干渉ブラウン運動とランダム行列

長田博文

名古屋/東北/東京大学集中講義

2013 年 12/6/月–12/10/金

平成 28 年 5 月 19 日

概 要

目 次

0 序

2013 年に、3 回集中講義をする機会に恵まれた。

- 名古屋大学 ：2013/4/22–26

「干渉ブラウン運動とランダム行列について」

- 東北大学：2013/6/17–21

「干渉ブラウン運動」

- 東京大学： 2013/10/15–18

「Dynamical rigidity stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions」

このノートは、これらの講義に基づいている。集中講義で話した結果は、その後、いくつかの論文として出版されたり、preprint として math arXive に掲載されている。今後、更に、継続して、複数の論文として出版する予定である。

このノートは、全く未完成なので、講義ノートのコピーも掲載する。未整理なノートなので、興味を持たれた方は、対応する論文を参照していただきたい。この講義ノート自体は、今後、時間をかけて、整理していく予定である。

この一連の講義の、前半は、「対称性をもつ無限次元確率微分方程式の新理論」について講演したものである。この結果は、千葉大学の種村さんとの共同研究だが、すでに、2 編の論文

として出版しました、2 編の preprint を math arXive に長い論文を掲載している。今後も、引き続き、継続していく。上記の新理論は今後時間をかけて、発展させていくつもりである。

関係して、九州大学の白井先生と Ginibre 点過程の dichotomy の論文、院生の本田君と Bessel 干渉ブラウン運動の論文を書き出版した。

後半の東大での講義では、以上に加えて「クーロン干渉ブラウン運動の力学剛性」を論じたものである。この結果は、今後いくつかの論文として出版し、世に問う予定である。現時点でも、相転移現象など、興味深い結果が見つかっている。筆者の研究の中心的テーマの一つである。

この時の剛性の証明（Ornstein trapping）の証明には、バグがあり、その部分は、講義中、難破した。尚、Ginibre 干渉ブラウン運動の**劣拡散性**のレベルの剛性は、現時点では、証明が完成し、論文作成中である。「Ornstein trapping」という、より強い力学剛性は、今後、何らかの形（定式化）で、証明し発表していく予定である。元々の主張は、バグがあったが、非常に興味深い事実が見つかっている。

2007 年にも東京大学で集中講義をする機会に恵まれた。実は、その時、「Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性」を最終日に講義したのだが、それの証明にバグがあった。以来、証明の完成まで 7 年の月日を費やした。また、相転移予想は、その年の、7 月の SPA で総合講演する際に、思いついたことである。元々、「Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性」を SPA 講演の主題にするつもりだった。最後の念押しに、証明を見直していて、バグを見つけてしまった。修正する時間がないし、苦し紛れに、周期環境の中のクーロン干渉ブラウン運動粒子の挙動を考えることで、相転移を発見した。これは、本来の、無限粒子系である、Ginibre 干渉ブラウン運動の toy モデルなのだが、結果自体が鮮やかで面白い。この 2007 年の失敗は、2013 年の講義で、Ginibre の力学剛性を講義したかった理由でもあるのだが、再び返り討ちにあってしまった。ともかく、今は、完成している。

集中講義では、いつも新しい話をしたいと思う。しかし、大抵こんな状態の集中講義になるので、本当に聞いてくださる学生諸君には申し訳ない。とはいえ、私の最近の論文のほとんどが、集中講義がきっかけで書き上げている。幸い、間違うごとに新しい現象が見つかり、研究が進展していく。（屁理屈と言い訳だが）、どうかご容赦願いたい。

———————————————— 東北概要：

■授業題目：干渉ブラウン運動

■授業の目的と概要：干渉ブラウン運動とはユークリッド空間を動く無限粒子系からなる確率力学である。この運動を表現する無限次元確率微分方程式を確率幾何的な方法で解くこと

を目標とする。この手法は、Dirichlet 形式理論による無限次元確率微分方程式の一意的強解の構成への応用である。逆に、SDE の理論を、Dirichlet 形式の一意性の問題へ応用することにもつながる。この手法は、従来不可能であった Coulomb ポテンシャルによる干渉ブラウン運動の扱いを可能にする。

■学習の到達目標：相関関数などの配置空間の基本概念を理解した上で、点過程の対数微分や準 Gibbs 測度と言った概念を理解する。Dirichlet 形式理論においてユークリッド空間のブラウン運動を構成する手法は、無限個のブラウン運動の構成にはそのままでは使えない。これは Lebesgue 測度の無限直積が Dirichlet 形式の基礎の測度として登場するからだが、それを「consistency」を鍵に「測度のない Dirichlet 形式」を考えて Dirichlet 形式的に構成する。更にそのアイデアは発展し、無限次元 SDE の強解の一意的構成に至るのだが、それを理解する。また Coulomb ポテンシャルを備えた干渉ブラウン運動の代表例である、Dyson モデル、Airy 干渉ブラウン運動、Ginibre 干渉ブラウン運動についてなじむ。

■授業の内容・方法と進度予定：確率幾何・ランダム行列・確率微分方程式の古典的理論・Dirichlet 形式論を使用する。時間があれば、Kipnis-Varadhan の不変原理、Ginibre 点過程の Palm 測度の特異性などについても話す。

■教科書および参考書：なし

———————————— 東京大学概要：

d 次元ユークリッド空間内を d 次元 Coulomb ポテンシャル Ψ_d で相互作用しながら運動する無限個のブラウン運動を考える。逆温度を β とする。この確率力学が平行移動不変なときには、次の無限次元確率微分方程式で記述される。(c_d は正定数, $c_2 = 1$)

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \sum_{j\neq i,\, |X_t^i - X_t^j|<r} c_d \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d} dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

現在、$d = 2$ かつ $\beta = 2$ の時だけ、この確率力学およびその平衡分布は構成されており、それぞれ「Ginibre 干渉ブラウン運動」、「Ginibre 点過程」と呼ばれる。尚、この点過程は、非エルミート Gaussian ランダム行列の固有値の分布の極限である。

$\mathbb{R}^d$ において d 次元 Coulomb ポテンシャルは、Ruelle クラスのポテンシャルではない。従って、DLR 方程式に基づく、従来の Gibbs 測度の理論の外側にあった。Gibbs 測度は、Poisson 点過程に近いクラスである。一方、Coulomb ポテンシャルはその遠方での相互作用の強烈さのために、付随する無限粒子系は全く異なる様相を見せる。この講義では、その一例として Ginibre 点過程の幾何的及び力学的 rigidity を語る。

同時に無限次元確率微分方程式の強解の一般論を展開する。

————————————

以下、書きかけの序章

最初の章で、ガウシアンユニタリアンサンブル（GUE）の確率分布密度を計算する。この鮮やかな結果は、ランダム行列論の出発点である。

GUE は有限粒子系を表すが、そこから無限粒子系への極限操作をし無限粒子系を考察するには、新たに配置空間をはじめ様々な概念を必要とする。章 2 ではその数学的準備をする。

1　序

s:k1

平面を $\mathbb{R}^2$ および $\mathbb{C}$ で表す。平面内に**無限個の粒子**が分布しているとして、その幾何的および力学的性質を追求したい。

粒子間には、

2　配置空間・点過程・相関関数

s:1

空間 S 内の有限もしくは可算無限個の粒子を表す空間を設定する。S とは粒子が動き回っている空間で、一般的な枠組みとしては S を Polish 空間とする。Polish 空間とは、完備可分距離空間と位相同型な空間である。「と位相同型な」とは持って回った言い方だが、便利である。例えば、$(0,1)$ は通所のユークリッド距離で完備距離空間とはならないが、$\mathbb{R}$ と位相同型だからポーランド空間となる。確率論は通常ポーランド空間位で設定するのが、一般性と具体性のバランスがうまくとれている。尚、ポーランド空間のボレル可測部分集合は、（部分位相の下で）再びポーランド空間となる。

ただし、この本では S は $\mathbb{R}^d$、$\mathbb{C}$ もしくは $[0,\infty)$ だけが登場する。

$\mathsf{M}(\mathrm{S})$ で S のラドン測度全体を表す。ここでラドン測度とは、可測空間 $(\mathrm{S},\mathcal{B}(\mathrm{S}))$ 上の測度でコンパクト集合に対し有限の値を取るものである。ここで $\mathcal{B}(\mathrm{S})$ は S のボレル集合族（開集合を含む最小の σ 加法族）を表す。$\mathsf{M}(\mathrm{S})$ には、漠位相（Vague topology）と弱位相（weak topology）という、次の 2 種類の位相をしばしば考える。

dfn:11

定義 2.1.

粒子の空間として、2 種類の空間が自然に考えられる。一つは、すべての粒子を区別する場合で、これは粒子の個数分だけ S の直積をとった空間である。例えば加算無限個の粒子に、順に $1,2,3,\dots$ とラベルを付けた場合は、$\mathrm{S}^{\mathbb{N}}$ となる。もう一つは、すべての粒子を区別しない空間で、配置空間と呼ばれる。

粒子を区別した場合ラベル粒子系、また区別しない場合アンラベル粒子系と呼ぶことにする。より正確に述べる。

空間 S 内の n 個の粒子は S^n の元と扱って差し支えないが，無限粒子系の場合，一般に粒子にラベルを付け S^∞ の元として扱うと平衡状態を表現する確率測度を構成することが難しくなる．そこで個々の粒子を区別しない配置空間を導入する必要が生じる．

配置空間

dfn:21

定義 2.2. Polish 空間 S 上の非負整数値ラドン測度 s を配置 (configuration) といい，S の配置全体 S に、漠位相 (vague topology) を入れたものを配置空間という．.

定義から s は

:12

$$\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \tag{2.1}$$

という形をしている。ここで $\{s_i\}$ は集積点を持たない S の点列で、δ_a は点 a に集中したデルタ測度である。$\{s_i\}_i$ は S 内のラベルを付けない可算個の粒子系を表現する．ラベル無粒子系の表現は集合として表現するなど、異なる流儀もあるが測度として表現すると下記に説明するように自然に位相が入るので便利である。

各 $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$ に対して $\mathsf{s}(A)$ は A 内の粒子の個数を表現し、非負整数および無限大の値をとる確率変数になる。仮定から定義から s はラドン測度だから、コンパクト集合に含まれる粒子数は常に有限になる．定義から、

:21

$$\mathsf{S} = \{\mathsf{s}\,;\, \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i},\quad \mathsf{s}(K) < \infty \quad (\forall \text{ コンパクト } K \subset \mathrm{S})\} \tag{2.2}$$

r:11

注意 2.1. $\mathsf{s} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\frac{1}{i}}$ とする。この時 s は $(0, \infty)$ 上の配置空間の元だが、$[0, \infty)$ 上の配置空間の元ではない。実際、閉区間 $[0, 1]$ は $[0, \infty)$ のコンパクト集合で、かつ $\mathsf{s}([0, 1]) = \infty$ となる。

S は Polish 空間となる．S がコンパクトなら S もコンパクトになる．

$\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ の時，S の部分集合 A が相対コンパクトである必要十分条件は，ある自然数列 $\{a_r\}$ が存在し $A \subset \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}\,;\, \mathsf{s}(D_r) \leq a_r\}$ $(\forall r \in \mathbb{N})$ となることである[?][resnick]. ただし $D_r = \{|x| \leq r\}$.

S の漠位相について、次の事実がよく知られている。

l:21

補題 2.1. $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$、$A$ 上の配置空間を A とする。漠位相のもとで次が成立する。

(1) A が *Polish* 空間なら A も *Polish* 空間である。

(2) A が閉集合なら A も閉集合である。

(3) A がコンパクトなら A もコンパクトである。

[1]

補題 2.2. $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$、$A$ 上の配置空間を A とする。d を S の距離、$s_0 \in \mathrm{S}$ とし $B_r = \{d(x, s_0) < r\}$ とおく。A が相対コンパクトである必用十分条件はある相対コンパクト集合の増大列 $\{K_r\}$ が存在し

$$A \subset \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}\,;\, \mathsf{s}(B_r) \le a_r\ (\forall r)\} \tag{2.3}$$

$(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ 上の確率測度を**点過程** (point process) あるいは確率点場 (random point field) という.

Poisson 点過程　m を $(S, \mathcal{B}(S))$ のラドン測度とする．S 上の点過程 μ は次の条件を満たす時，強度測度 m の Poisson 点過程と呼ばれる.

$$\mathsf{s}(A) \text{ は } \mu \text{ の下で平均 } m(A) \text{ の Poisson 分布に従う，ただし } m(A) < \infty \tag{2.4}$$

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \text{ が互いに素ならば，} \{\mathsf{s}(A_1), \ldots, \mathsf{s}(A_n)\} \text{ は独立} \tag{2.5}$$

特に $\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ で強度測度 m が Lebesgue 測度の時，付随する Poisson 点過程は様々な不変性をもち，配置空間上の Lebesgue 測度の役割を果たす.

周期的点過程　$\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ する。d 個の独立なベクトル $\{v_1, \ldots, v_d\}$ で張られる d 次元トーラス $\mathbf{T} = \{x \in \mathbb{R}^d\,;\, x = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i,\ 0 \le \alpha_i < 1\}$ 上の一様分布を λ とする。写像 $f : \mathbf{T} \to \mathsf{S}$ を $f(x) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \delta_{x + \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}}$ で与える。ただし $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$、$\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積である。このとき像測度 λ^f を周期的点過程という。

Lebesgue 測度を強度測度とする Poisson 点過程 Λ と周期的点過程はともに $\mathbb{R}^d$ の配置空間の上の平行移動不変な点過程だが、性質は両極端である。Λ は最もランダムな点過程であるのに対して、周期的点過程は、本質的に d 次元の Lebesgue 測度のランダムネスしか持たない、有限次元的な点過程である。

これら二つを両極端な場合として、その中間的な場合を考察していく。

相関関数・密度関数　m を S 上のラドン測度とする．対称な局所可積分関数 $\rho^n : S^n \to [0, \infty)$ は (2.6)を満たす時，点過程 μ の m に対する n 点相関関数 (n point correlation function) と呼ばれる.

$$\int_{A_1^{k_1} \times \cdots \times A_j^{k_j}} \rho^n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^n m(dx_i) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^j \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i) - k_i)!} d\mu \tag{2.6}$$

[1]混乱している。$\mathbb{R}^d$ ならいいが、ポーランド空間だとどうしよう

ここで $A_1,\dots,A_j\subset \mathrm{S}$ は互いに素な可測集合，$k_1,\dots,k_j$ は $k_1+\cdots+k_j=n$ を満たす自然数とする．$\mathsf{s}(A_i)-k_i<0$ の時は，$\mathsf{s}(A_i)!/(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!=0$ とみなす．次の (2.7)を満たす時，$\{\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を相関関数にもつ μ は一意である[?]．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{1}{n!}\int_{A^n}\rho^n(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}m(dx_i)\}^{-\frac{1}{n}}=\infty\quad(\forall A:m(A)<\infty) \tag{2.7}$$

$\mu(\mathsf{s}(A)<\infty)=1$ とする．対称な非負関数 $\sigma_A^n:A^n\to[0,\infty)$ は (2.8)を満たす時，点過程 μ の m に対する A 上の n 密度関数 (n density function) とよばれる．

$$\mu_A(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathfrak{u}_n^{-1}(B)}\sigma_A^n(\mathbf{x}_n)\prod_{i=1}^{n}m(dx_i) \tag{2.8}$$

ここで $\mu_A:=\mu\circ\pi_A^{-1}$，ただし $A\in\mathcal{B}(S)$ に対して，$\pi_A:\mathsf{S}\to\mathsf{S}$ は

$$\pi_A(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap A)$$

を表す．更に，B は A 上の配置空間の可測部分集合，$\mathbf{x}_n=(x_1,\dots,x_n)$，$\mathfrak{u}_n:A^n\to\mathsf{S}$ は $\mathfrak{u}_n(\mathbf{x}_n)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ である．定義から

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{A^n}\sigma_A^n(\mathbf{x}_n)\prod_{i=1}^{n}m(dx_i) \tag{2.9}$$

この正規化による密度関数は，Janossy 密度と呼ばれる．相関関数の定義から，

$$\rho^n(\mathbf{x}_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\int_{A^i}\sigma_A^{n+i}(\mathbf{x}_{n+i})\prod_{j=1}^{i}m(dx_{n+j})\quad(\mathbf{x}_n\in A^n) \tag{2.10}$$

ある定数 $c_1>0,\,c_2<1$ に対し $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{A^n}\rho^n(\mathbf{x}_n)c_1^n n^{-c_2 n}<\infty$ を満たせば，逆に

$$\sigma_A^n(\mathbf{x}_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\int_{A^i}\rho^{n+i}(\mathbf{x}_{n+i})\prod_{j=1}^{i}m(dx_{n+j}) \tag{2.11}$$

次の測度の弱収束条件[?, Lem. 11.1] は，行列式測度に対して有効である．

補題 2.3. $\mathrm{S}=\mathbb{R}$ の時，点過程 μ_{n}，μ の相関関数 $\{\rho_{\mathsf{n}}^m\}$，$\{\rho^m\}$ が (2.12) (2.13)を満たせば $\{\mu_{\mathsf{n}}\}$ は μ に弱収束する．ここで $c_1>0,\,c_2<1$ である．

$$\sup_{\mathsf{n}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{D_r^n}\rho_{\mathsf{n}}^n(\mathbf{x}_n)c_1^n n^{-c_2 n}<\infty\quad(\forall r\in\mathbb{N}) \tag{2.12}$$

$$\lim_{\mathsf{n}\to\infty}\rho_{\mathsf{n}}^n(\mathbf{x}_n)=\rho^n(\mathbf{x}_n)\qquad \textit{for a.e. } \mathbf{x}_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.13}$$

相関関数と平均・分散　$\langle f, \mathsf{s}\rangle = \int_S f d\mathsf{s} = \sum_i f(s_i)$ と表す．ただし $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \in \mathsf{S}$．$f \in C_0(S)$ あるいは，より一般に積分が意味を持つ時，次が成立する．

$$\mathrm{E}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S f(x)\rho^1(x)m(dx) \tag{2.14}$$

$$\mathrm{E}^{\mu}[|\langle f, \mathsf{s}\rangle|^2] = \int_S |f(x)|^2\rho^1(x)m(dx) + \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)\rho^2(x,y)m(dx)m(dy) \tag{2.15}$$

$$\mathrm{Var}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S |f(x)|^2\rho^1(x)m(dx) + \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)\mathcal{T}(x,y)m(dx)m(dy) \tag{2.16}$$

ここで $\mathcal{T}(x,y) = \rho^2(x,y) - \rho^1(x)\rho^1(y)$ は 2cluster 関数と呼ばれる．([?] と [?] では定義の符号が違う)．μ が Hermite 対称な核 $K(x,y)$ から生成される行列式測度ならば，

$$\mathrm{Var}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S |f(x)|^2 K(x,x)m(dx) - \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)|K(x,y)|^2 m(dx)m(dy)$$

Palm 測度・Campbell 測度　$\mu_{\mathbf{x}}$ が $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ で条件付けた μ の Palm 測度とは，次で与えられる μ の条件付き確率のことをいう．

$$\mu_{\mathbf{x}} = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^{k}\delta_{x_i} |\ \mathsf{s}(\{x_i\}) \geq 1 \text{ for } i = 1, \ldots, k). \tag{2.17}$$

μ^k が k-Campbell 測度とは，次式で定義される $\mathrm{S}^k \times \mathsf{S}$ 上の測度のことをいう．

$$\mu^k(A \times B) = \int_A \mu_{\mathbf{x}}(B)\rho^k(\mathbf{x})\prod_{j=1}^{k} m(dx_j). \tag{2.18}$$

3　Gibbs 測度・行列式測度

ポーランド空間 S 内を運動する粒子が，自由ポテンシャル $\Phi : \mathrm{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で媒質 S と相互作用し，また干渉ポテンシャル $\Psi : \mathrm{S} \times \mathrm{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で粒子間の相互作用をするとする．$\Psi(x,y) = \Psi(y,x)$ とする．この時，形式的な Hamiltonian$\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}(\mathsf{s}) = \sum_i \Phi(s_i) + \sum_{i<j}\Psi(s_i, s_j) \tag{3.1}$$

で与えられ，対応する粒子系の平衡分布は，直感的には次式で記述される．

$$\mu(d\mathsf{s}) = Z^{-1}e^{-\mathcal{H}(\mathsf{s})}\prod_i ds_i = Z^{-1}e^{-\sum_i \Phi(s_i) - \sum_{i<j}\Psi(s_i,s_j)}\prod_i ds_i \tag{3.2}$$

しかし無限体積の時，例えば $\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ で $\int_S e^{-\Phi}ds = \infty$ の時，表示に Lebesgue 測度の無限直積を含むため，(3.2)はそのままでは正当化できない．そのためまず無限粒子系を個々の粒子を区別しない配置空間の元として捉える．以下，無限粒子系の平衡分布を構成する二つの方法を説明する．

Gibbs 測度　条件付き確率を用いて (3.2)を正当化する方法について述べる．以下，$\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$，$D_r = \{|x| \le r\}$ とする．$\pi_r(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap D_r)$，$\pi_r^c(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap D_r^c)$ とおく．

$$\mathcal{H}_r(\mathsf{s}) = \sum_{s_i \in D_r} \Phi(s_i) + \sum_{i<j, s_i, s_j \in D_r} \Psi(s_i, s_j) \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}_{r,\xi}(\mathsf{s}) = \mathcal{H}_r(\mathsf{s}) + \sum_{s_i \in D_r,\ \xi_j \in D_r^c} \Psi(s_i, \xi_j) \qquad (\xi = \sum_i \delta_{\xi_i} \in \mathsf{S}) \tag{3.4}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の点過程 μ が (Φ, Ψ)**-カノニカル Gibbs 測度**とは $\forall r, m \in \mathbb{N}$，$\mu$-a.s. ξ に対し

$$\mu(\pi_r \in \cdot | \pi_r(D_r) = m, \pi_r^c(\mathsf{s}) = \pi_r^c(\xi)) = Z^{-1} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}(\mathsf{s})} 1_{\mathsf{S}_r^m}(\mathsf{s}) \Lambda(d\mathsf{s}) \tag{3.5}$$

ここで $\mathsf{S}_r^m = \{\mathsf{s}(D_r) = m\}$，$\Lambda$ は Lebesgue 測度を強度とする Poisson 点過程である．(3.5)の形の条件付き確率とポテンシャルの間の関係式を **DLR 方程式** (Dobrushin-Lanford-Ruelle equation) という．Ψ は超安定かつ Ruelle の意味で正則の時，Ruelle クラスのポテンシャルという[**?**]．Ruelle クラスのポテンシャルを持つ Gibbs 測度は，Poisson 点過程に近い性質を持つクラスである．一方，d 次元 Coulomb ポテンシャルは，$n \ge d-2$ の時 $\mathbb{R}^n$ において Ruelle の意味の正則性を満たさない．この時，μ が平行移動不変な点過程ならば，μ-a.s. ξ に対して (3.4)の最終項が発散し，DLR 方程式に意味がつかない．従って，カノニカル Gibbs 測度とならない．

行列式測度　m を S のラドン測度，$K : \mathrm{S}^2 \to \mathbb{C}$ とする．m に対する相関関数が

$$\rho^n(\mathbf{x}_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \tag{3.6}$$

で与えられる点過程 μ を (K, m) で生成される行列式測度 (determinantal measure) という．行列式点過程，行列式確率点場とも呼ばれる．

定理 3.1 ([**?**, **?**])**.** (K, m) が (3.7)–(3.9)を満たす時，(K, m) で生成される行列式測度 μ が一意に存在する．また (3.7)と (3.8)を満たす K が，行列式測度を生成するための必要十分条件は (3.9)である．

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)} \qquad (K \text{ は } \textit{Hermite} \text{ 対称}) \tag{3.7}$$

$$\mathsf{K} \text{ は } L^2(S,m) \text{ 上，局所 } \textit{trace} \text{ クラス作用素} \tag{3.8}$$

$$0 \le \mathsf{K} \le \mathrm{Id} \qquad (\text{つまり } \mathrm{Spec}(\mathsf{K}) \subset [0,1]) \tag{3.9}$$

ここで $\mathsf{K}f(x) = \int_S K(x,y) f(y) m(dy)$．(3.8)は K を任意のコンパクト集合 A に制限した時，K が $L^2(A, m)$ 上の *trace* クラスになることを意味する．

空間 S の可測部分集合 A 上の配置空間を S_A と表す．S_A を自然に S の部分集合とみなす．行列式測度 μ の S_A への制限は，再び行列式測度になる．実際，μ が (K,m) で生成される行列式測度の時，像測度 $\mu\circ\pi_A^{-1}$ は (K_A,m_A) で生成される (A 上の) 行列式測度となる．ただし $K_A(x,y)=1_A(x)K(x,y)1_A(y)$， $m_A(dx)=1_A(x)m(dx)$．また Palm 測度も行列式測度である．

定理 3.2 ([?])**.** (K,m) が (3.7)–(3.9) を満たすとし，μ を (K,m) で生成される行列式測度とする．この時，点 $a\in\mathrm{S}$ で条件付けた *Palm* 測度 μ_a は (K_a,m) で生成される行列式測度になる．ただし K_a は次式で与えられる．

$$K_a(x,y)=K(x,y)-\frac{K(x,a)K(a,y)}{K(a,a)} \tag{3.10}$$

核関数の重要なクラスは $\mathbb{R}$ の直交多項式で与えられる．$w:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ とする．$\{p_m\}_{m=0}^{\mathsf{n}-1}$ を monic(最高次の係数が 1) な多項式の列で p_m は m 次多項式，また測度 wdx に対して直交するとする．この時

$$K^{(\mathsf{n})}(x,y)=\{w(x)w(y)\}^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{\mathsf{n}-1}\frac{p_m(x)p_m(y)}{\int p_m(t)^2w(t)dt} \tag{3.11}$$

とおくと，$K^{(\mathsf{n})}$ は定理 3.1 の条件を満たし，$(K^{(\mathsf{n})},dx)$ で生成される行列式測度が存在する．次の和公式は $\mathsf{n}\to\infty$ を計算する鍵となる[?].

