kernel* *J. Stat. Phys.* **123** (2006), 615-629.
- [53] Shirai, T., Takahashi, Y.: Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process. *J. Funct. Anal.* **205**, 414-463 (2003).
- [54] Soshnikov, A. : Determinantal random point fields. *Russian Math. Surveys* **55**, 923-975 (2000).
- [55] Soshnikov, A. *Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices*, *Comm. Math. Phys.* **207** (1999) 697–733.
- [56] Spohn, H. : Interacting Brownian particles: a study of Dyson’s model. In: *Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems*, G. Papanicolaou (ed), *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, **9**, Berlin: Springer-Verlag, 1987, pp. 151-179.
- [57] Tanemura, H., *A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in \mathbb{R}^d* ,

- Probab. Theory Relat. Fields **104** (1996) 399-426.
- [58] Tanemura, H., *Uniqueness of Dirichlet forms associated with systems of infinitely many Brownian balls in \mathbb{R}^d* , Probab. Theory Relat. Fields **109** (1997) 275-299.
- [59] Tao, T., *Random matrices: Universality of local eigenvalue statistics*, Acta Math., **6** (2011), 127-204
- [60] Tsai, Li-Cheng, *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, (preprint).
- [61] Valkó, B., Virág, B., *Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel*, Invent. math.(2009) **177** 463-508.