定理 3.3 (Christoffel-Darboux の公式)**.**

$$K^{(\mathsf{n})}(x,y)=\frac{\{w(x)w(y)\}^{\frac{1}{2}}}{\int p_{\mathsf{n}-1}(t)^2w(t)dt}\cdot\frac{p_{\mathsf{n}}(x)p_{\mathsf{n}-1}(y)-p_{\mathsf{n}-1}(x)p_{\mathsf{n}}(y)}{x-y} \tag{3.12}$$

(3.12)から直ちに対角成分の表示を得る．

$$K^{(\mathsf{n})}(x,x)=\frac{w(x)}{\int p_{\mathsf{n}-1}(t)^2w(t)dt}\cdot\{p_{\mathsf{n}}'(x)p_{\mathsf{n}-1}(x)-p_{\mathsf{n}-1}'(x)p_{\mathsf{n}}(x)\} \tag{3.13}$$

測度の対数微分・準 Gibbs 測度　無限体積 Gibbs 測度を Coulomb ポテンシャルに拡張するために 2 つの概念を導入する．以下 $S=\mathbb{R}^d$，μ は S 上の点過程とする．

- $\mathsf{d}^\mu=(\mathsf{d}^\mu_m)_{m=1,\dots,d}$ が次の条件を満たす時，μ の対数微分という[?]:

$$\mathsf{d}^\mu\in\{L^1_{\mathrm{loc}}(\mu^1)\}^d \tag{3.14}$$

$$\int_{S\times\mathsf{S}}\mathsf{d}^\mu fd\mu^1=-\int_{S\times\mathsf{S}}\nabla_xfd\mu^1\quad(\forall f\in C_0^\infty(S)\otimes\mathcal{D}_\circ). \tag{3.15}$$

ただし $\nabla_xf=(\frac{\partial f(x,\mathsf{s})}{\partial x_m})_{m=1,\dots,d}$，$\mu^1$ は (2.18)で定義された 1-Campbell 測度，$\mathcal{D}_\circ$ は S 上の局所的かつ滑らかな関数全体である．対数微分は，直感的には $\mathsf{d}^\mu=\nabla_x\log\mu^1$ であり，一つの

粒子 x (tagged particle) が，他の無限個の粒子 $\mathsf{s}=\sum\delta_{s_i}$ からどのような力を受けるかを表現している．μ が (Φ,Ψ)-カノニカル Gibbs 測度ならば，

$$\mathsf{d}^{\mu}(x,\mathsf{s})=-\nabla_x\Phi(x)-\sum_i\nabla_x\Psi(x,s_i) \tag{3.16}$$

DLR 方程式 (3.5) と異なり，この表記は Ψ が Coulomb ポテンシャルでも無限粒子系に対して意味を持ちうる．sine 点過程や Ginibre 点過程の場合を後で計算する．

- μ が次の条件を満たす時，(Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度という[?]：ある自然数の増大列 $\{b_r\}$ と測度の列 $\{\mu_{r,k}^m\}$ が存在し，各 $r,m\in\mathbb{N}$ に対し $\mu_{r,k}^m$ が次を満たす：

$$\mu_{r,k}^m\le\mu_{r,k+1}^m\quad(\forall k),\quad \lim_{k\to\infty}\mu_{r,k}^m=\mu(\cdot\cap\mathsf{S}_{b_r}^m)\quad\text{weakly,} \tag{3.17}$$

更に $\forall r,m,k\in\mathbb{N}$ と $\mu_{r,k}^m$-a.e. $\mathsf{s}\in\mathsf{S}$ に対して，

$$c_1^{-1}e^{-\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})}1_{\mathsf{S}_{b_r}^m}(\mathsf{x})\Lambda(d\mathsf{x})\le\mu_{r,k,\mathsf{s}}^m(d\mathsf{x})\le c_1e^{-\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})}1_{\mathsf{S}_{b_r}^m}(\mathsf{x})\Lambda(d\mathsf{x}). \tag{3.18}$$

ここで c_1 は $r,m,k,\pi_{\{|x|>b_r\}}(\mathsf{s})$ に依存する正定数，更に

$$\mu_{r,k,\mathsf{s}}^m(d\mathsf{x})=\mu_{r,k}^m(\pi_{\{|x|\le b_r\}}\in d\mathsf{x}|\ \pi_{\{|x|>b_r\}}(\mathsf{s})). \tag{3.19}$$

Λ，$\mathsf{S}_{b_r}^m$，$\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})$ は Gibbs 測度の節で定義されている．

カノニカル Gibbs 測度は準 Gibbs 測度である．Lebesgue 測度を基礎の測度にする行列式測度はすべて準 Gibbs 測度であると期待されるがまだ証明されていない．Yoo[?] により核 K が $0\le\mathsf{K}<1$，つまり固有値 1 を持たない時，行列式測度が Gibbs 測度であることが示されている．しかしランダム行列に関係するものは無限体積において 1 を固有値として含む．尚，sine 点過程や Ginibre 点過程については，準 Gibbs 性が示されている．μ が (Φ,Ψ) 準 Gibbs 測度であり，(Φ,Ψ) が上半連続ならば自然な Dirichlet 形式を用いて μ 可逆な拡散過程が構成できる[?]．

4　東北大学談話会:H25/6/17/月

s:4

:41

$$\widetilde{\mu}_\beta(d\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{i=1}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^{\infty} \beta \log |x_i - x_j|} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \tag{4.1}$$

5　干渉ブラウン運動

s:5

5.1　独立な場合

s:51

d 次元空間 $\mathsf{S} = \mathbb{R}^d$ 内の粒子を考える。以下では $\mathsf{S} = \mathbb{R}$,$\mathsf{S} = \mathbb{R}^2$ の場合が多い。S 内の ∞ 個の粒子を $\mathbf{X}_t = (X_t^1, ...) \in \mathsf{S}^N$ とする。1 粒子系は、ブラウン運動を B_t とすると、オルンシュタイン・ウーレンベック過程として、$dX_t = dB_t - X_t dt$ により定義する。N 粒子系は $(B_t^1, B_t^2, ...B_t^N)$ を $B_0^n = s_n \in S$ を満たす独立な N 個のブラウン運動として、N 個のオルンシュタイン・ウーレンベック過程

:51

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt (i = 1, 2, ..., N) \tag{5.1}$$

を考え、N 個の直積 $(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^N)$ により定義する。自由ポテンシャルによる干渉 Φ:$\mathbf{S} \to \mathbb{R} \cup \infty$ がある場合は

:52

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{1}{2} \nabla(dX_t^i) X_t^i dt \tag{5.2}$$

により定義できる。干渉が無い場合は $N \to \infty$ は易しい。

5.2　干渉があるとき

s:52

干渉 Ψ:$\mathbf{S} \to \mathbb{R} \cup \infty$ について考える。干渉 Ψ の例として以下の 3 つを上げておく。

ex1:hard core

:53

$$\Psi = \begin{cases} \infty & \text{if } |x| < R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.3}$$

ex2:Lemard Jone's 6-12 potential

:54

$$\Psi_{6.12}(x) = \frac{1}{|x|^{12}} - \frac{1}{|x|^6} \tag{5.4}$$

ex3:Coulom potential

:55

$$\Psi_d(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{if d=2} \\ \frac{1}{2-d}|x|^{2-d} & d > 2 \end{cases} \tag{5.5}$$

N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X^{N,1}, ..., X^{N,N})$ について、次の微分方程式を考える。

:56

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \nabla\Psi(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})dt \qquad (iin\mathbb{N}) \tag{5.6}$$

この微分方程式を $\mathbb{N} \to \infty$ のときに解くことを考える。これは無限次元の干渉ブラウン運動を考えていることになる。しかし、$N = \infty$ のときは係数のリプシッツ連続性が確認できないことや確率微分方程式の形が非自明であることが問題である。$\mathbb{N} = \infty$ として考えた確率微分方程式は

:57

$$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty} \nabla\Psi(X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j})dt \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.7}$$

となる。具体的に $\Psi_d(x)$ が 2 次元 Coulomb ポテンシャルの場合を考えると $d \leq 2, 0 < \beta < \infty$ として,

:58

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2}dt \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.8}$$

となり, 特に $d = 1$ の場合は

:59

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}dt \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.9}$$

で与えられる。$d = 1$ の場合は Dyson model になっており,$d = 2$ の場合には Ginibre model になっている。自由ポテンシャルを Φ:$\mathbf{S} \to \mathbb{R} \cup \infty$ とすると 57

:510

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\nabla\Phi(X_t^{N,i})dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \nabla\Psi(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})dt \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.10}$$

で与えられる。例として,$\Phi(x) = x^2$,$\Psi(x) = \log|x|$ の場合は

:511

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i - X_t^{N,i}dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2}dt \tag{5.11}$$

となる。

5.3 対数ガウスとランダム行列

s:53

$\mathbb{R}^N$ の確率測度 m を

:512

$$\begin{aligned} m_\beta^N(d\mathsf{x}) &= \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i-x_j|^\beta \exp\{\frac{-\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}d\mathsf{x}_N \\ &= \frac{1}{Z}exp\{-(\beta\sum_{i<j}^{N}-log|x_i-x_j|)-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}d\mathsf{x}_N \end{aligned} \tag{5.12}$$

と定める。$\beta=2$ の場合は Gaussian unitary ensemble である。$N\times N$ 行列 $M=(M_{ij})$ が以下の 1 から 3 を満たすとする。:513

1. ${}^t\overline{M}_{ij}=M_{ji}(Hermite)$
2. $\{M_{ij}\}_{i<=j}$は独立
3. $M_{ii} \underset{\mathcal{L}}{=} N(0,1)$: 平均 0, 分散 1 の正規分布 $(i=j)$
   $M_{ij} \underset{\mathcal{L}}{=} \frac{G_1+\sqrt{-1}G_2}{\sqrt{2}}$ ここで $G_1 \underset{\mathcal{L}}{=} G_2 \simeq N(1), G_1 \perp G_2 (i<j)$

このとき $m_\beta^N(d\mathsf{x})$ は M の固有値 $(\lambda_1,...,\lambda_N)$ の分布になる。変数変換すると Mehta Random Matirices になる。また、semi-circle law により

:514

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i^N/\sqrt{N}} \Rightarrow \sigma(x)dx, \sigma(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\ |_{(-2,2)}\ (x) \tag{5.13}$$

が従う。これは弱収束である。i.i.d のときの大数の法則と異なるのは interaction の強さが影響していることによる。

5.4 N 粒子系の確率微分方程式と常定分布

s:54

まずブラウン運動の場合を考える。B を d 次元ブラウン運動とする。

:515

$$\varepsilon^{dx}(f,g)=\int_{\mathsf{R}^d}\mathsf{D}\,[f,g]\,dx \tag{5.14}$$

ただし

:516

$$\mathsf{D}\,[f,g]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\nabla f\dot{\nabla}g \tag{5.15}$$

である。次に $(B^1,...,B^N)$ を N 次元ブラウン運動として

:517

$$\varepsilon^{d\mathsf{x}}(f,g)=\int_{(\mathsf{R}^d)^N}\mathsf{D}\,[f,g]\,d\mathsf{x}_N \tag{5.16}$$

ただし

:518
$$\mathsf{D}\left[f,g\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{d}\nabla_n f\dot{\nabla}_n g \tag{5.17}$$

である。ここで operator$\delta_N/2$ について

:519
$$\varepsilon^{d\mathsf{x}}(f,g)=\int_{(\mathsf{R}^d)^N}\mathsf{D}\left[f,g\right]d\mathsf{x}_N=-\int_{(\mathsf{R}^d)^N}\frac{1}{2}\delta_N fgd\mathsf{x}_N \tag{5.18}$$

であることから、$\delta_N/2$ はブラウン運動の generator となる。同じものを log gas について考える。

:520
$$\begin{aligned} m_\beta^N(d\mathsf{x}) &= \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i-x_j|^\beta\exp\{\frac{-\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}d\mathsf{x}_N \\ &= \frac{1}{Z}exp\{\beta\sum_{i<j}^{N}log|x_i-x_j|-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}d\mathsf{x}_N \end{aligned} \tag{5.19}$$

とすると、

:521
$$\varepsilon^{m_\beta^N}(f,g)=\int_{S^N}\mathsf{D}\left[f,g\right]m_\beta^N d\mathsf{x}_N=\int_{S^N}\frac{1}{2}\delta_N fg+\frac{1}{2}\nabla_N f\dot{\nabla}_N m_\beta^N g m_\beta^N d\mathsf{x}_N \tag{5.20}$$

であるため、generator は

:522
$$\mathcal{L}_N=\frac{1}{2}\delta_N+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i\log m_\beta^N\dot{\nabla}_i \tag{5.21}$$

となる。第二項は以下のように書くことができる。

:523
$$\nabla_i\log m_\beta^N \quad =\beta\sum_{j\neq i}^{N}\frac{x_i-x_j}{\mid x_i-x_j\mid^2}-\frac{\beta}{2}x_i \tag{5.22}$$

従って確立微分方程式は

:524
$$dX^{N,i} \quad =dB^i-\frac{\beta}{4}X_t^{N,i}dt+\frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}{\mid X_t^{N,i}-X_t^{N,j}\mid^2}dt \tag{5.23}$$

となる。

5.5 1次元 Bulk スケーリング

s:55

再び $\mathbb{R}^N$ の確率測度 m を対数ガウス

:525
$$m_\beta^N(d\mathsf{x}) = \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i - x_j|^\beta \exp\{\frac{-\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}d\mathsf{x}_N \tag{5.24}$$

とする。このとき

:526
$$\frac{1}{N}(\delta_{\frac{x_1}{\sqrt{N}}} + ... + \delta_{\frac{x_N}{\sqrt{N}}}) \tag{5.25}$$

は収束することが知られている。$\delta_{x_1} + ... + \delta_{x_N}$ の収束性は興味深い。Bulk scaling

:527
$$x_k \mapsto \frac{x_k}{\sqrt{N} - a\sqrt{N}} = \frac{x_k - aN}{\sqrt{N}} \tag{5.26}$$

を考えると、対応する m_β^N は

:528
$$m_\beta^N sin(\mathsf{x}) = \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i - x_j|^\beta \exp\{\frac{-\beta}{4N}\sum_{k=1}^{N}|x_k - aN|^2\}d\mathsf{x}_N \tag{5.27}$$

となる。$X^{N,i} = X^i$ と表すことにすると、確率微分方程式は

:529
$$dX_t^i \quad = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt - \frac{\beta}{4N}(X_t^i - aN)dt \tag{5.28}$$

である。N を十分大きくしたときの振る舞いはどうなるか。右辺第 3 項について X_t^i の部分は 0 となるため、

:530
$$dX_t^i \quad = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt + \frac{\beta a}{4}dt \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.29}$$

となる。

5.6 1次元ソフトエッジスケーリング

s:56

次に soft edge scaling

:531
$$x_k \mapsto \frac{x}{N^{\frac{1}{6}}} + 2N^{\frac{1}{2}} = \frac{x + 2N^{\frac{2}{3}}}{N^{\frac{1}{6}}} \tag{5.30}$$

について考える。この場合の N 次元確率微分方程式を求める。対応する m_β^N が

:532
$$m_\beta^N = \prod_{i<j}^{N}|x_i - x_j|^\beta exp\left\{\frac{-\beta}{4N^{\frac{1}{3}}}\sum_{k=1}^{N}|x_k + 2N^{\frac{2}{3}}|^2\right\} \tag{5.31}$$

で与えられる。対数をとり、x_i による偏微分をすると

:533

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\log m_\beta^N = \beta\sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{x_i - x_j} - \frac{2\beta}{4}\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}(x_i + 2N^{\frac{2}{3}}) \tag{5.32}$$

となることから、確率微分方程式は

:534

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{dt}{x_i - x_j} - \frac{\beta}{4N^{\frac{1}{3}}}X_t^i dt - \frac{\beta}{2}N^{\frac{1}{3}} \tag{5.33}$$

となる。この式について $N \mapsto \infty$ を考えることで無限次元確率微分方程式を得たい。右辺第 3 項は消えるが、第 4 項は発散するためそのままの記述はできない。$N \mapsto \infty$ の場合は $\beta = 1, 2, 4$ について

:535

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\left\{ (\sum_{\substack{i\neq j \\ |x_t^i|<r}}^{N}\frac{1}{x_i - x_j}) - \int_{|x|<r}\frac{\hat{\rho}(x)}{-x}dx \right\} dx \tag{5.34}$$

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1_{(-\infty,x)}(x)}{\pi}\sqrt{-x} \tag{5.35}$$

となる。

5.7 $\hat{\rho}$ の意味

s:57

$\hat{\rho}$ については、変換

:536

$$x \mapsto \frac{x}{N^{\frac{1}{6}}} + 2\sqrt{N} \tag{5.36}$$

の逆を考えることで与えられる。

:537

$$\hat{\rho^N}(x) = N^{\frac{1}{3}}\sigma(\frac{x}{N^{\frac{2}{3}}} + 2) \tag{5.37}$$

ここで $N^1/3$ は

:538

$$\int_{\mathsf{R}}\hat{\rho^N}(x)dx = N \tag{5.38}$$

となるものを選ぶ。

:539

$$\hat{\rho^N}(x) = \frac{1_(-4N^{\frac{2}{3}}, 0)(x)}{\pi}\sqrt{-x(1 + \frac{x}{4N^{\frac{2}{3}}})} \tag{5.39}$$

であるので、

:540

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\rho^N} = \hat{\rho}cptunit \tag{5.40}$$

となる。

6 準備

s:6

6.1 配置空間

s:61

無限粒子系の空間の準備をする。S を可分距離空間、ρ を距離、o を S の原点とする。また S の原点中心, 半径 r の開球を

:61
$$S_r = s : \rho(\mathsf{o}, s) < r \tag{6.1}$$

と表す。S 上の配置空間とは、S の有限個、もしくは集積しない ∞ 個の点の空間である。

:62
$$\mathsf{S} = \left\{ \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} ; s_i \in S \mathsf{S}(S_r) < \infty \forall r \in \mathsf{N} \right\} \tag{6.2}$$

S には vague topology を入れる。つまり C_0 をコンパクトなサポートを持つ関数の集合とすると、

:63
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{S}_n = \mathsf{S} \qquad \Leftrightarrow_{def} lim \int_S f d\mathsf{s}_n = \int f d\mathsf{s} \forall f \in C_0(S) \tag{6.3}$$

により収束を定義する。

l:61
補題 6.1. *S, S を上の用に定義する。このとき以下の 3 つが成立する。*

(1) S が Polish 空間なら S も Polish 空間である。

(2) S が閉集合なら S も閉集合である。

(3) S がコンパクトなら S もコンパクトである。

$(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ 上の確率測度を**点過程** (point process) あるいは確率点場 (random point field) という.

l:62
補題 6.2. *$A \in \mathsf{S}$ A が相対コンパクトである必用十分条件はある相対コンパクト集合の増大列 $\{a_r\}$ が存在し*

:62
$$A \subset \{\mathsf{s} \in \mathsf{S} ; \mathsf{s}(B_r) \leq a_r \ (\forall r)\} \tag{6.4}$$

6.2 密度関数

s:62

m:(S,B(S)) 上のラドン測度とする。A⊂S を可測空間とする。$\pi_A : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ $\pi_A(\mathsf{S}) = \mathsf{S}(\bullet \cap A)$

:d1
定義 6.1. $\sigma_{\mathfrak{A}}^k(x_1, ..., x_k)$ が、μ の m に対する A 上の k-density function とは、$(x_1, ..., x_k)$ に対して、対称で

ただし、$\iota : A^k \to \mathsf{S}$,$\iota(x_1, ..., x_k) = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$,$T \in \pi_A(\mathsf{S})$

$$\int_{\iota^{-1}(T)} \frac{1}{k!}\sigma_A^k(x_1,...,x_k)\prod_{i=1}^{k} m(dx_i) = \mu(\pi_A \in T; S(A)=k) \tag{6.5}$$

定義 6.2. $\rho^k(x_1,...,x_k)$　が μ の m に対する k correlation function とは以下を満たすもの。

$$\int_{A_1{}^{k_1}\times ...\times A_n{}^{k_n}} \rho^k(x_1,...,x_k)\prod_{i=1}^{k} m(dx_i) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{S}(A_i)!}{(\mathsf{S}(A_i)-k_i)!}\mu(d\mathsf{S})\ k_1+...+k_n = kA_i\cap A_j = \phi(i \not j) \tag{6.6}$$

注意 6.1. $n=1 \Rightarrow \int_A \rho(x)m(x) = \int_S \frac{\mathsf{S}(A)!}{(\mathsf{S}(A)-1)!}\mu(d\mathsf{S}) = E^{\mu}[\mathsf{S}(A)]$

注意 6.2. $\mu(\mathsf{S}(S)=n)=1 \Rightarrow$

$A=S$ とおくと $\int_{S^n}\rho^n(x_1,...,x_n)\prod_{i=1}^{n} m(dx_i) = n!$

定義 1 より

$$\frac{1}{n!}\int_{S^n} \sigma_S^n \pi m(dx_i) = 1 \tag{6.7}$$

のため、

$$\sigma_S^n \pi m(x_1,...,x_n) = \rho^n(x_1,...,x_n) \tag{6.8}$$

注意 6.3. A を固定する。σ_A^n は $ds_1,....,ds_n$ 上に 1 つずつ粒子があり、それ以外には無い。ρ^n は $ds_1,....,ds_n$ 上に 1 つずつ粒子があり、他の場所にはあってもなくてもよい。

補題 6.3. $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!}\int_{A^k}\rho_k\prod_{i=1}^{k} m(dx_j))^{\frac{-1}{k}} = \infty for \forall m(A)<\infty$

$\Rightarrow \{\rho^n\}$ を *correlation function* にもつランダム確率関数 μ が一意に存在する。

補題 6.4. $x_k = (x_1,...,x_k)\in S^k, \forall m(A)<\infty$ に対し

1. $\rho^k(x_1,...,x_k) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int_{A^j}\sigma_A^{k+j}(x_{k+j})\prod_{l=1}^{j} m(dx_{k+l})$
2. $\sigma_A^k(x_k) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\int_{A^j}\rho_A^{k+j}(x_{k+j})\prod_{l=1}^{j} m(dx_{k+l})$

6.3　確率点場 (RPF) の 3 つの範疇:Poisson/周期/Strict Coulomb

[1] Poisson　RPF

m:S 上のラドン測度とする。

定義 6.3. S 上の確率点場 μ が intensity m をもつ Poisson　RPF とは

1. $\forall A_1,...,A_k \in B(S), A_i\cap A_j \not\phi(i \not j)$,　$\mathsf{S}(A_1),...,\mathsf{S}(A_k)$ が独立

2. $\mu(\mathsf{S}(A)=n)=e^{-m(A)}\frac{m(A)^n}{n!}(n=0,1,...)$

$S=R^d$,$m=$Lebesgue 測度 m のときは Λ と表す。S 上の Lebesgue 測度と思うことができる。また、最もランダムな平行移動不変な確率測度である。

$$\tau_a:\mathsf{S}\to\mathsf{S},\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i}\mapsto\tau_a\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i+a} \tag{6.9}$$

[2] periodic　RPF

最も決定的な確率測度である。$S=R^d$ をベクトル空間、$v_1,...,v_d$ を独立なベクトルとする。T をトーラスとして、m を $v_1,...,v_d$ で張られる T の一様分布とする。また、$\mathsf{s}_0=\sum_{z\in z^d}\delta_{z_1v_1+...z_dv_d},z=(z_1,...,z_d)$ とする。μ が periodic measure とは

$$\mu=m\circ\tau^{-1} \tag{6.10}$$

ただし $\tau:T\to\mathsf{S}$ は $t\in T$ に対して $\tau_t\mathsf{S}_0$ を対応させる写像である。

[3] periodic　RPF

R^d,Φ_d であるとする。

$$\mu\sim\frac{1}{z}\exp\left[-\sum_{i<j}^{\infty}\Phi_d(x_i-x_j)\right]\prod_{k=1}^{\infty}dx_k \tag{6.11}$$

Ginibre RPF はこれにあたる。

6.4　ポテンシャルとハミルトニアン

$\Psi(x,y):S\times S\to R\cup\{\infty\}$,$\Psi(x,y)=\Psi(y,x)$ を相互作用とする。$\Phi(x):S\to R\cup\{\infty\}$ は自由ポテンシャル。さてハミルトニアン

$$\mathcal{H}(\mathsf{s})=\sum_i\Phi(s_i)+\sum_{i<j}\Psi(s_i,s_j) \tag{6.12}$$

$$\mu^{\Phi,\Psi}=\frac{1}{z}e^{-\mathcal{H}(\mathsf{s})}\prod_i ds_i \tag{6.13}$$

を考えたい。$\#\mathsf{s}=\infty$ の場合は全く形式的なものである。しかし、$S=R^d$ では $\mathcal{H}$ は意味が取れない。そこで、条件付確率で定義する。

$$r\in N,\pi_r(\mathsf{S})=\mathsf{S}(\cdot\cap S_r),S_r=\{|x|<r\},\forall m\in N \tag{6.14}$$

$$\mu(\pi_r\in\cdot|\pi_r^c(\mathsf{S})=\pi_r^c(\xi))=\mu_{r,\xi}^m \tag{6.15}$$

定義 6.4. $\forall r, m \in N, \mu - a.s.\xi$ について

$$\mu_{r,\xi}^{m} = \frac{1}{Z_{r,\xi}^{m}} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}} d\Lambda_{r,\xi}^{m} \tag{6.16}$$

ただし、

$$\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \Psi_r(\mathsf{s}, \xi) \tag{6.17}$$

$$\Psi_r(s, \xi) = \sum_{s_i \in S_r, \xi \notin S_r} \Psi(s_i, \xi_j) \tag{6.18}$$

$$\mathcal{H}_r = \sum_{s_i \in S_r} \Phi(s_i) + \sum_{s_i \in S_r, i<j} \Psi(s_i, s_j) \tag{6.19}$$

μ を DLR 方程式という。μ が (Φ, Ψ)-canonical Gibbs 測度とは、μ-a.s. ξ に対して上の式を満たすこと。

$\Phi = 0$ の場合を考える。

Ruelle's class potential

(super stable) $\Psi(x) = \Psi_1 + \Psi_2, \Psi_1 : \mathit{stable}, \Psi_2 \geq 0 : \mathit{continuous}, \Psi''(0) > 0$

(stable) $\sum_{i<j}^{N} \Psi(x_i - x_j) \geq -C_1 N$

(regular) $\exists \phi_1, \phi_2 \downarrow, \exists R > 0, \int_R^\infty \phi_i(t) t^{d-1} dt < \infty$

$\Rightarrow \phi_1(|x|) \leq \Psi(x) \forall x \in S, \Phi(x) \leq \psi_2(|x|), \exists R \leq |x|$

ここで regular の前提は、DLR 方程式に意味を持たせるために必要である。

1

$$\Psi(x) = \begin{cases} \infty |x| < R \\ 0 \text{ その他} \end{cases} \forall d \in N \tag{6.20}$$

2

$$\Psi_{6,12}(x) = c\{\frac{1}{|x|^{12}} - \frac{1}{|x|^{6}}\}(c > 0) d = 3 \tag{6.21}$$

3

$$\Psi_{\alpha,\beta} = \beta |x|^{-\alpha} (\alpha > d d \in N) \tag{6.22}$$

注意 6.4. $\alpha = 0 \to$ の場合は Coulomb に対応する。これは、

$$\nabla \Psi_{\alpha,\beta} = \alpha\beta \frac{X}{|X|^{\alpha+2}} \tag{6.23}$$

であることによる。$\Psi_{\alpha,\beta}$ は Coulomb ポテンシャルに似ているが、本質的には異なるものである。

7 Airy,Sine,Ginibre RPF

s:7

7.1 DRPF

s:72

S を巨大な対象にすると、もっと様々な rpf があるはず。

:d1

定義 7.1. (determinantal RPF)

:1

$$K : S \times S \to C, m : Radonmeasure, \mu : S \text{ の } RPF \text{ とする。} \tag{7.1}$$

$$\mu \text{が} (K, m) - determinantalRPF \tag{7.2}$$

$$\Leftrightarrow \mu \quad \text{の } m \text{ に対する } n - correlationfunction\{p^n\}_{n \in N} \text{が } p^n(x) \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \tag{7.3}$$

:T1

定理 7.1. *(Soshinikov Shirai-Takahashi)*

1 $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$

2 $0 \leq K \leq I$

3 $K : locallytraceclassonL^2(S, dm)$

$\Rightarrow (K, m) - DRPF$ が一意に存在する。

(R ,dx) について、例を与える。

例 1 $\boldsymbol{Airy_2}$RPF($\boldsymbol{\beta = 2}$)

$\boldsymbol{A_i(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos(\frac{t^3}{3} + xt)dt, y\prime\prime - xy = 0}$ の解

$\boldsymbol{K_{A_i,2}(x, y) = \frac{A_i(x)A_i\prime(y) - A_i\prime(x)A_i(y)}{x - y}}$

例 2 $\boldsymbol{Sine_2}$RPF($\boldsymbol{\beta = 2}$)

$\boldsymbol{K_{sin,2}(x, y) = \frac{sin\{\pi(x-y)\}}{\pi(x-y)}}$

- $\boldsymbol{A \subset R^d}$ 回転不変

  $\boldsymbol{K(z) = \frac{1}{2\pi}\int_A e^{iz\zeta}d\zeta}$

  $\boldsymbol{\to K(x, y) = K(x - y)}$ は DRPF

- $\boldsymbol{d = 1}$ のとき $\boldsymbol{A = [-\pi, \pi] \to K(z) = \frac{sin\pi z}{\pi z}}$ $\cdots$ Dyson'smodel

- 直交多項式 $\boldsymbol{\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}}$ m をラドン測度とする。

  $\boldsymbol{\varphi_n}$n 次多項式

$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\overline{varphi_n(y)}$

$\Rightarrow SpecK_N \in \{0,1\}$

これは

:2
$$\int \{ \int K_N(x,y)\varphi(y)m(dy)\}\overline{\varphi}(x)m(dx) \tag{7.4}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int \varphi_n(x)\overline{\varphi}(x)m(dx)\overline{\int \varphi_n(y)\overline{\varphi(y)}m(dy)} \tag{7.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (\varphi_n, \varphi)_m \overline{(\varphi_n, \varphi)_m} \tag{7.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |(\varphi_n, \varphi)_m|^2 \le |\varphi|_m^2 \tag{7.7}$$

であることによる。

7.2 GinibreRPF の定義

s:73

GinibreRPF を定義する。

$K : C \times C \to C$

$K(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2}{2} - \frac{|y|^2}{2}} e^{x\overline{y}}$

このとき、$0 \le K \le Id$ である。これは以下により得られる。$e^{x\overline{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\overline{y})^n}{n!}$ より、$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{pi}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ とおくと $K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(y)$ である。明らかに $\int_C \varphi_m \overline{\varphi}_n dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \not n \end{cases}$ であることから従う。

:r21
注意 7.1. 上では $m = dx$ ととったが、$g(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}, m = gdz$ ととると、$K_g(x,y) = e^{x\overline{y}}$ となる。

μ:Ginibre RPF とは、n-correlation ρ^n が

$\rho^n(x_1, ..., x_n) \det[K(x_i, x_j)]_{1 \le i,j \le n}$

で与えられるもの。 例えば

$\rho^1(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{1}{\pi}$

$\rho^2(x,y) = (\frac{1}{\pi})^2 - \frac{1}{\pi^2} e^{-(|x|^2+|y|^2)+x\overline{y}+\overline{y}x} = \pi^{-2} - \pi^{-2} e^{-|x-y|^2}$

7.3 N 粒子系

s:74

Ginibre RPFμ は次の N 粒子系近似をもつ。

$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(x\overline{y})^n}{n!}$

$\rho_N^n(x_1, ..., x_n) = \det[K_N(x_i, x_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$

μ_N:対応する分布

$\mu_N(\mathsf{S}(C) = N) = 1$

Ginibre ensemble

$M = [a_{ij}]$

$a_{ij} = b_{ij} + \sqrt{-1}c_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ を iid

$\frac{1}{\pi}e^{-|b_{ij}|^2-|c_{ij}|^2}db_{ij}dc_{ij}$

このとき、M の固有値の分布が μ_N

μ_N は C^N 上の Lebesgue 測度に対して、密度 σ^N を持つ。

$$\sigma^N(x_1, ..., x_N) = const e^{-\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^2 \tag{7.8}$$

7.4　N 粒子系のＳＤＥ表現

$$\partial_{x_i} log \sigma^N = \partial_x log e^{-\sigma |x_i|^2} \Pi |x_i - x_j|^2 \tag{7.9}$$

$$= -2X_i + \sum_{j \neq i} \frac{2(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^2} \tag{7.10}$$

$$\{dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \sum_{j \neq i}^N \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt (1 \leq i \leq N) \tag{7.11}$$

ここで、$N \to \infty$ とすると、期待していたものと異なる形

$$\{dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \sum_{j \neq i}^\infty \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt (i \in N) \tag{7.12}$$

7.5　DetRPF の Palm 安定性

定理 7.2. *(Shitrai-Takahashi)*

$$\mu = \det RPF \textit{ with } (K, m), K(a, a) > 0 \tag{7.13}$$

$$\Rightarrow \mu_a = \mu(\cdot - \delta_a | S(a) \geq 1) \text{ もまた } DetRPF \tag{7.14}$$

$$K_a(x, y) = K(x, y) - \frac{K(x, a)K(a, y)}{K(a, a)} \tag{7.15}$$

定理 7.3.

- *$Airy_\beta$, $Sine_\beta RPF$* $(\beta = 1, 2, 4)$ は, $\beta \log |x|$*-quasi Gibbs measure*

- $Ginibre_{\mathbf{2}}\boldsymbol{RPF}$ は $\boldsymbol{\beta}\log|\boldsymbol{x}|$-*quasi Gibbs measure*

注意 7.2.

$$\boldsymbol{\mu_{r,\xi}^{m}(dx_m) \sim c_{r,\xi}^{m} e^{-\sum_{i<j}^{m} \beta \log|x_i - x_j|} dx_m} \tag{7.16}$$

quasi Gibbs では、局所有界な free potential は 0 で置き換えてよいことが多い。

問題 7.2. • 全ての detRPF は quasi Gibbs measure

- 0≤K<Id i.e. $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{spec(K)} < \mathbf{1}$

  $\Rightarrow\boldsymbol{\mu}$ は Gibbs measure

7.6 unlabeled diffusion

8 small fluctuation と quasi Gibbs 性

9

10

11

12

13

	SG (確率幾何)	SD (確率解析)
1	q. Gibbs.	unlabeled dyn. .. ∞ コ の Br. m. を 動かせる.
2.	$\mathrm{Cap}(\mathfrak{S}_{\mathrm{mult}}) = 0$, $\int \rho\, dx <$.	Non-collision & Non-explosion ⇒ labeled dyn
3.	Log der.	SDE 表現 ⇒ mart. prob. ∞次元 Lyons-Zheng. TP の Ito formula.
4.	tail triviality & Tail uniqueness	Strong sol. ∃1
5	Palm 分解 & Palm coupling	Dyn. rigidity or subdiffusive behavior

No.

H25. 名古屋大・東北大

0 ・SDE. ・Airy.
・背景 Lang - Coulomb pot - R.M. TDL dynamical.

1 Set up RPF. det. RPF, 小∞次元と大きな∞次元

2 準Gibbs性 (Airy II の paper)

3 SDE表現 : log 微分

4 Flow sol. 木

5 Tail Theorems. 全

1　　4

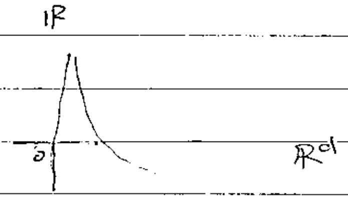
2　　5

3　　6

東北大 談話会

Ginibre interacting Brownian motions

· 2D Coulomb pot.



$$\Psi_2(x) = -\log|x| \qquad \text{repulsive}$$

$\beta > 0$: 逆温度　　$\beta\Psi_2 = -\beta\log|x|$.

· $\nabla\Psi_2(x) = -\dfrac{x}{|x|^2}$.

· Interacting Br. m. with $\beta\Psi_2$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ($\beta=2$. Ginibre IBMs)

$$1^\circ \quad dX_t^i = dB^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\,dt \qquad (i\in\mathbb{N}).$$

$\mathbb{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \quad) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ ← 巨大な無限元空間

· チャップマン・コロモゴロフ方程式 $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ で解く.

$$2^\circ \quad \frac{\partial}{\partial t}P(t,x,dy) = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i + \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\right\}.$$

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_{i,1}} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_{i,2}} . \qquad x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i,1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i,2}}\right).$$

Prob　1°, 2° をとき、性質を調べる.

定常分布：確率幾何 (S.G.).

直観的： $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ 上の "prob. m."

$$3^\circ \quad \tilde{\mu}_\beta(dx) \cong \frac{1}{Z}\prod_{i=1}^{\infty} e^{\sum_{j\neq i}^{\infty}\beta\log|x_i-x_j|}\overbrace{\prod_{k=1}^{\infty}dx_k}^{dx}$$

$$= \frac{1}{Z}\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{\infty}|x^i-x^j|^\beta\cdot dx$$

◯ $1^\circ, 2^\circ$ の導出：

$$\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\,\tilde{\mu}_\beta(dx) = \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\frac{1}{Z}\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{\infty}|x^i-x^j|^\beta\,dx.$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}} -\left[\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\beta\left(\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{x^i-x^j}{|x^i-x^j|^2}\right)\right] g\ \tilde{\mu}_\beta(dx).$$

- 3° の構成は非自明 ← Gibbs m. の理論が使えない.
  $\beta = 2$ のときだけ determinantal RPF.

◯ $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ は大きすぎる ⇒ $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}} \xrightarrow[\text{perm.}]{u} (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}/\text{perm} \supseteq \mathsf{S}$ 　 $u((s_i)) = \sum_i \delta_{s_i}$ unlabel. map.

- $\mathbb{R}^2$ の config sp.
- $\mathsf{S} = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}\ ;\ \mathsf{s}(D_r) < \infty\ \ \forall r\in\mathbb{N}\}$, $D_r = \{|x| < r\}$

  Vague topology … Polish sp.

- $(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ 上の p.m. μ (random point field, RPF).
- μ の n-correlation fun. ρ^n w.r.t. $\lambda(dx)$ … $\mathbb{R}^2$ の Radon meas.

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_m^{k_m}}\rho^n(x_1,\dots x_n)\,\lambda^n(dx_n) = \int_{\mathsf{S}}\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!}\,d\mu$$

$k_1+\cdots+k_m = n$, $A_i\cap A_j = \phi$ $(i\neq j)$.

Def μ: $\mathbb{R}^2$ の RPF が Ginibre RPF とは.
μ の $g(dx) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2} dx$ に対する n-cor. fun ρ^n が

$$\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{n}$$

ただし. $K(x, y) = e^{x \cdot \bar{y}}$ ($x, y \in \mathbb{C}$ とみなす).

$\mathfrak{l}: S \to (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ label. map. $\mu \circ \mathfrak{l} = \mu^{\mathfrak{l}}$: $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ 上の prob. m.

Th 1 For $\mu^{\mathfrak{l}}$-a.s. $\mathfrak{s} = (s_i)$, 4° は一意的強解をもつ.

$$4° \quad dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| \le r \\ i \ne j}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt$$

$$\mathbb{X}_0 = \mathfrak{s}$$

Cor 対応する C-K eq. がとける.

First Dyn. rigidity

Th 2 4° の sol. は 次の eq の一意的強解

$$5° \quad dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{|X_t^j| \le r \\ j \ne i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt.$$

より. 一般に, $\forall c \in \mathbb{R}^2$ に対して.

$$\left(6° \quad dX_t^i = dB_t^i - (X_t^i - c) dt + \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{|X_t^j - c| < r \\ j \ne i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt. \right)$$

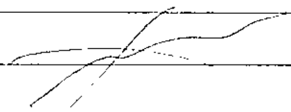
Pf は 一般論 の example.

- ある eg (d≥2) Ruelle's class pot.
- Dyson. Airy. Bessel. ――

集中講義で話す.

無限次元の submanifold.

∘ $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ or $\mathfrak{S}$. の "subset"



・信じられない

$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu^n$ ‥ n粒子系. $g(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2}$ とし.

$$\mu^n = \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j|^2 \cdot \prod_{k=1}^{n} g(x_k)\, dx_k$$

$\Rightarrow \mathbb{X}^n = (X^{n,1}, \ldots, X^{n,n})$.

$$dX_t^{n,i} = dB_t^i - X_t^{n,i}\,dt + \sum_{j\neq i}^{n} \frac{X_t^{n,i} - X^{n,j}}{|X_t^{n,i} - X_t^{n,j}|^2}\,dt$$ ‥ むしろ 5° が自然.

☆ 4° は完全に中立的.

$\ell : \mathfrak{S} \to (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ ラベル. $\mu(\cdot \mid \ell^i = a,\ s(a) \geq 1) \prec \mu_a \quad (\forall i, \forall a)$

$X_t^{i_0}$: tagged particle. $X_0^{i_0} = x$. $\sum_{j\neq i_0} \delta_{X_t^j} \approx \mu_x$ ‥ Palm.

Second Dyn rigidity

Th 3 $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon X^{i_0}_{t/\varepsilon^2} = 0$ μ-a.s. ε

注. $d \geq 2$. 亜: Ruelle's class ⇒ limit は非退化.

2006 年の conj.

third Dyn rigidity

Th 4 (Ornstein-Uhlenbeck trapping).

$$\sup_{0\leq t<\infty} |X_t^i - O_t^i| < \infty$$

where $\begin{cases} dO_t^i = dB_t^i - (O_t^i - \hat{X}^i)\,dt, \\ O_0^i = \hat{X}^i \end{cases}$ $\hat{X}^i = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u X_t^i\,dt$ a.s.

$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m) \in (\mathbb{R}^2)^m$

reduced Palm measure

$$\mu_{\mathbf{x}} = \mu(\cdot - \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_j} \mid \xi(\{x_j\}) \geq 1)$$

(O.-Shirai)

Th 4 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^2)^m$, $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^2)^n$

(1) $m \neq n \Rightarrow \mu_{\mathbf{x}} \perp \mu_{\mathbf{y}}$

(2) $m = n \Rightarrow \mu_{\mathbf{x}} \underset{ab.cont}{\sim} \mu_{\mathbf{y}}$.

$(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}/\text{perm.} = \sum_{m=0}^{\infty} \textcircled{H}_m \qquad \mu_{\mathbf{x}}(\textcircled{H}_m) = 1 . \qquad \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^2)^m$.

(3) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^2)^m \Rightarrow \exists b_r \uparrow \infty$

① $$\frac{d\mu_{\mathbf{x}}}{d\mu_{\mathbf{y}}}(\xi) = \frac{1}{Z_{\mathbf{x}\mathbf{y}}} \lim_{r\to\infty} \prod_{|s_i| < b_r} \frac{|\mathbf{x} - s_i|^2}{|\mathbf{y} - s_i|^2} \qquad \xi = \sum_i \delta_{s_i}.$$

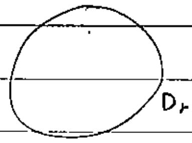
($|\mathbf{x} - s_i|^2 = \prod_{j=1}^{m} |x_j - s_i|^2$)

② $$Z_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \frac{\Delta(\mathbf{w})}{\Delta(\mathbf{z})} \frac{\det[K(z_i, z_j)]_{i,j=1}^{m}}{\det[K(w_i, w_j)]_{i,j=1}^{m}}$$

($\Delta(\mathbf{w}) = \prod_{1 \leq j < k \leq m}^{m} |w_i - w_j|^2$

30

5ナ



Th 5 (Peres - Ghosh).

μ の下で、 $\underset{\{|x|<r\}}{D_r}$ の外で $\xi = \sum \delta_{s_i}$ と条件つけると、

$\mu(\cdot \mid \pi_{D_r^c}(\xi) = \pi_{D_r^c}(\xi))$ -a.s. に $\xi(D_r) = {}^{\exists_1} m$。

Th6 (O.). $x \in (\mathbb{R}^2)^m$

$$\mu = \int_s \sigma_s^m (d\underline{x}_m) \, \mu_x (d\underline{s}).$$

ただし、 $\sigma_s^m(\underline{x}_m)$ は、 $\{\xi : \xi(\mathbb{R}^2) = m\}$ 上の prob. m.

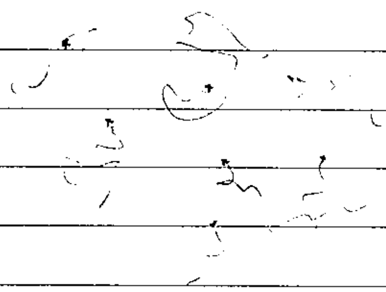
$$\sigma_s^m \prec \prod_{i=1}^m dx_i \qquad \left(\frac{1}{m!} \text{ の factor はさておき}\right)$$

$$\sigma_s^m(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{r \to \infty} \frac{\prod_{1 \le |s_i| \le r} |x - s_i|^2 \prod_{j=1}^m g(x_j)\, dx_j}{\int_{(\mathbb{R}^2)^m} \prod_{1 \le |s_i| \le r} |x - s_i|^2 \cdots \prod_{i=1}^m g(x_j)\, dx_i}$$

更に、 $\sigma_{\tau_a s}^m (x_1 + a, \ldots, x_m + a) = \sigma_s^m (x_1, \ldots, x_m)$.

$$\tau_a s = \sum_i \delta_{s_i + a}$$

- $S = \mathbb{R}^d,\ (0, \infty)$, $S = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$
- S 内の ∞ 個の粒子 $\mathbb{X}_t = (X_t^1, \dots) \in S^{\mathbb{N}}$.
- 1 粒子系: Br. B_t. OU pr. $dX_t = dB_t - X_t\, dt$
- N 粒子系:
- Br. m (理想気体).
- $(B_t^1, \dots, B_t^N)$. $B_0^n = s_n \in S$



独立な N 個の Br. m

- N - OU. $\{ dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\, dt$ $(i = 1, 2, \dots N)$

  $(X_t^1, \dots, X_t^N)$: 直積 $\uparrow$ $\Phi(x) = x^2$
- $\Phi : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $\{ dX_t^i = dB_t^i - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)(X_t^i)\, dt$.

  ‥ free pot.
- $N \to \infty$ は易しい (interaction がなければ)
- $S = \mathbb{R}^2$ のときに. シミュレーション.

・ $\Phi : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. interaction.

ex 1 hard core

$$\Phi = \begin{cases} \infty & |x| < R \\ 0 & \end{cases}$$

$\Phi(x-y)$

ex 2 Lennard - Jones's 6-12 pot. (d = 3, ...)

$$\Phi_{6.12}(x) = \frac{1}{|x|^{12}} - \frac{1}{|x|^{6}}$$

ex 3 $\Phi_d(x) = -\log|x|$ (2-dim Coulomb)

$$= \frac{1}{2-d}|x|^{2-d} \quad (\text{ d-dim Coulomb pot }).$$

・ N 粒子系 $\mathbb{X}^N = (X^{N,1}, \ldots, X^{N,N})$.

★N $$dX_t^{N,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \nabla\Phi(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})\,dt$$

$N \to \infty$ のときに．☆を解く（Interacting Br. m. in infinite-dim.）
$N = \infty$ のとき．係数のLipsが？．そもそも．SDE の形が非自明

☆∞ $$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j\neq i}^{\infty} \nabla\Phi(X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j})}_{\text{イミは問題！}}\,dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

ex. Φ_d : 2D Coulomb. $d \leq 2$, $0 < \beta < \infty$

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2}\,dt$$

$$(d=1 \Rightarrow) \quad = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}\,dt.$$

(d=1 ⇒ Dyson model, d=2 ⇒ Ginibre)

$N \to \infty$ としたい

$\Phi : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ free pot.

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i - \frac{1}{2}\nabla\Phi(X_t^{N,i})\,dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \nabla\Psi(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})\,dt.$$

ex $\Phi = x^2$. $\Psi = \log|x|$. $d = 2$.

→ シミュレーション

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i - X_t^{N,i}\,dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2}\,dt$$

$N = \infty$ のとき,

78' 79' Lang $\Phi = 0$. $\Psi \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$, 'super stable'.

stationary sol.

'87 Fritz $\Phi = 0$. $\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$: , $d \le 4$.

" Non equibrium sol "

'96? Tane.

→ シミュレーションをみせる

$\mathbb{R}^N$ の prob m.

$$m^N_\beta(dx_N) = \frac{1}{Z}\left\{\prod_{i<j}^{N}|x_i-x_j|^\beta\right\} e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2}\, dx_N$$

$$= \frac{1}{Z}\, e^{-\left(\beta\sum_{i<j}^{N}-\log|x_i-x_j|\right)-\left(\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\right)}\, dx_N$$

• $\beta = 2$. GUE

N×N 行列

$$M = \begin{bmatrix} & & \\ & M_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

① ${}^t\overline{M_{ij}} = M_{ji}$ (Hermite)

② $\{M_{ij}\}_{i\le j}$ は独立

③ $M_{ii} \overset{d}{=} N(1)$ … 標準正規分布. 平均0 分散1 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$.

$i<j$ $M_{ij} \overset{d}{=} \frac{G_1+\sqrt{-1}\,G_2}{\sqrt{2}}$　　$G_1 \overset{d}{=} G_2 \overset{d}{=} N(1)$, $G_1 \perp G_2$

m^N_β は M の固有値 $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ の分布.

… 変数変換 → Mehta "Random Matrices"

• semi-circle law

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i^N/\sqrt{N}} \underset{\text{weakly}}{\Longrightarrow} \sigma(x)\,dx, \quad \sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\; 1_{(-2,2)}(x)$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の p.m. として.

i.i.d. の大数の法則とはちがう

interaction の強さ!

- Br. m の場合:

B : d dim. Br.m.

$$\mathcal{E}^{dx}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{D}[f,g]\,dx.$$

$\mathbb{R}^d$ の nabla.

ただし. $\mathbb{D}[f,g] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\nabla f \cdot \nabla g.$

$L^2(\mathbb{R}^d, dx)$

$\frac{1}{2}\Delta_N \leftrightarrow$

$$\mathcal{E}^{dx}(f,g) = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \mathbb{D}[f,g]\,dx_N = -\int_{(\mathbb{R}^d)^N} \left(\frac{1}{2}\Delta_N f\right) g\, dx_N$$

- $(B^1, \dots, B^N)$: $N \cdot$ dim Br.m.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}^{dx}(f,g) &= \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \mathbb{D}[f,g]\,dx_N \\ \mathbb{D}[f,g] &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \nabla_n f \cdot \nabla_n g.\end{aligned}\right] \longrightarrow \quad L^2((\mathbb{R}^d)^N, dx_N). \quad \cdots \ \frac{1}{2}\Delta_N f \quad \text{generator}.$$

$\xleftarrow{S^N}$

$L^2((\mathbb{R}^d)^N, dx_N).$

- 同じことを. log gas で考える$_N$

$$m_\beta^N(dx_N) = \frac{1}{Z} e^{\beta\sum_{i<j}\log|x_i - x_j| - \frac{\beta}{4}\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2}.$$

$$\mathcal{E}^{m_\beta^N}(f,g) = \int_{S^N} \mathbb{D}[f,g]\, m_\beta^N(x)\,dx, \quad L^2(S^N, dx_N).$$

$$= \int_{S^N} \frac{1}{2}\Delta_N f \cdot g + \frac{1}{2}\nabla_N f \cdot \frac{\nabla_N m_\beta^N}{m_\beta^N} \cdot g\ m_\beta^N\, dx_N.$$

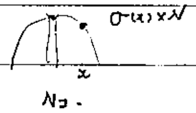
生成op. $\mathcal{L}_N = \frac{1}{2}\Delta_N + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \nabla_i \log m_\beta^N \cdot \nabla_i.$

$$\nabla_i \log m_\beta^N = \beta\sum_{j\neq i}^{N} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^2} - \frac{\beta}{2}x_i.$$

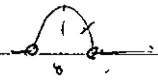
$\Rightarrow$ SDE:

$$dX^{N,i} = dB^i - \frac{\beta}{4}X_t^{N,i}\,dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2}\,dt$$

$$m_\beta^N = \frac{1}{Z} \prod_{i<j}^{N} |x_i - x_j|^\beta \cdot e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2} \, dx_N$$



$$\frac{1}{N}\left(\delta_{\frac{x_1}{\sqrt{N}}} + \cdots + \delta_{\frac{x_N}{\sqrt{N}}}\right) \Rightarrow$$



- $\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_N}$ が収束しないか？
- Bulk scaling

$$x_k \longrightarrow \frac{x_k}{\sqrt{N}} - a\cdot\sqrt{N} = \frac{x_k - aN}{\sqrt{N}}$$

- $m^N_{\beta,\sin}(x) = \frac{1}{Z} \prod_{i<j}^{N} |x_i - x_j|^\beta \cdot e^{-\frac{\beta}{4}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |x_k - aN|^2} \, dx$
- N 粒子 SDE: $X^{N,i} = X^i$ と表す。

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{dt}{X_t^i - X_t^j} - \frac{\beta}{4N}\cdot(X_t^i - aN)\,dt. \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

$\to 0$ と残る

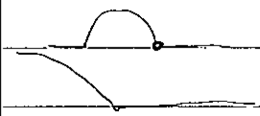
$N \to \infty$ はどうなるか。

1° $dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\,dt + \frac{\beta a}{4}\,dt \qquad (i \in \mathbb{N})$

… は正しいか？

Ans. Yes & No. 1° のイミ。

$$m_\beta^N = \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^N |x_i-x_j|^\beta e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^N |x_k|^2} dx_N .$$



を中心とする scaling.

- $$x \mapsto \frac{x}{N^{1/6}} + 2N^{1/2} = \frac{x+2N^{2/3}}{N^{1/6}}$$

- N - SDE

$$\to m^N_{\beta,\mathrm{Ai}} = \prod^N |x_i-x_j|^\beta e^{-\frac{\beta}{4}\frac{1}{N^{1/3}}\sum_{k=1}^N |x_k+2N^{2/3}|^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\log m^N_{\beta,\mathrm{Ai}} = \beta\sum_{j\neq i}^N \frac{1}{x_i-x_j} - \frac{\beta\cdot 2}{4}\frac{1}{N^{1/3}}\left(x_i+2N^{2/3}\right)$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^N \frac{dt}{X_t^i-X_t^j} - \frac{\beta}{4N^{1/3}}X_t^i dt - \underbrace{\frac{\beta}{2}N^{1/3}}_{\text{発散}} dt$$

- Prob. $N\to\infty$ の ISDE は何か?

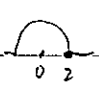
$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^\infty \frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt - \frac{\beta}{2}\times\infty\, dt$$

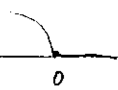
- Ans. $(\beta=1,2,4)$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\left\{\left(\sum_{\substack{j\neq i\\ |X_t^j|<r}}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}\right) - \int_{|x|<r}\frac{\hat\rho(x)}{-x}dx\right\}dt$$

$$\hat\rho(x) = \frac{1_{(-\infty,0)}(x)}{\pi}\cdot\sqrt{-x}$$

- 理由: rescaled semi circle





$x \mapsto \frac{x}{N^{1/6}} + 2\sqrt{N}$ の逆.

$$\hat{\rho}^N(x) = N^{1/3}\,\sigma\left(\frac{x}{N^{2/3}} + 2\right)$$

$N^{1/3}$ は $\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}^N(x)\,dx = N$ となるようにえらぶ

$$\hat{\rho}^N(x) = \frac{1_{(-4N^{2/3},0)}(x)}{\pi}\sqrt{-x\left(1 + \frac{x}{4N^{2/3}}\right)}$$

$\therefore$ $\lim_{N\to\infty} \hat{\rho}^N = \hat{\rho}$ cpt uni

$\star$ $$N^{1/3} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\rho}^N(x)}{-x}\,dx$$

$\therefore$ $$dX_t^i \cong dB_t^i + \frac{\beta}{2}\left\{\left(\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\right) - N^{1/3}\right\}dt$$

$$\simeq dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\left\{\left(\sum_{\substack{j\neq i \\ |X_t^j|<r}}^{N} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\right) - \int_{|x|<r} \frac{\hat{\rho}^N(x)}{-x}\,dx\right\}$$

$$\simeq dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\left\{\left(\quad " \quad\right) - \int_{|x|<r} \frac{\hat{\rho}(x)}{-x}\,dx\right\}$$ //

話さない.

$\beta=2$. 代数的構成 (space-time correlation fun). No. 1.9

$N=\infty$ の St. Dyn. は. (以上は $\beta=1,2,4$) だが. $\beta=2$ は. 代数的構成

Spohn, Johansson. Katori-Tanemura, Nagao-Forrester,

$Ai(x)$

$H = -\frac{\partial}{du^2}$

$-\frac{d^2}{du^2}$

・1D とちがい. 代数的方法がつかえない.

・$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$$m^N(x_N)\,dx_N = \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i - x_j|^2 \cdot e^{-\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2}\,dx_N$$

・N 粒子系:

$$\nabla_i \log m^N = 2\cdot\sum_{j\neq i}^{N}\frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^2} - 2x_i.$$

N 粒子系:

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\,dt + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\,dt \qquad (i=1,2,\dots,N)$$

$N\to\infty$ $m^N dx_N$ は exists.

$N\to\infty$. SDE は?

① $$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\,dt + \lim_{r\to\infty}\sum_{\substack{|X_t^j|<r\\ j\neq i}}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\,dt$$

② $$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i - X_t^j|<r}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\,dt.$$

③ ∞ 次元の sub mfd 上を動く.

2. set up

2.1 1. 配置空間

No. K

2-1

無限粒子系の空間の set up.

- S : sep. met. sp. ρ : 距離 o : 原点.

$S_r = \{ s : \rho(o, s) < r \}$.

- S 上の配置空間とは S の有限もしくは集積しない点の空間

$\mathfrak{S} = \{ \mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i} ; \ s_i \in S, \ \mathfrak{s}(S_r) < \infty \ \forall r \in \mathbb{N} \}$.

$\mathfrak{S}$ には vague top. i.e.

$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{s}_n = \mathfrak{s} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim \int_S f \, d\mathfrak{s}_n = \int f \, d\mathfrak{s}$ for $\forall f \in C_0(S)$ (cpt support)

Lem. 1 (see Res)

1) S : 完備可分 $\Rightarrow$ $\mathfrak{S}$: 完備可分.

2) : closed $\Rightarrow$: closed

3) : cpt $\Rightarrow$: cpt.

Def $(\mathfrak{S}, \mathcal{B}(\mathfrak{S}))$ 上の prob. m. を random point field (RPF) or point process (PP) という.

Lem 2 (Res[ ])

$A \subset \mathfrak{S}$

A : relative cpt $\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}\{a_r\}, \uparrow$ $A \subset \{ \mathfrak{s} \mid \mathfrak{s}(S_r) < a_r \ (\forall r) \}$.

2 density fun.

No. K

2-2

m : $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の Radon meas.

$A \subset S$, m'ble sp

$\pi_A : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $\pi_A(s) = s(\cdot \cap A)$

Def (density fun.)

$\sigma_A^k(x_1, \dots, x_k)$ が、μ の m に対する A 上の k-density fun とは、$(x_1, \dots, x_k)$ に対して対称で

1° $$\int_{\iota^{-1}(\Pi)} \frac{1}{k!} \sigma_A^k(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^{k} m(dx_i)$$

$$= \mu(\pi_A \in \Pi \ ; \ s(A) = k)$$

ただし $\iota : A^k \to \mathfrak{S}$, $\iota(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$, $\Pi \in \pi_A(\mathfrak{S})$

Def (correlation fun)

$\rho^k(x_1, \dots, x_k)$ が μ の m に対する k-cor. fun. とは、

2° $$\int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_n^{k_n}} \rho^k(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^{k} m(dx_i)$$

$$= \int_{\mathfrak{S}} \prod_{i=1}^{n} \frac{s(A_i)!}{(s(A_i) - k_i)!} \mu(ds)$$

$k_1 + \dots + k_n = k$, $A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j)$

注 1° $n = 1 \Rightarrow \int_A \rho^1(x) m(x) = \int_S \frac{s(A)!}{(s(A)-1)!} \mu(ds) = E^{\mu}[s(A)]$

2° $\mu(s(S) = n) = 1 \Rightarrow A = S$ とおくと] ex2 Tohoku

$$\int_{S^n} \rho^n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} m(dx_i) = n!$$

1° より $\frac{1}{n!} \int_{S^n} \sigma_S^n \prod m(dx_i) = 1 \ \therefore \ \sigma_S^n(x_1, \dots, x_n) = \rho^n(x_1, \dots, x_n)$] ex3 Tohoku

No. K

2 − 3

3° A : fix σ_A^n は $ds_1 \cdots ds_n$ 上に1つずつ粒子があり、それ以外にない。ρ^n は $ds_1 \cdots ds_n$ 上に1つずつ粒子があり、他の場所には、あってもなくてもよい

Lem. 3 (Lenard) see [Soshi], 925p

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_{A^k} \rho_k \prod_{j=1}^{k} m(dx_j) \right)^{-\frac{1}{k}} = \infty \quad \text{for } \forall\, m(A) < \infty$$

⇒ $\{\rho^n\}$ を cor. fun にもつ r.p.f. μ が一意に存在する.

Lem. 4. $\forall\, m(A) < \infty$ に対し. $x_k = (x_1, \ldots, x_k) \in S^k$

1° $$\rho^k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{A^j} \sigma_A^{k+j}(x_{k+j}) \prod_{l=1}^{j} m(dx_{k+l})$$

2° $$\sigma_A^k(x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_{A^j} \rho_{k+j}(x_{k+j}) \prod_{l=1}^{j} m(dx_{k+l})$$

ex ①

2. RPF の 3つの Category. Poisson, Periodic, Strict Coulomb RPFs. No. T3-4 K

(I) Poisson RPF

。 m : $\mathfrak{S}$ 上の Radon meas.

(最も random)

Def $\mathfrak{S}$ 上の r.p.f. μ が intensity m. m をもつ Poisson r.p.f. とは

1) $\mathfrak{s}(A_1) \cdots \mathfrak{s}(A_k)$ が indep for $\forall A_1 \cdots A_k \in \mathcal{B}(S)$, $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$

2) $\mu(\mathfrak{s}(A) = n) = e^{-m(A)} \dfrac{m(A)^n}{n!}$ $(n = 0, 1, \cdots)$

。 $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^d$. m = Lebesgue m. $\Rightarrow \Lambda$ と表す.

∴ $\mathfrak{S}$ 上の「Lebesgue meas.」と思う.

。 最もランダムな平行移動不変な p.m

$\tau_a : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$. $\mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i} \longmapsto \tau_a \mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i + a}$ …平行移動.

(II) periodic r.p.f. (最も deterministic)

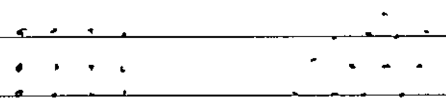
$\mathfrak{S} = \mathbb{R}^d$. (ベクトル sp).

$v_1, \cdots, v_d$: indep. vector

m : $v_1 \cdots v_d$ で張られる T の一様分布.

T : トーラス

$$\mathfrak{s}_0 = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_{z_1 v_1 + \cdots + z_d v_d} \qquad z = (z_1, \cdots, z_d)$$



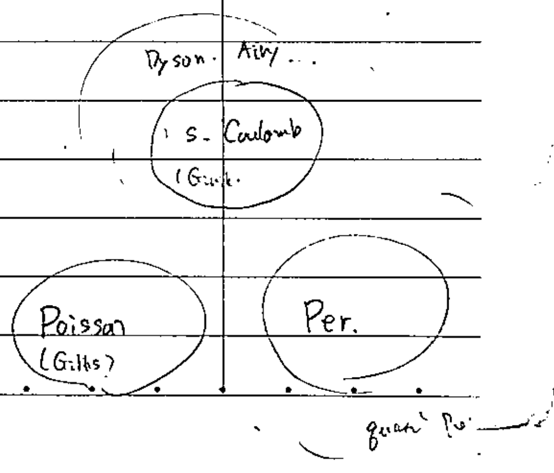
μ が, periodic measure とは.

$\mu = m \circ \tau^{-1}$ ただし $\tau : T \to \mathfrak{S}$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \mapsto \tau_x \mathfrak{s}_0$:

(III) (strict) Coulomb RPF : $\mathbb{R}^d$. Ψ_d.

$$\mu \sim \frac{1}{Z} \exp\left[- \sum_{i<j}^{\infty} \Psi_d (x_i - x_j) \right] \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$$

例は. Ginibre RPF.



- $\Psi(x, y) : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$.

  相互作用.

- $\Phi(x) : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Free pot. (self-pot.)

- Hamiltonian: ($\#s = \infty$ なら全く形式的に).

$$\mathcal{H}(s) = \sum_i \Phi(s_i) + \sum_{i<j} \Psi(s_i, s_j).$$

$$\mu^{\Phi, \Psi} = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}(s)} \prod_i ds_i$$

を。考えたい。しかし。$S = \mathbb{R}^d$ では。$\mathcal{H}$ はイミがない

- cond. prob. で定義する。 … DLR eq.

$r \in \mathbb{N}$ 　 $\pi_r(s) = s(\cdot \cap S_r)$ 　 $S_r = \{|x| < r\}$. $\forall m \in \mathbb{N}$.

$$\mu(\pi_r \in \cdot \mid \pi_r^c(s) = \pi_r^c(\xi)) =: \mu_{r,\xi}^m$$

Def $\forall r, m \in \mathbb{N}$. μ-a.s. ξ.

$\times$ S_r 上の PRM. の S_r^m への制限

1° $$\mu_{r,\xi}^m = \frac{1}{Z_{r,\xi}^m} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}} d\Lambda_r^m$$

ただし. $\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \Psi_r(s, \xi)$, $\Psi_r(s, \xi) = \sum_{s_i \in S_r, \xi_j \notin S_r} \Psi(s_i, \xi_j)$

$$\mathcal{H}_r = \sum_{s_i \in S_r} \Phi(s_i) + \sum_{\substack{s_i \in S_r \\ i<j}} \Psi(s_i, s_j),$$

1° を DLR eq. という

Def μ が (Φ, Ψ)-canonical Gibbs m. とは. μ-a.s. ξ に対し. 1° をみたすこと.

$\Phi = 0$.

Ruelle's class pot.

1° (super stable) $\Phi(x) = \Phi_1 + \Phi_2$, Φ_1: stable, $\Phi_2 \geq 0$, cont. $\Phi_2''(0) > 0$. | $\Phi(x) \geq -\exists C_3$ [下に有界]

(stable) $\sum_{i<j}^{N} \Phi(x_i - x_j) \geq -C_1 N$

2° (regular) $\exists \varphi_1, \varphi_2 \downarrow \ \exists R > 0$

$\int_R^\infty \varphi_2(t)\, t^{d-1}\, dt < \infty$

$\Rightarrow \varphi_1(|x|) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in S, \quad \Phi(x) \leq \varphi_2(|x|), \ \exists R \leq |x|$

例 1 $\Phi(x) = \begin{cases} \infty & |x| < R \\ 0 & \end{cases}$ Hard core ball. $\forall d \in \mathbb{N}$

2 $\Phi_{6,12}(x) = c\left\{ \dfrac{1}{|x|^{12}} - \dfrac{1}{|x|^6} \right\}$ $(c > 0)$. $(d = 3)$

3 $\Phi_{\alpha,\beta} = \beta\, |x|^{-\alpha}$ $\quad (\alpha > d \quad d \in \mathbb{N})$

注 $\alpha = 0 \rightarrow$ Coulomb に対応

$\nabla \Phi_{\alpha,\beta} = \alpha\beta \dfrac{x}{|x|^{\alpha+2}}$ となる

☆ 2° は DLR eq に イミをもたせるため必要.

$\Phi_{\alpha,\beta}$ は Coulomb pot に似ている。が本質的にちがう.

3. Airy, Sine, Ginibre RPF

3.1 DRPF

No. K

このままにする.

- S: 巨大な対象で. もっと様々な RPF があるはず.

Def (determinantal RPF). [Mochi. Soshnikov, Shirai-Takahashi]

$K: S \times S \to \mathbb{C}$, m: Radon. m. μ: S の RPF

μ が (K, m)-determinantal RPF $\Leftrightarrow$

μ の m に対する n-cor. fun $\{\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\rho^n(x) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

Th. 1 (Soshnikov, Shirai-Takahashi)

1° $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$,

3° K: locally trace class on $L^2(S, dm)$　K を L^2 op とみなし $\forall$ cpt set A 上で tr. class

2° $0 \le K \le I$

$\Rightarrow$ (K, m)-DRPF が一意に存在する.

$(\mathbb{R}, dx)$.

例 1 Airy_2 RPF $(\beta = 2)$

$$Ai(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \quad y'' - xy = 0 \text{ の解.}$$

$$K_{Ai,2}(x,y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai'(x)Ai(y)}{x-y}$$

例 2 Sine_2 RPF $(\beta = 2)$

$$K_{sin,2}(x,y) = \frac{\sin\{\pi(x-y)\}}{\pi(x-y)}$$

・ $A \subset \mathbb{R}^d$. 回転不変.

$K(z) = \frac{1}{2\pi}\int_A e^{iz\xi}\, d\xi$.

$\Rightarrow$ $K(x,y) = K(x-y)$ は DRPF

・ $d=1$. $A = [-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ $K(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$ -- Dyson's model.

・ 直交多項式 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$　　m : Radon meas.

φ_n : n 次多項式.　$\int |\varphi_n|^2 m(dx) = 1$, $\int \varphi_n \bar{\varphi}_m m(dx) = 0$ $(m \neq n)$.

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$$

$\Rightarrow$ Spec $K_N \in \{0, 1\}$

∵) $\int \{\int K_N(x,y)\, \varphi(y)\, m(dy)\}\, \bar{\varphi}(x)\, m(dx) = \sum_{n=0}^{N-1} \int \varphi_n(x) \bar{\varphi}(x) m(dx) \cdot \overline{\int \varphi_n(y) \bar{\varphi}(y) m(dy)}$

$D.. = \sum_{n=0}^{N-1} (\varphi_n, \varphi)_m \cdot \overline{(\varphi_n, \varphi)_m} = \sum_{n=0}^{N-1} |(\varphi_n, \varphi)_m|^2 \leq |\varphi|_m^2$

・ Dyson (Sine), Airy, Bessel. -- 1次元系.

注　固有値が 0 or 1 の場合が おもしろい.

ex 3　Ginibre RPF

$K : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2}{2}-\frac{|y|^2}{2}} \cdot e^{x\bar{y}}$$

L. 2

$0 \le K \le \mathrm{Id}$

∵) $e^{x\bar{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\bar{y})^n}{n!}$ より. $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-|x|^2/2} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$. とおくと

∴ $K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\bar{\varphi}_n(y)$

明らかに. $\int_{\mathbb{C}} \varphi_m \bar{\varphi}_n \, dx = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m\neq) \end{cases}$ より,,

注. 上 は. $m = dx$. と て, たが, $g(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, で $m = g\,dz$ ととると. $K_g(x,y) = e^{x\bar{y}}$ となる.

Def 1　μ : Ginibre RPF とは. n-correl. ρ^n が..

$$\rho^n(x_1 \ldots x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{1\le i,j\le n}.$$

ex.　$\rho^1(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{1}{\pi}$　∴ 1.

$$\rho^2(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{\pi^2} e^{-(|x|^2+|y|^2)+x\bar{y}+\bar{y}x}$$

$$= \pi^{-2} - \pi^{-2} e^{-|x-y|^2}$$

$$\gamma^2(x,y) = \pi^{-2} \cdot e^{-|x-y|^2}$$

• Gin. RPF μ は 次の N粒子系近似 をもつ

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(x\bar{y})^n}{n!}$$

$$\rho_N^n(x_1,\cdots,x_n) = \det[K_N(x_i,x_j)]_{1\le i,j\le n}$$

μ_N : 対応する分布.

• $\mu_N(S(\mathbb{C}) = N) = 1$　　ex

• Ginibre ensemble.

$a_{ij} = b_{ij} + \sqrt{-1}\, c_{ij}$.　$b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$

$M = [\ a_{ij}\ ]$. iid. $\frac{1}{\pi} e^{-|b_{ij}|^2 - |c_{ij}|^2} db_{ij}\, dc_{ij}$

このとき. M の固有値の分布が μ_N .　　Mehta

• μ_N は $\mathbb{C}^N$ 上の Lebesgue m. に対して density σ^N をもつ

$$\sigma^N(x_1,\dots,x_N) = \text{const.}\ e^{-\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2} \prod_{1\le i<j\le N} |x_i - x_j|^2$$　← なぜ　check

•

N 粒子系の SDE 表現

No.

3.5

∘ $\partial_{x_i} \log \sigma^N = \partial_x \log e^{-\Sigma |x_i|^2} \prod |x_i - x_j|^2$

$$= \left[-2x_i + \sum_{j \neq i} \frac{2(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^2} \right]$$

∴

∘ $\left\{ dX_t^i = dB_t^i - X_t^i \, dt + \sum_{j \neq i}^{N} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} \, dt. \quad (1 \le i \le N) \right.$

∴ ここで $N \to \infty$ とすると、期待していたものと異なる形

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

↑ 1日目ここまで

Det RPF の Palm 安定性.

Th. (Shirai - Takahashi).

μ = det RPF. with (K, m), $K(a,a) > 0$.

$\Rightarrow \mu_a = \mu(\cdot - \delta_a \mid \mathfrak{s}(a) \geq 1)$ もまた Det RPF.

$$K_a(x,y) = K(x,y) - \frac{K(x,a)K(a,y)}{K(a,a)}$$

レポート問題 　　難.

Th 3. ・ Airy$_\beta$ Sine$_\beta$ RPF $(\beta = 1, 2, 4)$ は $\beta \log|x|$ - quasi Gibbs m 　　See [60] [59] の書き直し.

・ Ginibre$_2$ RPF は 〃

注. $\mu^m_{r,\mathfrak{s}}(dx_m) \sim c^m_{r,\mathfrak{s}} \cdot e^{-\sum_{i<j}^{m} \beta \log|x_i - x_j|} dx_m$.

q. Gibbs は loc. bdd な free pot. は 0 でおきかえてよいことが多い.

Pf. 難: small fluctuation + Coulomb. pot → Harnack ineq.

Prob ・ すべての det RPF は quasi - Gibbs m.

・ $0 \leq K \lneq \mathrm{Id}$. i.e. $0 \leq \mathrm{spec}(K) < 1$

$\Rightarrow$ μ は "Gibbs m". Yoo. [37]

◎ ρ^n の意味

◎ ρ^n と σ_A^n の関係

L.1 (以下の積分・級数が意味をもつとき) $x_i = (x_1, \ldots, x_i) \in S^i$

1° $\rho^i(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{A^j} \sigma_A^{i+j}(x_{i+j}) \prod_{k=1}^{j} m(dx_{i+k})$

2° $\sigma_A(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_{A^j} \rho^{i+j}(x_{i+j}) \prod_{k=1}^{j} m(dx_{i+k})$

ex. 示せ.

Lebel 1 quasi - Gibbs
= 2 log derivative
= 3 tail theorem & flow sol.
unlabeled diffusion = 4 Palm 分解、Palm coupling. No. 3-5

(1)

unlabeled diffusion の構成

- S. $\mathsf{S} = \{ \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} : \mathsf{s}(K) < \infty \ (\forall K : cpt) \}$

$\mathsf{X}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i}$

Prob S に RPF μ = given.
μ-reversible diffusion X をいかに構成するか？

- S - 値 Br. m の場合.

$\mathbb{B} = (B^1, B^2, \cdots)$ $S^{\mathbb{N}}$-値 Br m (iid)

$\mathsf{B}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{B_t^i}$

- $\mathbb{B}$ を Diri f で構成する.

Λ = dx を intensity とする Poisson RPF.

$\mathcal{D}_0$: S 上 local, smooth fun.

f : $\sigma[\pi_K]$ - m'ble $\forall K$: cpt (local)

$f \longleftrightarrow f^{(1)}(x_1), f^{(2)}(x_1, x_2) \cdots$

$f^{(i)}$: symmetric. (perm. inv)

$f^{(i)}$ are smooth in $(x_1, \cdots, x_n)$. | $f^{(\infty)}(x_1, x_2 \cdots)$ 一度に表せる.

(x_i) : perm inv.

- 注：強い制約.

$\mathcal{E}^{\Lambda}(f, g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f, g] \Lambda(d\mathsf{s})$.

$\mathbb{D}[f, g](\mathsf{s}) = \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\partial f^{(\infty)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f^{(\infty)}}{\partial x_i} \right)$

注 有限和、s として、イミをもつ.

Π: dx を intensity とする Poisson RPF (2)

Br. m.

$$\begin{array}{cc} \underline{S} & S \\ \mathbb{B} \longleftrightarrow \Lambda \ \text{up to const.} & B \longleftrightarrow dx \\ \updownarrow \quad \swarrow\!\!\nearrow & \uparrow \quad \swarrow\!\!\nearrow \\ \mathbb{D} & D \end{array}$$

- $(\mathbb{B}, \mathbb{D}) \longrightarrow \Lambda$ ◎ 拡散過程 (diffusion) の定義.
- $(\mathbb{B}, \Lambda) \longrightarrow \mathbb{D}$ ◦ conti.
- $(\mathbb{D}, \Lambda) \longrightarrow \mathbb{B}$: $F_{\mathbb{D}}$: ◦ strong Markov.

$F_{\mathbb{D}}$. ◎ μ-reversible . μ: prob. m. ---

Σ の p.m. 全体 $\mathcal{P}(\Sigma)$ ← Σ-値 reversible diffusion

$F_{\mathbb{D}} : \mathcal{P}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\Sigma)$

$F_{\mathbb{D}}(\Lambda) = \exists\{P_s^{\pi}\}$ と解釈したい.

Prob

この $F_{\mathbb{D}}$ を $\mathcal{P}(S)$ の subset で定義し,

$F_{\mathbb{D}}(\mu_{Ai,\beta})$, $F_{\mathbb{D}}(\mu_{Scr,\beta})$, $\in \mathrm{Diff}(\Sigma)$ を示す.

$\mathcal{P}_{\mathbb{D}}(\Sigma)$ Dirichlet form theory.

$$\mu \longmapsto F_{\mathbb{D}}(\mu) \xrightarrow{\text{closable}} T_t^{\mu} \xrightarrow{\text{quasi-regular}} \{P_s^{\mu}\}$$

non negative bilinear form $\mathcal{D}_0$: loc. smooth fun

μ の条件

(A1) $\rho^1 \in L^1_{loc}(S, dx)$, $\sigma_r^k \in L^2(S_r^k, dx_k)$

(A2) μ is (Φ, Ψ)-q. Gibbs m. with ...:
upper semi-continuous (Φ, Ψ).

Th 4 ([16], [21], [60], [25], [26]).
(A1) & (A2) $\Rightarrow$ $\{P_s^\mu\}$: unlabeled diffusion が ∃!.

Cor. Airy, Sine, Ginibre rpf の unlabeled diffusion が
∃する.

Prob : これを labeled diffusion $S^{\mathbb{N}}$-値 にする.
= SDE 表現

4. small fluctuation & quasi Gibbs 性.

4.1 small fluctuation

No.

4-1

$\mathsf{S} = \mathbb{C}$.

$B_r = \{ |z| < r \}$.

・ $\mathsf{s}(B_r) = B_r$ 内の粒子の数

・ $\mathrm{Var}^{\Delta}[\mathsf{s}(B_r)] = O(r^2)$ ・ここd より.

・ ν = periodic meas.

$\mathrm{Var}^{\nu}[\mathsf{s}(B_r)] = \text{const.}$ (if $d=1$)

r 境界のorder.

周r. 0.8 $\quad p\, n^2 + (1-p)(n+1)^2 - (pn + (1-p)(n+1))^2$

μ: d-dim. trans. inv. $\Rightarrow \underset{V_r}{\mathrm{Var}^{\mu}[\mathsf{s}(B_r)]} = r^{\alpha}$. $\alpha < d$ を. small fluctuation

例 $K_A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_A e^{iz\xi}\, d\xi$. $A = [-L, L]^d \Rightarrow V_L \sim (\text{const.} \log L)$? $L^{d-2}\log L$ だったた気がする.

色々な人に色々計算できる. $\begin{cases} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + \frac{1}{n^{r}}] \Rightarrow V_L \sim L^{\frac{1}{r}} \\ d=1 \quad r>1 \end{cases}$

Th. 1 (Shirai [ ]).

μ = Gin $\Rightarrow \mathrm{Var}^{\mu}[\mathsf{s}(D_r)] \sim \frac{r}{\sqrt{\pi}}$

∴ small fluctuation.

Th 1' (Shirai - O. [ ]) $\quad q \in \mathbb{Z}$, $\exists \alpha > 0$, $\exists \beta \in \mathbb{C}$ const.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$

$\sup_{|z| = r} |f(z) - \beta| = O(r^{-\alpha}) \quad r \to \infty$

$\Rightarrow \mathrm{Var}^{\mu}[\langle \mathsf{s}, 1_{D_r} e^{\sqrt{-1}\, q \arg z} f(z) \rangle] = O(r^{\max\{1, 2-2\alpha\}}) \quad (r \to \infty)$

Th 1'' μ^N = gin N-粒子近似.

$\sup_N \mathrm{Var}^{\mu^N}[\langle \mathsf{s}, 1_{D_r} e^{\sqrt{-1}\, q \arg z} f(z) \rangle] = O(r^{\max\{1, (2-2\alpha)\}})$

準Gibbs性　　No. 4-2

- DLR eq を思い出す。

2D Coulomb pot. の難しさは、DLR eq. がないこと。

cor. fun. だけでは、先に進まない。

- ② ・、・、この粒子がどう動くのか！ を知りたい、①SD をつくりたい。

$Q_r = \{|x|<r\}$,　$\pi_r = \pi_{Q_r}$　π_r^c　$\pi_{Q_r^c}$

- $\mu_{r,\xi}^m = \mu(\pi_r \in \cdot \mid \pi_r^c(s) = \pi_r^c(\xi))$　$s(S_r)=m$)

$\sigma_{r,\xi}^m$ その density fun.

- $\mu_{r,\xi}$ が dz に対し density をもつかどうかは、非自明。
- periodic RPF は もたない。 ← ex②

- $\mathfrak{S}_r^m = \{ s \in \mathfrak{S} ;\ s(S_r) = m \}$
- $\mu_r^m = \mu(\cdot \cap \mathfrak{S}_r^m)$
- (Φ, Ψ) - can. Gibbs m. $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\mu(\mathfrak{S}_r^m)} \mu_r^m$ の m densty が

$$\sigma_{r,s}^m(x) = \frac{1}{Z_{r,s}^m} e^{-\mathcal{H}_r - \Psi_r(x,s)}, \quad \text{for } \mu\text{-a.s. } s$$

$$\mathcal{H}_r = \sum_{i=1}^m \Phi(x_i) + \sum_{i<j}^m \Psi(x_i, x_j),$$

$$\Psi_{r,s} = \sum_{x_i \in S_r,\ s_j \notin S_r} \Psi(x_i, s_j)$$

◎ もし $\Psi(x,y) = -\beta \lg|x-y|$ $\Rightarrow$

$\sum_j \Psi(x_i, s_j)$ は 発散 する

Def (quasi-Gibbs meas.)

μ は (Φ, Ψ)-quasi Gibbs meas. if

$\exists \{b_r\}$: $b_r \uparrow \infty$ $b_r \in \mathbb{N}$

$\exists \{\mu^m_{r,k}\}_{m,r,k \in \mathbb{N}}$ s.t

1° $\mu^m_{r,k} \le \mu^m_{r,k+1}$ for $\forall k \in \mathbb{N}$,

2° $\lim_{k\to\infty} \mu^m_{r,k} = \mu^m_r$ weakly

3° $\mu^m_{r,k}$-a.e. $s \in \mathfrak{S}$ に対し, $\exists c = c(r,m,k,\pi_{S_r^c}(s))$, $S_r = \{|x| < b_r\}$

$$c^{-1} \cdot e^{-\mathcal{H}_r(x)} \le \sigma^m_{r,k,s}(x) \le c\, e^{-\mathcal{H}_r(x)} \quad (\forall x \in S_r^m)$$

ただし, $\sigma^m_{r,k,s}$ は $\mu^m_{r,k,s}$ の density.

例 ① can. Gibbs $\Rightarrow$ q. Gibbs.

② Ginibre RPF, Dyson's model, Bessel RPF (Airy RPF maybe).

注 ① $\exists\, \mathfrak{S}_{r,k} \subset \mathfrak{S}_{r,k+1} \subset \cdots \uparrow \mathfrak{S}$

$$\mu^m_{r,k} = \mu(\cdot \cap \mathfrak{S}^m_{r,k})$$ のことが多い.

(Q.1) $\exists \mu^N$ on $\mathfrak{S}$ の RPF s.t.

(1) μ^N の n-cor. fun. ρ_N^n が次をみたす.

1° $\lim \rho_N^n = \rho^n$ a.e.

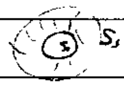
2° $\sup_N \sup_{S_r^n} |\rho_N^n| \le \{c n^{\delta}\}^n$, c: const. $\delta < 1$.

(2) $\mu^N(s(S) \le n_N) = 1$ $\quad {}^{\exists} n_N \in \mathbb{N}$ ··· 有限個

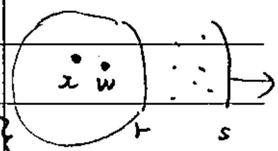
(3) μ^N: (Φ^N, Ψ) - can. Gibbs meas.

(4) 1° $\lim_{N\to\infty} \Phi^N = \Phi$ a.e., $\quad \inf_{N\in\mathbb{N}, x\in S} \Phi^N(x) > -\infty$

2° $\Psi \in C^1(S\times S \setminus \{x=y\})$ $\quad \inf_{x,y\in S_r} \Psi(x,y) > -\infty$



• $\Psi_{rs}(x, \mathsf{y}) := \sum_{x_i \in S_r} \sum_{y_j \in S_s \setminus S_r} \Psi(x_i, y_j) \quad (\mathsf{y} = \sum \delta_{y_j})$



⋆ $\mathbb{H}_{r,k} = \{\mathsf{y} \in \mathfrak{S} : \sup_{r<s} \sup_{x\neq w \in S_r} \dfrac{|\Psi_{rs}(x,\mathsf{y}) - \Psi_{rs}(w,\mathsf{y})|}{|x-w|} \le k\}$.

(Q.2) $\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_N} \mu^N(\mathbb{H}_{r,k}) = 0 \quad (\forall r \in \mathbb{N})$.

• tightness の類似. ただし Ψ を考慮する.

• なぜ $|r. s|$ とわけるか ··· 条件収束だから.

Th. 1

(Q.1), (Q.2) $\Rightarrow$ μ は quasi Gibbs meas.

Coulomb pot の場合.　　　　No. 4-5

(Q.3)　$\Phi(x, y) = -\beta \log|x-y|$　$(\beta \in \mathbb{R})$.

(Q.4)　$d=1,2$, かつ $\exists \ell_0 \in \mathbb{N}$ s.t.　　2次元以下のみ考える。

1°　$\sup_{N\in\mathbb{N}} \int_{1\le|x|<\infty} |x|^{-\ell_0} \rho_N^1(x)\,dx$.

2°　$\lim_{r\to\infty} \sup_{N\in\mathbb{N}} \left[\int_{\{r<|x|\}} |x|^{-2\ell} \overset{\text{cor fun.}}{\rho_N^1}\,dx - \int_{\{r<|x|,|y|\}} \bar{x}^{-\ell} y^{-\ell} \rho_N^2\,dxdy \right] = 0$

for all $\ell < \ell_0$.　　$\bar{x}$ は $\frac{1}{\bar{x}} = \frac{x}{|x|^2}$ in $\mathbb{C}$

特に. 1次元の log gas ただちに check できる.

Th. 2　(Q.1), (Q.3), (Q.4) ⇒ μ: quasi Gibbs m.

Th. 3　Ginibre RPF は, quasi Gibbs m

∵)　$\ell_0 = 3$ として. Th. 2 を用いる

(Q.4) 2° は直接は難しい.

small fluctuation th. Th. 4.1" を,

$\langle \xi, 1_{\{|z|<r\}} e^{\sqrt{-1}\,\ell \arg z} \left(\frac{\lceil |z| \rceil}{|z|}\right) \rangle$

に適用し. 少し工夫する.　　$\lceil a \rceil$ = a をこえた最小の整数.

注.　Th 3 + general th. ⇒ μ-reversible diffusion $X_t = \sum \delta_{X_t^i}$ ができる.

$\mathfrak{S}$ 上の D.f を用いて diffusion を作りたい

・ $S = \mathbb{R}^d$.

$f : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$.

・ local . f is $\sigma[\pi_r]$ m'ble $^\exists r$ ($\pi_r = \mathfrak{s}(\cdot \cap \{|x|<r\})$)

・ smooth : $\tilde{f}$ = smooth , ただし $\tilde{f}(x_1, \cdots)$ 対称.

かつ $f(s) = \tilde{f}(s_1, s_2, \cdots)$ 　 ($s = \sum_i \delta_{s_i}$)

$\mathcal{D}_0 = \{ f : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, local, smooth, cpt support $\}$.

$\mathbb{D}[f, g](s) = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_m}\right)(s_1, \cdots) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial s_m}\right)(s_1, \cdots)$ 　 $s = \sum_i \delta_{s_i}$

$\mathcal{E}^\mu(f, g) = \int_{\mathfrak{S}} \mathbb{D}[f, g] \, d\mu$

$F : \mu \xmapsto{\mathbb{D}} (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_0, L^2(\mu)) =: F(\mu)$

$\mathfrak{S}$ 上の p.m

Th. 1 　　[O. 10].

(A.1) μ は loc. bdd n-correl. fun をもつ ($^\forall n \in \mathbb{N}$)

(A.2) μ : (Φ, Ψ) - quasi Gibbs m ,

(A.3) (Φ, Ψ) は upper semi cont .

$\Rightarrow$ $F(\mu)$ は closable

Th 2 　 $F(\mu)$ は closable $\Rightarrow$ closure $\overline{F}(\mu)$ は quasi regular D. sp. 　　[O. 96]

Cor 　 (A.1) $-$ (A.3)

$\Rightarrow$ μ - reversible diffusion (X_t, P_s) が存在する.

$(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}, L^2(\mu))$: 対応する unlabeled diffusion.

$\{P_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s} \in \mathsf{S}_0}$: S_0 は X_t の state space,

(S1) $P_{\mathsf{s}}(X_t^i \neq X_t^j \ \ \forall i \neq j, \ \forall t > 0) = 1$ (Non Collision)

(S2) $P_{\mathsf{s}}(\sup_{0 \le t \le u} |X_t^i| < \infty \ \ \forall u, i \in \mathbb{N}) = 1$ (Non explosion)

$\mathfrak{l}$: initial lavel. $\mathfrak{l}(\sum_{\lambda} \delta_{s_\lambda}) = (s_1, s_2, \cdots)$

例 Airy の $x_1 > x_2 > \cdots$. Dyson と Gin は itai.

T41

(S1) (S2) $\Rightarrow$ $\mathbb{X}_t = (X_t^1, \cdots) \in C([0,\infty); S^{\mathbb{N}})$ well defined. ($\mathfrak{l}_{path}$)

又. $P_{\mathfrak{l}(\mathsf{s})} \circ \mathfrak{l}_{path}^{-1}$ は $S^{\mathbb{N}}$ の subset 上の diffusion.

注 X は μ-reversible だが, $\mathbb{X}$ は $\mu \circ \mathfrak{l}^{-1}$-rev. とは限らない (むしろならない)

Pf 初期ラベルが (S1) (S2) で保存されるから //

diff. - -

| S-値 強 Markov.

| $\mathsf{S} \to \mathbb{S}$ は 出発点 のラベルによるから.

S の Markov 性は.

$\underline{S}_1 = \{ s \in \underline{S} : s(\{x\}) = 0, 1 \quad (\forall x \in S) \}$

(S.1′)　$\mathrm{Cap}(\underline{S}_1) = 0$.　　は せつめい ... $A = \inf_{A \subset O} \mathrm{Cap}(O)$　$\mathcal{E}^\mu(f, f) + \|f\|^2_{L^2(\mu)}$

Lem 4.2　　$\mathrm{Cap}(O) = \inf \{ \mathcal{E}^\mu_1(f, f)$

(S1) ⟺ (S1′)　　: $f \geq 1$ on O, μ-a.e., $f \in \mathcal{D}^\mu$ }.

0. 近似 ⟷ (Lang.近似)

- $\mathcal{D}_{0r} = \{ f \in \mathcal{D}_0 : f$ is $\sigma[\pi_{S_r}]$-m'ble }.

$\mathcal{E}_r = (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu_r, L^2(\mu))$,　$\mathcal{D}^\mu_r := \overline{\mathcal{D}_{0r}}^\mu$

... 有限粒子系

イミ　グラスボート　水族館.

Th 4.3　◎ $\mathcal{E}_r$ の L^2-semi gr $T^r_t \to T_t$ strongly in $L^2(\mu)$.

◎ $\mathcal{D}^\mu_r \subset \mathcal{D}^\mu_{r+1}$　つまり, $\mathcal{E}_r$ は単調減少

つまり, 極限の SD を近似する finite particle SD.

Cor　$\mathrm{Cap}^{\mathcal{E}_r}(\underline{S}_1) = 0 \Rightarrow$ (S1′) は OK.

∵)　$\mathcal{E}_r \downarrow$ より.

Cor　2)　μ: (Φ, Ψ) - quasi-Gibbs,　ρ^n loc bdd.　$d \geq 2 \Rightarrow$ (S1′)

1)　μ: det RPF.　$K(x, y)$ loc. Lipschiz.

3)　$d = 2$.　$(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\mu_r)$: 必十条件. (Inukai)

$\nabla \Psi(x-y)$

(4)　D.ri unique. ⇒ ∞ でも必十.)

(S 2) の十分条件

$\exists T > 0$ s t for $\forall R > 0$

(S 2') $\lim_{r\to\infty} \left(\int_{|x| \le r+R} \rho^1 dx \right) \cdot \left(\int_{\frac{r}{\sqrt{(r+R)T}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) = 0$

Lem (S 2') ⇒ (S 2)

∵) Lyons - Zheng 分解 による Takeda の方法. (see [4]) ∵)

$(\mathcal{E}, \mathcal{F}, L^2(\mu))$: reversible. $r_T(t) = T - t \quad (0 \le t \le T)$

$A^{[u]} = \tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0)$. ✓ 福島分解.

$\Rightarrow A_t^{[u]} = \frac{1}{2} M_t^{[u]} + \frac{1}{2} \{ M_{T-t}^{[u]}(r_T) - M_T^{[u]}(r_T) \}$

★ $u \in \mathcal{F}$ でないといけない.

x^i. $A^{[x^i]} = X_t^i - X_0^i$ のはず! → ダメ.

"label problem"

- 座標関数 $x^1, x^2, \cdots \notin \mathcal{D}^{\mu}_{loc}$ ... unlabel だから！

- $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \leftrightarrow \mathbb{B} = (B^1, B^2, \cdots)$

  $\underline{\mathcal{S}} \leftrightarrow \underline{B} = \sum_i \delta_{B^i}$

- ∞コの近似列

$\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$	0 レベル	$\underline{\mathcal{S}}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{B^i}$
1	1	$\underline{\mathcal{S}} \times \mathcal{S}$	$(\sum_{i=2}^{\infty} \delta_{B^i}, B^1)$
$(B^1, B^2, B^3, \cdots)$	2	$\underline{\mathcal{S}} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$	
$\updownarrow$	3		
No Diri form	m	$\underline{\mathcal{S}} \times \mathcal{S}^m = \mathcal{S}^m \times \underline{\mathcal{S}}$	$(\sum_{m<n}^{\infty} \delta_{B^n}, (B^1, \cdots, B^n))$

$$\{\mathcal{S}^m \times \underline{\mathcal{S}}\}_{m=0,1,2,\cdots} \qquad \xrightarrow{} \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \qquad \text{Diri form}\underline{s}$$

- Brm

$$\mathcal{E}^{\Lambda} = \int_{\underline{S}} \mathbb{D} \quad \Lambda(dS). \qquad \underline{\mathcal{S}}$$

$$\mathcal{E}^{\Lambda \times dx_n} = \int_{\underline{S} \times \mathcal{S}^n} \mathbb{D}[\ \ ] + D_{\mathcal{S}^n}[\cdot\ ] \quad \Lambda \times dx_n$$

- Interact

Consistency $\swarrow$

μ の場合:

$x = (x_1, \cdots, x_N) \in S^N$ (Palm meas.).

$\mu_x(\cdot) = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} \mid s(\{x_i\}) \geq 1, \ (\forall i = 1, 2, \cdots N))$

∘ N- Campbell measure : $S^N \times \mathsf{S}$ 上の meas

$$\mu^{[N]}(A \times B) = \int_A \rho^N(x_N)\, \mu_x(B)\, dx_N$$

• N - Diri. form. $\mu^{[N]} = \mu^N$ Closable etc は OK. μ a g. Gibbs

$(\mathcal{E}^{\mu^N}, \mathcal{D}^{\mu^N}, L^2(\mu^N))$. $C_0^\infty(S^N) \times \mathcal{D}_{0,bdd}$

$\Rightarrow (X^{N,1}, X^{N,2}, \cdots, X^{N,N}) = \mathbb{X}^N$

$\mathsf{X}^{N*} = \sum_{n>N}^{\infty} \delta_{X^n}$

∘ $\mathsf{X}^N = \sum_{n=1}^{N} \delta_{X^n}$ $\mathbb{X}^M = (X^1, \cdots, X^M)$

Th (Dirichlet form の coupling) [O. JMSJ '10]

$P^{\mu^{[N]}} = P^N$ とおく $P^0 = P^\mu$

$\mathsf{X}^N + \mathsf{X}^{N*}$ under $P^N = \mathsf{X}$ under P^0

$\forall M \leq N$, $(\mathbb{X}^M, \mathsf{X}^{M*})$ under $P^N = (\mathbb{X}^M, \mathsf{X}^{M*})$ under P^M

$P^0 \to (X^1, X^2, \cdots)$ 上の分布ができた $l_{path} : C([0,\infty) \to \mathsf{S}) \to ([0,\infty) \to S^N)$

$u_{path}^N(P^0 \circ l_{path}^{-1}) = P^N$

$x^1, \cdots, x^N \in \mathcal{D}^{\mu^N}_{loc}$!

$x^i : S^N \times \mathsf{S} \to \mathbb{R}$.

∴ Ito formula を使える!

$(\mathcal{E}^N, \mathcal{D}^N)$ $\boxed{\begin{matrix} X^1_t = X^1_0 + \cdots \\ \vdots \\ X^N_t = X^N_0 + \end{matrix}}$

$(\mathcal{E}^{N+1}, \mathcal{D}^N)$ $X^{N+1}_t = \cdots$

$x^i \left((X^1_t, \ldots, X^N_t), \sum_{n \neq N} \delta_{X^n_t} \right)$ と思う

$X^i_t - X^i_0 = A^{[x_i]}_t$.

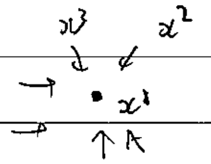
$\Rightarrow \quad X^i_t - X^i_0 = B^i_t + \int_0^t b^i\left((X^1_u, \ldots, X^N_u), \sum_{n > N}^{\infty} \delta_{X^N_u} \right) du$

Consistency より. $S^N \times \mathsf{S} \longrightarrow S^N$ へ lift する!

Problem b^i は何か.

イミを考えると Answer が出る.

X^1.



$\nabla \Phi (x^1 - x^j)$

x^1 に粒子がいる. $\rho^1(x) dx$.

残り $\sum_{j \neq 1} \delta_{x_j}$ の分布は. $\mu_x(d\mathsf{s})$

1 Campbell

$\mu^1(dx\, d\mathsf{s}) = \rho^1(x) \mu_x(d\mathsf{s}) dx$ の ∇_x をほどこす.

Def d^μ : μ の log deri. とよぶ. $(S = \mathbb{R}^d)$.

① $d^\mu \in \{L^1_{loc}(\mu^1)\}^d$

② $\int_{S \times \mathsf{S}} d^\mu \cdot f \, d\mu^1 = - \int_{S \times \mathsf{S}} \nabla_x f \, d\mu^1 \quad (\forall f \in C_0^\infty(S) \times \mathcal{D}_{0, loc}$

$*$ $d^\mu = \nabla_x \log \mu^1$

(S3) d^{μ} exists.

(S0) • μ : q-Gibbs with upper semi cont. (Φ, Ψ)

• $\rho^1 \in L^1_{loc}(S, dx)$, $\sigma_r^k \in L^2(S_r^k, dx_k)$ $(\forall r, k \in \mathbb{N})$

<u>Th</u> (O. PTRF 153, 471-509 (2012)). SDE表現 th.

(S0) − (S4), x. $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (s_1, s_2, \cdots)$ を label とする.

$(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}, L^2(\mu))$ - diffusion $\mathsf{X}_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$ は 次の ISDE をみたす.

$$\text{☆} \quad dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2}\int_0^t d^{\mu}\Big(X_t^i, \sum_{j \neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j}\Big)\, dt \quad \text{for } \mu^{\mathfrak{l}}\text{-a.s. } \mathfrak{s} = (s^i)$$

μ^N : N 粒子系　ρ^N : μ^N の cor fun

(D1) ☆ $\lim_{N\to\infty} \rho^{N,n} = \rho^n$ cpt unif.

☆ $\sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{x\in S_r^n} \rho^{N,n}(x) \le c_1^{-n} n^{c_2 n}$, $0 < \underline{\underline{c_2}} < 1$

$1 < p < \hat{p} < \infty$, $u^N, u : S \to \mathbb{R}$

(D2) $\lim_{N\to\infty} u^N = u$ in $L^{\hat{p}}_{loc}(S\, dx)$ ← Ginibre $\underline{u^N(x) = -2x}$

(D3) μ^N は log Deri. d^N をもつ.

$$d^N(x,y) = \underset{\text{Non random}}{u^N(x)} + g_s^N(x,y) + W_s^N(x,y)$$

(D4) $\lim_{N\to\infty} g_s^N = g_s$ in $L^{\hat{p}}(\mu^1)$ for $\forall s$ 　OK

(D5) $\lim_{s\to\infty} \overline{\lim_{N\to\infty}} \int_{S_r \times S} | W_s^N(x,y) - W(x) |^{\hat{p}} d\mu^{N,1} = 0$ ← 外側

$W \in L^{\hat{p}}_{loc}(S, dx)$,

ただし, $g_s(x,y)$, $g_s^N(x,y)$, $W_s^N(x,y)$ は 下の ☆ で与えられる.

Th (O. PTRF 2012)

(D1) − (D5) $\Rightarrow$ $d^{\mu}(x,y) = u(x) + \lim_{s\to\infty} g(s,y) + W(x)$ in $L^{p}_{loc}(\mu^{[1]})$

$g, g^N, V, V^N : S^2 \to \mathbb{R}$, $W : S \to \mathbb{R}^d$ によって, g_s 　$\nabla\Phi = g$ と思う.

$$☆ \begin{cases} g_s(x,y) = \int_{|x-y|<s} V(x,y)\,dy + \sum_{|x-y_i|<s} g(x,y_i) & \nabla\Phi = g \text{ と思う} \\ g_s^N(x,y) = \int_{|x-y|<s} V^N(x,y)\,dy + \sum_{|x-y_i|<s} g^N(x,y_i) \\ W_s^N(x,y) = \int_{s\le|x-y|} V^N(x,y)\,dy + \sum_{s\le|x-y_i|} g^N(x,y_i) \end{cases}$$

§5. Strong solution : infinite system of ~~finite dimensional SDEs~~ with consistency

テーマ「Consistency」

$d=1$

- Sine. $\beta = 1, 2, 4$.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| \le r \\ i \ne j}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\, dt$$

- Airy $\beta = 1, 2, 4$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \Big\{ \overset{\overset{\displaystyle\sum_{|X_t^j|<r,\, i\ne j}}{\shortparallel}}{\sum_{\substack{|X_t^j| \le r \\ j \ne i}}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} - \int_{|x|\le r} \rho(x)\, dx \Big\}\, dt.$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{-x} \cdot 1_{(-\infty, 0)}.$$

$d=2$

- Ginibre

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \Big\{ \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r \\ j \ne i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} \Big\} dt$$

$$= dB_t^i - X_t^i\, dt + \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{|X_t^j| \le r \\ j \ne i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$$

一般には. μ: RPF. d_μ: log.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2} d_\mu\Big(X_t^i, \sum_{j\ne i} \delta_{X_t^j}\Big)\, dt$$

Prob $\quad b(x, s) : \mathbb{R}^d \times \mathsf{S} \to \mathbb{R}^d.$

$$(\ast)\quad dX_t^i = dB_t^i + \underbrace{b\Big(X_t^i, \sum_{j\ne i} \delta_{X_t^j}\Big)}_{=\, b^i} dt$$

本来 $\quad dX_t^i = dB_t^i + b^i(X^1, X^2, \dots)\, dt$ の eq. が「小さく」なっている.

— 対称性.

$\to$ RPF. (S への帰着) $\to$ Dirichlet form theory $\to$

Level 1　$\mathsf{S} \ni \mathsf{X}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i}$.　$F_{\infty}(\mu) = (\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}, L^2(\mu))$

★　・quasi Gibbs with usc (Φ, Ψ).　・loc. bdd. of ρ^n

Level 2　labeled diffusion : Non-collision　Non-explosion

$\mathbb{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \dots) \in S^{\mathbb{N}}$　⬅　$S^{\mathbb{N}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} S \\ S \times S \\ \vdots \\ S \times S^{\mathbb{N}} \\ \vdots \end{bmatrix}$

Level 3　SDE表現 : 対数微分 d^{μ}

$1°$　$dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2} d^{\mu}(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i*})\, dt$　$(i \in \mathbb{N})$.

Level 4　strong solution

より一般に.　$b^i : C([0,T] : S^{\mathbb{N}}) \to C([0,T] : S^{\mathbb{N}})$

★'　$dX_t^i = dB_t^i + b^i(\mathbb{X})_t\, dt$.　(1° は ★ の特別な場合)

・strong sol とは?

★ の sol. とは.　$(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ のペア.

∴ strong sol とは、更に.　$\mathbb{X}$ が $\mathbb{B}$ の関数、$\exists F : \mathbb{X} = F(\mathbb{B})$　prog m'ble etc...

注 1　$X_t^i - X_0^i = B_t^i + \frac{1}{2} \int_0^t b^i(\mathbb{X})_u du$　より.

$B_t^i = X_t^i - X_0^i - \frac{1}{2} \int_0^t b^i(\mathbb{X})_u du$.

つまり、$\mathbb{B}$ は $\mathbb{X}$ の fun. は常に成立。

注 2.　$X_t^i := X_t^i - \int_0^t b_u^i du + \int_0^t b_u^i du$.

∴ ★ をとくには、実際は.

$B_t^i := X_t^i - \int_0^t b_u^i du$

とおいたとき、B_t^i が mart.　$\langle B^i \rangle_t = t$.　$\langle B^i, B^j \rangle_t = 0$

を示す。　Diri. f. T. の Revuz cor. + Fukushima decomp.

$$1^\circ \begin{cases} 1 \quad dX_t^i = dB_t^i + b^i(\mathbb{X})dt & \mathbb{X} = (X^1, X^2, \cdots) \\ 2 \quad \mathbb{X}_0 = \mathsf{s} \in \mathsf{S}_0 \\ 3 \quad \mathbb{X} \in W_{sol} \subset C([0,T]; S^{\mathbb{N}}) = C_T(S^{\mathbb{N}}) \end{cases}$$

W_{sol}：解の空間.

(P1)　1° は sol $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ をもつ

・$C_T(S^{\mathbb{N}}) \times C_T^0(S^{\mathbb{N}})$ 上の prob. m. $\bar{P}_{\mathsf{s}}$ ∴ $\bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{X}_0 = \mathsf{s}) = 1$

$\bar{P}_{\mathsf{s}}$ は 1° の解の分布.

$$\bar{P}_{\mathsf{s},\mathbb{B}} = \bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{X} \in \cdot \mid \mathbb{B})$$

$$\begin{cases} P_{\mathsf{s}} = \bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{X} \in \cdot) & \text{オ一成分の周辺分布　(解}\ \mathbb{X}\ \text{の分布)} \\ P_{Br} = \bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{B} \in \cdot) & \text{オ二成分　:　} \leftrightarrow S^{\mathbb{N}}\text{-valued Br. m.} \end{cases}$$

・有限近似

$$\mathbb{X}^m = (X^1, \cdots, X^m, 0, \cdots)$$

$$\mathbb{X}^{m*} = (0, \cdots 0, X^{m+1}, X^{m+2}, \cdots)$$

$\mathbb{X} \in W_{sol}$, $\mathsf{s} \in \mathsf{S}_0$ ($\mathbb{X}_0 = \mathsf{s}$), $m \in \mathbb{N}$: given.　$\{\mathbb{Y}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ のeq.

$$(2^\circ\text{-}m) \begin{cases} dY_t^i = dB_t^i + b^i(\mathbb{Y}^m + \mathbb{X}^{m*})dt \\ \mathbb{Y}_0^m = \mathsf{s}^m \\ \mathbb{Y}^m + \mathbb{X}^{m*} \in W_{sol} \end{cases}$$

＊ $\mathbb{X}$ は係数の一部で "fixed"

time inhomogeneous eq.

$\mathcal{F}_t(C_T(S^N)\cdots)$

$\frac{\mathbb{B}\text{ は fix.}}{\text{filtering は}}$ 忘れる. $C_T(S^N)$ をとってもいい。

(P2) $(2^\circ\text{-}m)$ は $\exists_1$ strong sol for $\forall s \in \mathcal{S}_0$, $\forall X \in W_{sol}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{T}_{path}(S^N) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma[X^{m*}] =: \mathcal{T}_{path}$$

(P3) $\mathcal{T}_{path}(S^N)$ is P_s-trivial for $\forall s \in \mathcal{S}_0$

(P4) $\mathcal{T}_{path}(S^N)$ is countably determined under $\{\overline{P}_{s,\mathbb{B}}\}_{\mathbb{B}}$ for P'_{Br}-a.s. $\mathbb{B}$.

注. この条件は、一般の形の RPF と無関係.

T51

(1) (P1) − (P4) $\Rightarrow$ $\exists$ strong sol for $\forall s \in \mathcal{S}_0$

(2) Y_s, Y'_s : strong sols on $\mathbb{B}$.

$$Y_s = Y'_s \text{ a.s} \Leftrightarrow \mathcal{T}^1_{path}(S^N, Y_s) = \mathcal{T}^1_{path}(S^N, Y'_s)$$

注 $\mathcal{T}^1_{path}(S^N; Y_s) = \{A \in \mathcal{T}_{path}(S^N) ;\ P(Y_s \in A) = 1\}$

仮定の検証

(P1) : level 2

(P2) : OK

$\left.\begin{matrix}\text{(P3)}\\ \text{(P4)}\end{matrix}\right\}$?

$\overline{\mathfrak{S}} = S^{\mathbb{N}} \times W_{sol} \times C_T^0(\mathfrak{S}^{\mathbb{N}})$.

$F_m : \overline{\mathfrak{S}} \to W_{sol}$ by

$F_m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}) = (\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*}) = (Y^{m,1}, \dots, Y^{m,m}, X^{m+1}, X^{m+2}, \dots)$

$\mathbb{Y}^m$ は (P2) の unique. strong solution.

Def $\overline{P}_{\mathsf{s}}$ prob m on $C_T(\mathfrak{S}^{\mathbb{N}}) \times C_T^0(\mathfrak{S}^{\mathbb{N}})$ is called i.f.c. sol of

lution of

☆ $dX_t^i = dB_t^i + b^i dt \quad (i \in \mathbb{N})$

if

1) $\overline{P}_{\mathsf{s}}(W_{sol}^{\mathsf{s}} \times C_T^0(\mathfrak{S}^{\mathbb{N}})) = 1$, $\quad W_{sol}^{\mathsf{s}} = \{\mathbb{X} \in W_{sol} ; \mathbb{X}_0 = \mathsf{s}\}$

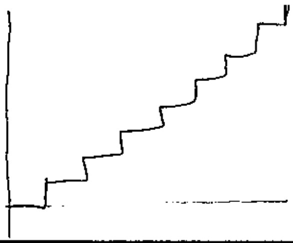
2) $\overline{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{B} \in \cdot) = P_{Br}^{\infty}$

3) ① $F_\infty(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}) = \lim_{m\to\infty} F_m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B})$ for $\overline{P}_{\mathsf{s}}$ a.s. $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$

and

② $\lim_{m\to\infty} \int_0^t b^i(F_m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}))_u du = \int_0^t b^i(F_\infty(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}))_u du$

注 3) の② は $F_m = F_\infty$ なら みたす。



Lem 5 2. Ass (P1) & (P2). Let $\overline{P}_s$ be the sol. of 1°.

$\Rightarrow$ (1) $\overline{P}_s$ is a ifc-solution

(2) F_∞ is $\mathcal{B}(S^{\mathbb{N}}) \times \underbrace{\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})}_{\uparrow \text{ tail で或る.}} \times \mathcal{B}(C^0_T(S^{\mathbb{N}}))$ - mble.

$(F_m^1, F_m^2, \cdots, F_m^m, F_m^{m+1}, \cdots)$

Pf| (1). $F_m(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})^m = F_{m+n}(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})^m \quad n \in \mathbb{N}$

					X^5
	Y^{31}	Y^{32}	Y^{33}	X^4	X^5
F_2	Y^{21}	$Y^{2,2}$	X^3	X^4	X^5
F_1	$Y^{1,1}$	X^2	X^3	X^4	X^5

一意性から従う.

(2). a.s. conv. より.

Lem 5 3 Ass. (P2).

$\overline{P}_s$ is a ifc-sol $\Rightarrow$ $(F_\infty(s, \mathbb{X}, \mathbb{B}), \mathbb{B})$ under $\overline{P}_s$ is a sol.

Pf. $\mathbb{Y} = F_\infty(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})$.

$$\mathbb{Y}^i_t - \mathbb{Y}^i_0 = \mathbb{B}^i_t + \lim_{m\to\infty} \int_0^t b^i(\mathbb{Y}^m + \mathbb{X}^{m*})_u\, du$$

$$= \mathbb{B}^i_t + \int_0^t \lim_{m\to\infty} b^i(\mathbb{Y}^m + \mathbb{X}^{m*})_u\, du$$

↓ 注

$$= \mathbb{B}^i_t + \int_0^t b^i(\mathbb{Y})_u\, du$$

(2). F_m は. $\mathcal{B}(S^{\mathbb{N}}) \times \sigma[\mathbb{X}^{m*}] \times \mathcal{B}(C^0_T(S^{\mathbb{N}}))$ - mble. より,,

$\vdots \quad (\cap \quad \vdots \quad) \quad \vdots$

L54 $\bar{P}_s$ is a ifc-sol. . $Y = F_\infty(s, X, \mathbb{B})$ とおく

(1) $(Y, \bar{P}_s)$ is a strong sol.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ is $\bar{P}_{s,\mathbb{B}}$ - trivial for a.s. $\mathbb{B}$ $P_{\mathbb{B}_r}$

(2) X, X' : s. sol. on the same $\mathbb{B}$.

$\bar{P}_s, \bar{P}_s'$: $(X, \mathbb{B}), (X, \mathbb{B}')$ の distribution

$\Rightarrow$

$X = X'$ for a.s. $\mathbb{B}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}^1_{path}(S^{\mathbb{N}}, \bar{P}_{s,\mathbb{B}}) = \mathcal{J}^1_{path}(S^{\mathbb{N}}, \bar{P}'_{s,\mathbb{B}})$ for a.s. $\mathbb{B}$

(3) Ass. (P2).

s. sol. is unique $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}^1_{path}(S^{\mathbb{N}}, \bar{P}_{s,\mathbb{B}})$ is indep of a f-sol $\bar{P}_f$

Pf (1) $\Rightarrow$ Y は $(s, \mathbb{B})$ の関数.

$\therefore \bar{P}_{s,\mathbb{B}}$ の下で Y は non random. とくに $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ は $\bar{P}_{s,\mathbb{B}}$ - tri.

$\Leftarrow$ 仮定 + Lem 52 (2) より. Y は $(s, \mathbb{B})$ にのみよる.
$\triangleright$ $Q \circ D^{-1}$] ~

(2) $\Rightarrow$ 自明. | $\Leftarrow$: $\mathbb{B}$ = fix. $A = \{\omega : X(\mathbb{B}, \omega) \neq X'(\mathbb{B}, \omega)\}$. $\Rightarrow A \in \mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$,

$\therefore$ $\bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A) = \bar{P}'_{s,\mathbb{B}}(A) \in \{0,1\}$ もし. $\bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A) = \bar{P}'_{s,\mathbb{B}}(A) = 0$ $\Rightarrow$

($X(\mathbb{B}, \omega) = \omega$ である つまり. fix point) $X(\mathbb{B}, \omega)$ を $C_{path}(S^{\mathbb{N}}) \to C_{path}(S^{\mathbb{N}})$ と考えて $\exists C$ $\{\omega : X(\mathbb{B}, \omega) \in C\} \neq \{\omega : X'(\mathbb{B}, \omega) \in C\}$ これは矛盾.

(3) $\Leftarrow$ X, X' を 2つの sol. $\Rightarrow$ $\bar{P}_s$ と $\bar{P}_s'$ は f sol (by L52 (2))

$\therefore$ 仮定より $\mathcal{J}^1_{path}(S^{\mathbb{N}}, \bar{P}_{s,\mathbb{B}}) = \mathcal{J}^1_{path}(S^{\mathbb{N}}, \bar{P}'_{s,\mathbb{B}})$ for a.s. $\mathbb{B}$.

$\Rightarrow$ (2) より. $X = X'$ a.s //

L 5.5 $\bar{P}_{\mathfrak{s}}$: ifc sol. Ass (P3) & (P4). $\Rightarrow$

(1) $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ is $\bar{P}_{\mathfrak{s},\mathbb{B}}$-tri. for $\mathbb{B}$-a.s.

(2) $\mathcal{J}'_{path}(S^{\mathbb{N}})$ is indep. of $\mathbb{B}$-a.s.

pf (1) $A \in \mathcal{J}_{path} \Rightarrow$

① $$P_{\mathfrak{s}}(A) = \int_{C_T^0(S^{\mathbb{N}})} \bar{P}_{\mathfrak{s},\mathbb{B}}(A)\, P_{B_r}(d\mathbb{B})$$

Let $B = \{\mathbb{B} : 0 < \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A) < 1\}$.
Suppose $0 < P_{B_r}(B) < 1$. $\Big] \Rightarrow$

$$0 < \int_B \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A)\, P'_{B_r}(d\mathbb{B}) \le \int_{C_T^0(S^{\mathbb{N}})} \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A)\, P_{B_r}(d\mathbb{B})$$

$$= \int_B + \int_{B^c}$$

$$< 1$$

∴ $0 < P_{\mathfrak{s}}(A) < 1$ ---> (P3) に矛盾.

∴ $A \in \mathcal{J}_{path} \Rightarrow \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(A) \in \{0,1\}$ for $\mathbb{B}$-a.s.

ここで、(P4) の「可算決定」より. A と $\mathbb{B}$ を交換する. よって.

For P_{B_r}-a.s. $\mathbb{B}$, $\bar{P}_{\mathfrak{s},\mathbb{B}}(A) \in \{0,1\}$ for all $A \in \mathcal{J}_{path}$ //

(1) の pf qed //

次ページは. (2) の pf.

(2) の pf.

$p = 0, 1$. $A \in \mathcal{J}_{path}$.

$$B_p := \{ \mathbb{B} : \overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A) = p \}.$$

$\Rightarrow$ (1) より. $P_{B_r}(B_0 \cup B_1) = 1$、 定義から. $B_0 \cap B_1 = \phi$.

$$\therefore \quad P_S(A) = \int_{\mathbb{S}^N} \overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A) \, P_{B_r}(d\mathbb{B}) = \int_{B_1} \overbrace{\overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A)}^{1} \, P_{B_r}(d\mathbb{B}) = P_{B_r}(B_1). \quad ①$$

つまり. $P_S(A) = P_{B_r}(B_1)$ … ②

$\therefore$ $P_{B_r}(B_1) \in \{0, 1\}$ by ② and (P3).

$\therefore$ $P_{B_r}(B_1) = p \Rightarrow P_S(A) = p$ $(p = 1, 0)$ by ②

$\therefore$ 各 $A \in \mathcal{J}_{path}$ に対し. $P_S(A) = 1 \Rightarrow \overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A) = 1$ for P_{B_r}-a.s. $\mathbb{B}$

$P_S(A) = 0 \Rightarrow \overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A) = 0$ 〃

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A_n) = P_S(A_n)$ for P_{B_r}-a.s. $\mathbb{B}$ が成立. $\therefore$

For P_{B_r}-a.s. $\mathbb{B}$. に対し.

$$\overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A_n) = P_S(A_n)$$

ここで (P4) より. $\mathcal{J}'_{path}$ は. $\{\overline{P}_{S,\mathbb{B}}\}_{\mathbb{B}}$ for P_{B_r}-a.s $\mathbb{B}$ の下で. 可算決定 より.

For P_{B_r}-a.s. $\mathbb{B}$ に対し.

$$\overline{P}_{S,\mathbb{B}}(A) = P_S(A) \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{J}_{path} \quad //$$

$\mathbb{B}$ $P_{b_r}(b_1) \in \{\cdot\}$.

Pf of T51.

(1) : L52(2) ⇒ $\overline{P}_s$ is a f-sol.

∴ (1) follows from L54(1) & L55(1)

(2). $Y_s = Y_s'$ と仮定する. ⇒ $\mathcal{J}^1(Y_s) = \mathcal{J}^1(Y_s')$ が成立.

⇐ $\mathcal{J}^1(Y_s) = \mathcal{J}^1(Y_s')$ を仮定. Then.

Then Y_s, Y_s' are strong sol. より. $\overline{P}_{s,\mathbb{B}}$ の下で non random.

∴ $\mathcal{J}^1(Y_s) = \mathcal{J}^1(Y_s') \Leftrightarrow$ For $P_{\mathbb{B}_s}$-a.s. $\mathbb{B}$, $\exists m$

$$Y_{S^n}^n(\mathbb{B}) = Y_{S^n}^{\prime n}(\mathbb{B}) \quad (\forall n \geq m)$$

∴ (P2) より. $Y_s = Y_s'$ ← 先が fix されてるから 解の一意性より

| |)) ー fix.

- (P3)
- (P4)
- DRPF への T. Tri.
- μ の Tail 分解
- Johansson - Spohn との関係
- Tane.
- Diri の一意性 & domain

$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}^{n*}]$, $\mathbb{X}^{n*} = (X^{n+1}, X^{n+2}, \cdots)$

(P3) $\mathcal{T}_{path}$ is P_s - trivial for $\forall s \in \mathcal{S}_0$

(P4) $\mathcal{T}_{path}$ is countably determined under $\{\overline{P}_{i,\mathbb{B}}\}_{\mathbb{B}}$

(P2) $\underline{X}$ が良い集合 H を出ない Non-exit. 《説明

☆ $dX_t^i = dB_t^i + b(X_t^i, X_t^{i*})\,dt$, $\underline{X}_t^{i*} = \sum_{j\neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j}$

$H = \{ \mathsf{s} \in S \times \mathsf{S};\ b(x_i, \mathsf{s})$) is loc. Lips. cont. in x_i }.

(P2′) Cap $(H^c) = 0$

Th ☆ は、次の geometric eq. に帰着.

To solve (find) rpf μ. s.t.

☆′ $\nabla_x \log \mu = 2b$

satisfying

(a) μ is (Φ, Ψ) - quasi - Gibbs with upper semi cont. (Φ, Ψ)

(b) $\sigma_r^n \in L^2(S_r^n, dx_n)$, $\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mu(S_r^k) < \infty$ $\int_{S_r} \rho^1 dx < \infty$ と同値.

(c) Non-Collision, Non-explosion, Non-exit.

(d) $\mathcal{T}$ is μ-trivial. $\mathcal{T} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_r^c]$, μ の tail

$N_t^{[u]} = -\frac{1}{2} M_t^{[u]} + \frac{1}{2} \check{M}_t^{[u]}$

$A_t^{[u]} = u(X_t) - u(X_0)$. $A^{[u]}, M^{[u]}, N^{[u]}$ AF.

... pach-up n funal.

T 6.1 (Lyons - Zheng)

$\mu(S) = 1$, $u \in \mathcal{D}^{\mu}_{loc}$.

$$A_t^{[u]} = \frac{1}{2} M_t^{[u]} + \frac{1}{2} [M_{T-t}^{[u]}(\gamma_T) - M_T^{[u]}(\gamma_T)] \quad (P_\mu \quad)$$
$$=: \frac{1}{2} M_t^{[u]} + \frac{1}{2} \check{M}_t^{[u]}$$

ただし. $\gamma_T(\omega)_t = \omega_{T-t}$. $\check{M}_t^{[u]}$ は $\{\mathcal{F}_{T-t}\}$- mart.

Fukushima 分解: $A_t^{[u]} = M_t^{[u]} + N_t^{[u]}$ AF. (
$\uparrow$ 0 energy.

T 6.2 (Lyons - Zheng decomp for IBM). $dX_t^i = dB_t^i + b(X_t^i, \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j}) dt$

$$\mathbb{X}_t - \mathbb{X}_0 = \frac{1}{2} \mathbb{M}_t^{[x]} + \frac{1}{2} \check{\mathbb{M}}_t^{[x]}, \quad \text{under } P_\mu.$$

$$\langle M^{[x]} \rangle_t = t \mathbb{1} \qquad \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

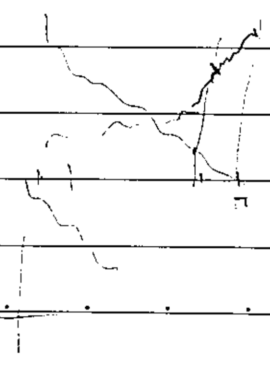
$$\langle M^{[x_i]}, M^{[x_j]} \rangle_t = \delta_{ij} t$$

とくに、$\check{M}_t^{[x]}$ も. S^N- valued Br.m. w.r.t. $\{\mathcal{F}_{T-t}\}_{0 \le t \le T}$

★ labeled diffusion の構成 による "consistency"

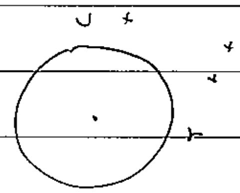
Th 6.2. (Lyons - Zheng decomposition for labeled diffusion)

$$\mathbb{X}_t - \mathbb{X}_0 = \frac{1}{2} \mathbb{B}_t + \frac{1}{2} [\mathbb{B}_{T-t}(\gamma_T) - \mathbb{B}_T(\gamma_T)]$$



$\mathbb{X}_{T-t} - \int_0^{T-t} b(\mathbb{X}$

Σ : config に対して、



$$\mathcal{J} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}] .$$ $S_r^c = \{|x| \geq r\}$.

(T1). $\mathcal{J}$ is μ-trivial.

Th 6.3. (T1) $\Rightarrow$ (P3).

i.e. $\mathcal{J}$ is μ-tri. $\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ is P_μ-trivial.

Pf. T6.2 より、

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X}_0 + \frac{1}{2}\mathbb{B}_t + \frac{1}{2}\mathbb{B}^*_t . \quad ①$$

ここで. $\mathrm{Tail}(\mathbb{B}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{B}^{i*}]$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{B}$ = Br. m. より. $\mathrm{Tail}(\mathbb{B})$ is P_μ-trivial.

$\check{\mathbb{B}}$ = 〃 $\mathrm{Tail}(\check{\mathbb{B}})$ is P_μ-trivial. //

$\mathbb{X}_0 \simeq \mu$ より. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}_0^{n*}]$ is P_μ-tri.

ここで、① より、$\mathbb{X}$ は 3つの項の和になる $\mathcal{J}$ is P_μ-tri.

注. H25.9.28

このPfは、まずい点があった。しかし、何が良くないのか忘れてしまった。

今は、別の証明をつけている。

$\bar{S} = \underline{S} \times W_{sol} \times C_T^0(S^N)$. SDE

- $F_\infty : \bar{S} \longrightarrow W_{sol}$ $F_\infty(s, X, B) = X$. $\bar{P}_s$ - a.s. (X, B) ---①
- $\mathcal{J}$ - m'ble in X.

. : :

- 新しい map: $G_{s,B} : W_{sol} \to W_{sol} \subset C_T(S^N)$.

$G_{s,B}(\cdot) := F_\infty(s, \cdot, B)$ defined $\bar{P}_{s,B}$ - a.s.

$\bar{P}_s$: . ⇒ $\bar{P}_{s,B} = \bar{P}_s(X \in \cdot \mid B)$ において.

1) $\bar{P}_{s,B} \circ G_{s,B}^{-1} = \bar{P}_{s,B}$ ∵ 恒等写像 (① より).

2) 一方 $C_T(S^N)$ は. 可算決定. ($W_{sol} \subset C_T(S^N)$ は可測部分集合)

∴ $G_{s,B}^{-1}(C_T(S^N))$ も可算決定. under $\{\bar{P}_{s,B}\}_B$

1) と 2) より.

T 6.4 (P4) is satisfied.

Th 6.5

$$(\star)\quad dX_t^i = dB_t^i + b(X_t^i ; \sum_{j\neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j})dt$$

$\exists \mu$. sat. f'ing.

① $b = \frac{1}{2} d^{\mu}$

② μ is q. Gibbs m with u.s.c. (Φ, Ψ)

③ $\sigma_r^n \in L^2(S_r^n, dx_n)$, $\rho^1 \in L^1_{loc}(S, dx)$

④ Non-Collision & Non-explosion & Non-exit.

⑤ μ is tail trivial.

⇒ • $(\star)$ の strong sol. の族 $\{X_t^s\}$ で、

$\{X_t^s\}$ が μ-reversible なものは. μ-a.s. に 一意 に存在する。

• $(\star)$ の sol の族 $\{X_t^s\}$ で. $\{X_t^s\}$ が μ-rev. diff となるものは、

μ-a.s. s に対し、一意 に存在し. strong sol. となる。

結論: $(\star)$ をとく ⇔ ①－⑤ をみたす μ をみつけること。

μ についての "微分方程式"

$$\nabla \log \mu = b$$

を ②～⑤ の制約の下で. とくこと。

• Rem 6.5. $\overbrace{\text{local}}^{\text{quasi-regular,}}$ Dirichlet form $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{D}})$ が

$$(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{D}}) < (\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \tilde{\mathcal{E}}(f,f) = \mathcal{E}^{\mu}(f,f) \ (\forall f \in \mathcal{D}^{\mu}),\ \tilde{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}^{\mu}$$

⇒ ass. diffusion は $(\star)$ をみたす。

$\boxed{\text{Pf}}$ $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu})$ が ④ をみたせば. $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{D}})$ も ④ をみたす。 //

T 6.6.

DRPF μ は tail trivial.

∵ 離散近似. + Ruessel Lyons (2003).

T 6.7 $\beta = 2$. ⇒ Airy, Sine, Gin. etc. に対応する

ISDE は 一意 st. sol.

◎ $\mathfrak{g}$. Gibbs m. の tail 分解. $\mathcal{T}$: S の tail σ-fld

$\mu(d\mathsf{s}) = \mu(\cdot|\mathcal{T})(\mathsf{t})\,\mu(d\mathsf{t})$. ‥ tail 分解.

T 6.8

$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mu(A|\mathcal{T})(\mathsf{t}) = 1_A(\mathsf{t})$.

(アイデア. ポ H-G. Georgii (lattice の Gibbs m. の一般論)

T 6.9

(T 6.5 の) ①–⑤ を仮定. ⇒ μ-a.e. t に対して,

(あ) の strong sol の族 $\{X_t^{\mathsf{t}}\}$ で, "

$\{X_t^{\mathsf{t}}\}$ が μ_{t}-reversible なものが. 一意に存在する。

Cor . $\beta = 1, 4$ も扱える. (全体の tail tri. open problem)

. 一般の Gibbs も. (tail tri. でないが) 分解すれば OK.

Th. 6.10

μ : ①−⑤ をみたす,

$(\hat{\mathcal{E}}^\mu, \hat{\mathcal{D}}^\mu, L^2(\mu))$: local quasi-regular Dirichlet form.

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{E}}^\mu(f, f) = \mathcal{E}^\mu(f, f) & \text{for } \forall f \in \mathcal{D}^\mu \\ \hat{\mathcal{D}}^\mu \supset \mathcal{D}^\mu. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\hat{\mathcal{E}}^\mu, \hat{\mathcal{D}}^\mu) = (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu).$$

∵) $\cancel{(\hat{\mathcal{E}}^\mu, \hat{\mathcal{D}}^\mu)}$ ~~の unlabeled diffusion~~ にも. 同じギロンが使える.

∴ strong sol. の一意性より, 等しくなる.

SDE の解の一意性.

$\mathcal{T}_{path} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}^{n*}]$, $\overline{P}_{s}$: i.f.c. sol. $P_{s} = \overline{P}_{s}(\mathbb{X} \in \cdot)$.

(P3) $\mathcal{T}_{path}$ is P_{s} - trivial for $\forall s$.

(P4) $\mathcal{T}_{path}$ is 可算決定 under $\{\overline{P}_{s,B}\}_{B}$.

$\star$ $dX_t^i = dB_t^i + b(X_t^i, \sum_{j\neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j})\,dt$.

とくに $^{\exists}\mu$. $d^{\mu} = 2b$ のときを考える.

$^{\exists}$label ℓ. $s = \ell(\Sigma)$. $\mu^{\ell} = \mu \circ \ell^{-1}$.

• (P4) → ノート 6.4.

(P3) をいかに示すか.

以下 $\tilde{P}_s$: itc sd. D.f. で構成したもの. とくに μ-reversible.

(Q1) $\mathcal{J}$ is μ-trivial.

Th 7.1

(Q1) $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_{path}$ is P_s - trivial $\forall s$

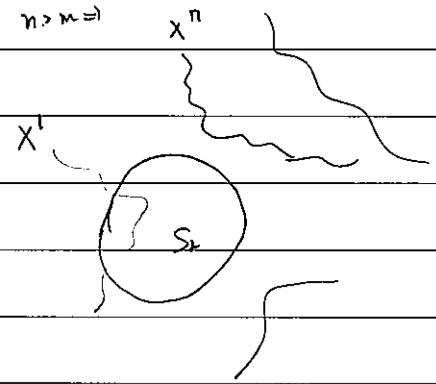
○ P_s : unlabeled diffusion

L. 7. 2

∘ $\mathcal{J}$ is $P_\mu^{X_t}$ - trivial for $\forall t$.

∘ $\mathcal{J}^{[1]}(\mu) = \mathcal{J}^{[1]}(P_\mu^{X_t})$.

∵) $P_\mu^{X_t} = \mu$ より. 自明.



Lem. 7.3 $\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S)$ is P_μ- trivial.

$\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S) = \sigma[\, X_t^{-1}(\mathcal{J}) \ ; \ 0 \le t \le T \,]$.

○ $\tilde{\mathcal{J}}_{path} = \bigvee_{\# \in \Pi} \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}_{\#}^{n*}]$, $\quad \# = (t_1, \dots, t_k)$

(Q2) $P_\mu(\, m_r(X) < \infty \,) = 1 \quad (\forall r \in \mathbb{N})$.

ただし. $m_r(X) = \inf\{\, m \in \mathbb{N} ; \ X^n \in C_T(S_r^c) \quad (\forall n > m) \,\}$

Lem 7.4

(Q1), (Q2) $\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{J}}_{path}$ is P_{μ^*} - trivial.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \ P_\mu \circ \mathbb{X}^{-1}$

Pf of L.7.4

$\mathbb{A} \in \hat{\mathfrak{J}}_{path}$

① $l_{path}^{-1}(\mathbb{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ l_{path}^{-1}(\mathbb{A}) \cap \{ m_r(\underline{X}) \le n \} \}$ for P_μ-a.s.

一方.

② $l_{path}^{-1}(\mathbb{A}) \cap \{ m_r(\underline{X}) \le n \} \in \sigma[\pi_{S_r^c}(\underline{X}_t);\ t \in [0,T]]$ $(\forall r)$

① と ② より

$$l_{path}^{-1}(\mathbb{A}) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}(\underline{X}_t),\ t \in [0,T]] = \hat{\mathfrak{J}}_{path}(\underline{S}) \quad P_\mu\text{-a.s}$$

∴ Lem.7.3 より. $\tilde{\mathfrak{J}}_{path}(\underline{S})$ は P_μ-tri. だから. $P_{\mu}(\mathbb{A}) = P_{\mu}(l_{path}^{-1}(\mathbb{A})) \in \{0,1\}$ //

Lem 7.5.

$\mathcal{J}_{path}$ is P_{ue}-trivial.

Pf. 簡単. L.7.4. $\tilde{\mathcal{J}}_{path}$ is P_{ue}-tri. より出る,
ただし. F_∞ の性質を使う。

講義予定：

1 回目

0. 目標：

1) random point fields (RPF) の 3 つのクラス
2) 無限粒子系の空間の 2 つの構造
3) 無限粒子系の空間の幾何と力学

1. Introduction: Rigidity of stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions.

2. Ornstein-Uhlenbeck trapping of tagged particles 1

2 回目

3. 確率幾何からの準備

4. Ginibre RPF の Palm resolution と resrore 密度公式

3 回目

5. 確率力学の構成

6. Ornstein-Uhlenbeck trapping of tagged particles 2 (証明の完成)

4 回目

7. 無限次元確率微分方程式の強解と tail σ-felds

8. tail 自明性の証明 1

5 回目

9. tail 自明性の証明 2 (cylindrical tail triviality of labeled path spaces)

10. 無限次元確率微分方程式の一意的強解

確率幾何と確率力学：対照表

μ: $\mathbb{R}^d$ の random point field
ρ^1: μ の 1-相関関数
ISDE: 無限次元確率微分方程式
$\mathsf{S}_{i,c} = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}; \mathsf{s}(\{a\}) = \{0,1\} \text{ for all } a \in \mathbb{R}^d,\ \mathsf{s}(\mathbb{R}^d) = \infty\}$

	確率幾何	確率力学
0	small fluctuation	
1	準 Gibbs 性	unlabeled diffusion
2	$\mathrm{Cap}(\mathsf{S}_{i,c}) = 0$　非衝突 $\int_{\lvert x\rvert<r} \rho^1 dx = O(e^r)$　非爆発	labeled diffusion
3	対数微分	ISDE 表現
4	Tail 自明性・一意性	強解の存在と一意性
5	Palm 分解 restore 密度公式	dynamical rigidity (劣拡散性) Ornstein-Uhlenbeck trapping

Dynamical rigidity of stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions

2013/10/15-18: 東京大学数理科学研究科　　Hirofumi Osada (Kyushu University)

d 次元ユークリッド空間内を d 次元 Coulomb ポテンシャル Ψ_d で相互作用しながら運動する無限個のブラウン運動を考える。逆温度を β とする。この確率力学が平行移動不変なときには、次の無限次元確率微分方程式で記述される。(c_d は正定数, $c_2 = 1$)

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \sum_{j\neq i,\, |X_t^i - X_t^j| < r} c_d \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d} dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

現在、$d = 2$ かつ $\beta = 2$ の時だけ、この確率力学およびその平衡分布は構成されており、それぞれ「Ginibre 干渉ブラウン運動」、「Ginibre 点過程」と呼ばれる。尚、この点過程は、非エルミート Gaussian ランダム行列の固有値の分布の極限である。

$\mathbb{R}^d$ において d 次元 Coulomb ポテンシャルは、Ruelle クラスのポテンシャルではない。従って、DLR 方程式に基づく、従来の Gibbs 測度の理論の外側にあった。Gibbs 測度は、Poisson 点過程に近いクラスである。一方、Coulomb ポテンシャルはその遠方での相互作用の強烈さのために、付随する無限粒子系は全く異なる様相を見せる。この講義では、その一例として Ginibre 点過程の幾何的及び力学的 rigidity を語る。

同時に無限次元確率微分方程式の強解の一般論を展開する。

参考文献

o.p
[1] Osada, H., *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields, **112**, (1998), 53-90.

o.tp
[2] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

o.isde
[3] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

o.rm
[4] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Annals of Probability, Vol **41**, (2013) pp 1-49.

o.rm2
[5] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Processes and their Applications, Vol **123**, (2013) pp 813-838.

o-shirai.palm
[6] Osada, H., Shirai, T., *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, (preprint/draft)

o-restore.palm
[7] Osada, H., *Palm decomposition and restore density formulae of the Ginibre point process*, (in preparation)

o.sub
[8] Osada, H., *Sub-diffusivity of tagged particles of Ginibre interacting Brownian motions*, (in preparation)

o-t.airy
[9] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint/draft)

o-t.tail
[10] Osada, H., Tanemura, H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations and tail theorems*, (preprint/draft)

参考文献

ark1
[1] Albeverio, S., *et al. Analysis and geometry on configuration spaces*, Joul. Func. Anal, **154**, (1998) 444-550.

ark
[2] Albeverio, S., *et al. Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case*, Joul. Func. Anal, **157**, (1998) 242-291.

forrester
[3] Forrester, Peter J. , *Log-gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press (2010).

fot
[4] Fukushima, M., *et al. Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Walter de Gruyter (1994).

Fr
[5] Fritz, J. *Gradient dynamics of infinite point systems*, Ann. Probab. **15** (1987) 478-514.

HKPV
[6] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes, AMS Univ. Lect. Ser. **51**(2009).

inu
[7] Inukai, K., *Collision or non-collision problem for interacting Brownian particles*,, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82**, (2006), 66-70.

kt.cmp
[8] Katori, M., Tanemura, H., *Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles*, published on line in Commun. Math. Phys..

krishnapur
[9] M. Krishnapur, From random matrices to random analytic functions, Ann. Probab. **37** (2009), 314–346.

lebedev
[10] N. N. Lebedev, Special functions and their applications, Dover Publications, Inc. 1972.

lang.1
[11] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977) 55-72.

lang.2
[12] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978) 277-299.

mr
[13] Ma, Z.-M., Röckner, M., *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Berlin: Springer-Verlag 1992.

mehta
[14] Mehta, M., *Random matrices*, (Third Edition) Elsevier 2004.

nagao-f
[15] Nagao T., Forrester, P.J., *Multilevel dynamical correlation functions for Dyson's Brownian motion model of random matrices*, Phys. Lett. **A247**, (1998) 42-46.

o.dfa
[16] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinitely dimensional Wiener processes with singular interactions*, Commun. Math. Physic. (1996), 117-131.

o.p
[17] Osada, H. *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields **112** (1998), 53–90.

o.col
[18] Osada, H., *Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimensions and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields*, in Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, eds. T. Funaki and H. Osada, Advanced Studies in Pure Mathematics **39**, 2004, 325-343.

o.tp
[19] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3**, 867-894.

o.isde
[20] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, **153**, 471-509 (2012)

o.rm
[21] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Ann. of Probab. **41**, 1-49 (2013)

o-s
[22] Osada, H. and Shirai, T., *Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field*, in Proc. of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, eds. M. Fukushima and I. Shigekawa, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B6**, (2008) 193-200.

OS
[23] H. Osada and T. Shirai, *Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B6** (2008), 193–200.

OS2
[24] H. Osada and T. Shirai, *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, (preprint).

o-t.airy
[25] Osada, H. and Tanemura,H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to Airy random point fields*, (preprint).

o-t.strong
[26] Osada, H. and Tanemura,H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations*, (preprint).

PV
[27] Y. Peres and B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

RV
[28] B. Rider and B. Virág, *The noise in the circular law and the Gaussian free field*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), Article ID rnm006.

ruelle2
[29] Ruelle, D., *Superstable interactions in classical statistical mechanics*, Commun. Math. Phys. **18** (1970) 127–159.

shiga
[30] Shiga, T. *A remark on infinite-dimensional Wiener processes with interactions*, Z. Wahrschverw. Gebiete **47** (1979) 299-304.

shirai
[31] Shirai, T., *Large deviations for the Fermion point process associated with the exponential kernel* J. Stat. Phys. **123** (2006), 615-629.

shirai-t
[32] Shirai, T., Takahashi, Y. *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes*, J. Funct. Anal. **205**: (2003), 414-463.

soshi.drpf
[33] Soshnikov, A., *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55**:5 (2000) 923-975.

sp.2
[34] Spohn, H., *Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model*, In: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, ed. by G.C. Papanicolaou, IMA Volumes in Mathematics **9** , Springer-Verlag (1987) 151-179.

tane.udf
[35] Tanemura, H., *Uniqueness of Dirichlet forms associated with systems of infinitely many Brownian balls in* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Relat. Fields **109** (1997) 275-299.

T2
[36] Tanemura, H., *A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Relat. Fields **104** (1996) 399-426.

yuu.05
[37] Yoo, H. J., *Dirichlet forms and diffusion processes for fermion random point fields*, J. Functional Analysis **219** (2005) 143-160.

yoshida
[38] Yoshida, M.W. *Construction of infinite-dimensional interacting diffusion processes through Dirichlet forms*, Probab. Theory Relat. Fields **106** (1996) 265-297.

References of Osada-Tanemura

AGZ10
[39] Anderson, G.W., Guionnet, A., Zeitouni, O. : An Introduction to Random Matrices, Cambridge university press, 2010.

BG13
[40] Borodin, A., Gorin, V.: Markov processes of infinitely many nonintersecting random walks. Probab. Theory Relat. Fields **155**, 935-997 (2013)

BO09
[41] Borodin, A., Olshanski, G.: Infinite-dimensional diffusion as limits of random walks on partitions. Probab. Theory Relat. Fields **144**, 281-318 (2009)
Dys62
[42] Dyson, F. J. : A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. J. Math. Phys. **3**, 1191-1198 (1962)
EM98
[43] Eynard, B., Mehta, M. L. : Matrices coupled in a chain: I. Eigenvalue correlations. J. Phys. A **31**, 4449-4456 (1998)
For10
[44] Forrester, P. J. : Log-Gasses and Random Matrices, Princeton university press, 2010
Fritz87
[45] Fritz, J.: Gradient dynamics of infinite point systems. Ann. Probab. **15**, 478-514 (1987)
Joh02
[46] Johansson, K.: Non-intersecting paths, random tilings and random matrices. Probab. Theory Relat. Fields **123**, 225-280 (2002)
johansson.02
[47] Johansson, K.: Discrete polynuclear growth and determinantal processes. Commun. Math. Phys. **242**, 277-329 (2003)
KT07b
[48] Katori, M., Tanemura, H.: Noncolliding Brownian motion and determinantal processes. J. Stat. Phys. **129**, 1233-1277 (2007)
KT09
[49] Katori, M., Tanemura, H.: Zeros of Airy function and relaxation process, *J. Stat. Phys.* **136**, 1177–1204 (2009)
KT11
[50] Katori, M., Tanemura, H.: Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels. Markov processes and related fields **17**, 541-580 (2011)
Meh04
[51] Mehta, M. L. : Random Matrices. 3rd edition, Amsterdam: Elsevier, 2004
NF98
[52] Nagao, T., Forrester, P. J. : Multilevel dynamical correlation functions for Dyson's Brownian motion model of random matrices. Phys. Lett. **A247**, 42-46 (1998)
Olv54a
[53] Olver, F. W. J.: The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **247**, 307-327 (1954)
Olv54b
[54] Olver, F. W. J.: The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **247**, 328-368 (1954)
o.dfa
[55] Osada, H. : Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions. Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996)
Osa04
[56] Osada, H. : Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimensions and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinatal random point fields in Stochastic Analysis on Large Scale Interacting System. In: Funaki, T., Osada, H. (eds.) Advanced Studies in Pure Mathematics **39**, 325-343 (2004)
o.tp
[57] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3**, 867-894 (2010)
o.isde
[58] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, **153**, 471-509 (2012)
o.rm
[59] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Ann. of Probab. **41**, 1-49 (2013)
o.rm2
[60] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II : Airy random point field*, Stochastic Processes and their applications **123**, 813-838 (2013)
o.tail
[61]

ot.strong
[62] Osada, H., Tanemura, H. *Uniqueness and existence of strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations describing interacting Brownian motions*, (in preparation).

PR29
[63] Plancherel, M., Rotach, W. : Sur les valeurs asymptotiques des polynomes dH́ermite $H_n(x) = (-1)^{\mathbb{N}} e^{x^2/2} \frac{d^{\mathbb{N}}}{dx^{\mathbb{N}}}(e^{-x^2/2})$. Comment. Math. Helv. **1**, 227-254 (1929)

p-spohn
[64] Prähofer, M., Spohn, H. : Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, J. Stat. Phys. **108**, 1071-1106 (2002)

ST03
[65] Shirai, T., Takahashi, Y.: Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process. J. Funct. Anal. **205**, 414-463 (2003)

Sos00
[66] Soshnikov, A. : Determinantal random point fields. Russian Math. Surveys **55**, 923-975 (2000)

Spo87
[67] Spohn, H. : Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model. In: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, G. Papanicolaou (ed), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, **9**, Berlin: Springer-Verlag, 1987, pp. 151-179

Ta13
[68] Tanemura, H. : Strong Markov property of determinantal process with an infinite number of particles, in preparation

VS04
[69] Vallée, O., Soares, M.: Airy Functions and Applications to Physics. Imperial College Press, World Scientific (2004)

0. 目標.

$S = \mathbb{R}^d$. 無限粒子系

$S^{\mathbb{N}}$: labeled particles. $\mathbf{s} = (s_1, \cdots)$

$\underline{S}$: unlabeled particles. $\underline{s} = \sum_i \delta_{s_i}$,

μ: random point field (RPF)

$\underline{S}$ 上の prob. m. ← $S^{\mathbb{N}}$ 上には「良い」prob. m. がない

1. A: periodic
   B: Poisson
   C: Coulomb.
   d次元 Coulomb. - d次元.

$$\underset{\text{per.}}{A} \longrightarrow \underset{\text{Poisson.}}{B}$$

$$\underset{\text{Coulom}}{C}$$

2. ① structure — g. Gibbs 一般 (木, 金) ⋯ A と C
   ② Structure — Coulomb 系 (火, 水) ⋯ C

3. 「無限次元」の幾何
   どんな性質が 確率力学に影響を与えるか.

有限次元. Nash ineq ⇒ heat kernel est. Gaussian bound.

Dynamical rigidity (RG).

strict Coulomb interacting Brownian motions.

1 Dynamical rigidity of stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions

- $\mathbb{R}^d$
- Ψ_d : d dim. Coulomb pot. (反撥力)

$$\nabla \Psi_d = - c_d \frac{x}{|x|^d} \qquad (c_2 = 2, \ c_d : \text{正定数})$$

$\beta > 0$: 逆温度

- Interaction pot. Ψ_d, 逆温度 β の（平行移動不変な）Br. particles.

$$1^\circ \quad dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{j \neq i \\ |X_t^i - X_t^j| < r}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d} dt. \qquad (i \in \mathbb{N})$$

- X_t^i : i th particle の time t の位置.
  $\{B^i\}$: indep. copies of d dim. Br. m.

- $\mathbb{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \dots) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. ... labeled dyn.
  $X_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$ ... unlabeled dyn.

- Prob - 1° を とき. 性質 を 調べる。

- $d=2$. $\beta = 2$ だけ. 1° の unique strong sol. ∃する.
  このとき. 「dynamical rigidity」を示す。

- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上 の heat eq. $\quad x = (x_i) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ $\quad 1^\circ$ は 次と対応.

$$2^\circ \quad \frac{\partial}{\partial t} p(t, x, dy) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{j \neq i \\ |x_i - x_j| < r}}^{\infty} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^d} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \right. p(t, x, dy)$$

$\Delta_i = \sum_{\ell=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\ell}}\right)^2$, $\quad x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id}) \in \mathbb{R}^d$.

$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{id}}\right)$

★ $d=2$, $\beta = 2$ のときは. 2° の heat eq. が 解けた.

strict Coulomb RPF.

1° の dyn. の「定常分布」の 直観的表現

$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上 の prob. m. $\check{\mu}$

$$3^\circ \quad \check{\mu}(dx) \sim \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i<j}^{\infty} \Psi_d(x_i - x_j)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$$

とくに. $d = 2$ のとき

$$= \frac{1}{Z} \prod_{i<j}^{\infty} |x_i - x_j|^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$$

◎ 3° から 1° (2°) の 導出:

X_t は "Dirichlet form" に対応した. diffusion.

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{\check{\mu}}(f, g) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \, d\check{\mu} \\ L^2((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \check{\mu}) \end{cases}$$

$\nabla \log \check{\mu}$

$$\mathcal{E}^{\check{\mu}}(f, g) = -\int_{(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i f + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{c_d (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^d} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) g \, d\check{\mu}$$

☆ 通常 Ruelle's class の interaction. Ψ に対し、定常分布 μ は
配置空間 $S \subset (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}/\text{perm}$ 上で. DLR eq.
Strict Coulomb. には. 使えない ので.

Ginibre RPF

以下 $d = \beta = 2$. "Ginibre". (唯一の example).

$$\Phi(x) = -2\log|x|, \quad \nabla\Phi(x) = -2\frac{x}{|x|^2} \in \mathbb{R}^2$$

$$\check{\mu} = \prod_{i<j}^{\infty} |x_i - x_j|^2 \prod_{k=1}^{\infty} dx_k .$$

$\Rightarrow$

= $\mathbb{R}^2$ 上の config sp. S 上の prob. m. μ で

k - correlation fun. ρ^k with respect to $g(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2} dx$.

$$\rho^k(x_k) = \det[e^{x_i \bar{x}_j}]_{1 \le i, j \le k}.$$ ただし、$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と思う $\bar{\ }$ 複素共役.

をみたす μ が $\exists_1$. "Ginibre RPF". (determinantal m. の理論)

μ が $\check{\mu}$ の対応物 (rigorous).

μ の log 微分 d^μ. $\qquad \mathsf{s} = \sum \delta_{s_i}$.

$$d^\mu(x, \mathsf{s}) = 2 \lim_{r \to \infty} \sum_{|x - s_i| < r} \frac{x - s_i}{|x - s_i|^2}$$

という行で、$\check{\mu}$ に対応する

Ginibre IBM

$S = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$\mathsf{S} = \{ \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} : \mathsf{s}(S_r) < \infty \}$: Config. sp. over S, ·· Polish with vague top.

S : unlabeled particles   tiny ∞ dim sp

$S^{\mathbb{N}}$: labeled particles ··· 目標 ·· huge

$\mathfrak{l} : \mathsf{S} \to S^{\mathbb{N}}$: m'ble map. (label map).

$\check{\mu} = \mu \circ \mathfrak{l}^{-1}$ μ : Ginibre RPF.

T1 ([3], [10]) For $\check{\mu}$-a.s. $\mathbf{s} = (s_i)$, 4° has a unique, strong sol. $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$

4° $$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r \\ j \neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} \, dt$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{s}$$

- $\mathsf{X}_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$ は μ-reversible diffusion.

- 4° の解の族 $\mathbf{X}$ で $\mathsf{X} = \sum_i \delta_{X_t^i}$ としたとき

$$P \circ \mathsf{X}_t^{-1} \prec \mu \quad (\forall t)$$

となるものは μ-a.s. s に対し一意 という意味
($\check{\mu}$-a.s. $\mathbf{s}$)

- strong uniqueness が成立. μ-rev な sol は μ-rev な unique strong sol
→ (木) (金)

DR1

T2 ([3]) 4° の解は、5° と 6° をみたす

5° $$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{|X_t^j|<r \\ i\neq j}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt$$

より一般に、$^\forall c \in \mathbb{R}^2$ に対し、

6° $$dX_t^i = dB_t^i - (X_t^i - c)\,dt + \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{|c - X_t^j|<r \\ j\neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt$$

◎ 有限次元では、成立しない。

◎ Dyn. rig. drift. $$u^i(\mathfrak{s}) := \lim_{r\to\infty} \sum_{|s^i - s^j|<r} \frac{s^i - s^j}{|s^i - s^j|^2} \quad \cdots 3°$$

$$v^i(\mathfrak{s}) := -x + \lim_{r\to\infty} \sum_{|s^j|\le r} \frac{s^i - s^j}{|s^i - s^j|^2} \quad \cdots 4°.$$

$\underline{X}_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$)

$\underline{S}$ or $S^{\mathbb{N}}$ の submfd.

$$\underline{S}_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{ \mathfrak{s} : u^i(\mathfrak{s}) = v^i(\mathfrak{s}) \}$$

そこに、粒子系がトラップされている。

T2 ⇒ $P_{\mathfrak{s}}(\underline{X}_t \in \underline{S}_0 \text{ for } \forall t) = 1$

N粒子系近似 と オ1 dyn. rig. の直観

◎ N-粒子系近似

$\mu = \lim_{N\to\infty} \check{\mu}^N$.

7° $\check{\mu}^N(dx_N) = \frac{1}{Z_N} \prod_{i<j}^{N} |x_i - x_j|^2 \cdot g(x_N)\, dx_N$.

◎ $\check{\mu}^N$ は $N\times N$ Gaussian, non-Hermitian RM の e.v. の分布.

.. Ginibre ensemble. ⇒ μ Ginibre RPF.

7° に対応する SDE

$X^N = (X^1, \dots, X^N)$

8° $dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\, dt + \sum_{i<j}^{N} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$.

($N\to\infty$ とすると、「直観的に」 $X^\infty = (X^1, X^2, \cdots)$

$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\, dt + \sum_{i<j}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt$.

⇒ 5°

◎ μ: rotation & translation invariant かつ Coulomb だから.

⇒ $dX_t^i = dB_t^i + \sum_{i<j}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$

⇒ 6°.

☆ 共に「正しい」 条件付収束の効果!

☆ 1dim の Dyson では 成立しない.

$dX_t^i = dB_t + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\, dt$.

$\sum_{|x^j|<L}$) 同じにしないと.
$\sum_{|x^i - x^j|<L}$

DR 2 と DR 3

label の条件. $\sum \delta_{X^i} \to (X^1, \dots)$ の下に. initial label $\ell: \mathsf{S} \to S^{\mathbb{N}}$ が必要.

<u>T 3</u> $\check{\mu}$-a.s. $\$$. $\mu(\cdot - \delta_a \mid \ell^i(s) = a) \prec \mu(\cdot - \delta_a \mid \mathsf{s}(\{a\}) \geq 1)$

9° $$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon X^i_{t/\varepsilon^2} = 0 \quad \text{for } \forall i \in \mathbb{N}.$$

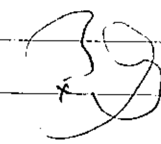
◎ Φ : Ruelles class pot (with convex hard core).

10° $$dX^i_t = dB^i_t - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \nabla \Phi(X^i_t - X^j_t)\, dt.$$

<u>Prop</u> [1] (1) $\lim \varepsilon X^i_{t/\varepsilon^2} = {}^{\exists} \sigma dB_t$.

(2) $d \geq 2 \Rightarrow$ $\sigma^t \sigma \gneq 0$. (非退化).

([1], hard core, 一般に 信じられている)



注. Prop. より、T3 は 意外な結果。なぜ. Prop の Pf が. Gemitre に 適用しないか?

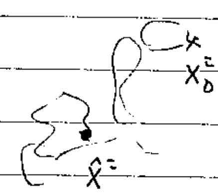
<u>T 4</u> ([8]). [Ornstein-Uhlenbeck trapping]. $\underline{X}_0 \sim \mu \Rightarrow$.

12° $\hat{X}^i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^i_t\, dt$ exist. a.s., $(\forall i \in \mathbb{N})$

13° $$\sup_{0 \leq t < \infty} | X^i_t - \Theta^i_t | < \infty \quad \text{a.s. for } \forall i \in \mathbb{N}.$$

where Θ^i_t is the 2D O-U pr. centered at $\hat{X}^i$:

$$d\Theta^i_t = dB_t - (\Theta^i_t - \hat{X}^i)\, dt. \quad \Theta^i_0 =$$



TPの時間平均を仮定して O-U trapping を示す.

§ 2. O-U trapping.

$S = \mathbb{R}^d$ 　 $\underline{S}$: S上の config. sp 　 $(d \geq 2)$

Ψ_γ r-dim. Coulomb pot

$$\nabla \Psi_\gamma = -\frac{2V_{\gamma-1}}{\gamma}\frac{x}{|x|^\gamma}, \quad V_{\gamma-1} : r-1 \text{ dim ball の体積}.$$

∘ $\Psi_2 = -2\log|x|$.

∘ 逆温度 β, 平行移動不変, Coulomb dyn.: $d \leq \gamma \leq d+2$

$$1^\circ \quad dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r \\ i \neq j}} \nabla\Psi_\gamma(X_t^i - X_t^j)\,dt,$$

B^i : indep. copies of d-dim. Br.m.

∘ $d = \gamma \Rightarrow$ strict Coulomb dyn.

∘ $(\beta, \gamma, d) = (2, 2, 2)$: Ginibre IBMs … 唯一の例.
$S = \mathbb{R}^2$

$$2^\circ \quad dX^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i - X_t^j| < r}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\,dt$$

☆ 以下の仮定を Ginibre IBM はみたす.

(A.1) 　 eg. state μ ∃する. g-Gibbs, 対数微分 d^μ. 　 (S.G.)
⇐ "small variance." 　 (多重表示).

(A.2) 　 $\displaystyle \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^u X_t^i\,dt = {}^\exists\hat{X}^i$ 　 a.s. 　 (S.D)

以下は, (A.1) と (A.2) をみとめれば成立する.

DIR 1.

1.1 (Th 2に対応) Ginibre $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{X}}_{}$ が次のSDEのunique strong sol.
1° の解

2° $$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} X_t^i - \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{|X_t^j|<r \\ j \neq i}} \nabla \Psi_\gamma (X_t^i - X_t^j)\, dt$$

㊀ 木全の一般論 と log 微分の計算.

Conj: 一般の d-dim. strict Coulomb では $^\exists \beta_d < \beta < \infty$ に対して、成立するはず.
証明できてるのは、Ginibre だけ.

L 2

$$\hat{X}^i = -\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u \lim_{r\to\infty} \Big(\sum_{\substack{|X_t^j|<r \\ j\neq i}} \nabla \Psi (X_t^i - X_t^j) \Big) dt$$

Pf. 4.1 の解の表示から.

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} [X_u^i - X_0^i] = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} B_u^i = 0$$

- B^i については. 自明.
- X_t^i を Lyons-Zheng 分解 (or K-V th) より. 高々 diffusive 尚. (in prob. よりも強く) μ-a.s. conv. する。

For $V \in \mathbb{R}^d$, $|V| = 1$ に対し.

$$\circ \quad A_t = \Big[-\hat{X} + \lim_{r\to\infty} \Big(\sum_{\substack{|X_t^j|<r \\ j\neq i}} \nabla \Psi (X_t^i - X_t^j) \Big) \Big] \cdot V$$

$$\circ \quad M_T = \sup_{T<u<\infty} \frac{1}{u-T} \int_T^u A_t \, dt$$

$$m_T = \inf_{T<u<\infty} \frac{1}{u-T} \int_T^u A_t \, dt$$

L. 3

$$-\infty < m_T \le 0 \le M_T < \infty \quad \text{for } \forall T.$$

Pf L. 2. 2. より

- Ornstein-Uhlenbeck trapping -

d 次元 O-U pr. centered at $\hat{X}^i$ (time average.) with inv. tem. β

3° $d\mathcal{O}_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2}(\mathcal{O}_t^i - \hat{X}^i)\,dt$ ‥ ∃! strong sol.

T4. 2-1, 2-2 $\Longrightarrow$

μ-a.s., $\forall i$,

$$\sup_{0\le t<\infty} |X_t^i - \mathcal{O}_t^i| \le \sup_{|V|=1}\left[\inf_{0\le T} M_T\right] < \infty$$

意味 $\hat{X}^i = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u}\int_0^u X_t^i\,du$ ‥ 時間平均 (後で存在を示す)

一担 $\hat{X}^i$ の存在がわかると、X_t^i が $\hat{X}^i$ に、OU-pr. のレベルで、トラップされる。

Pf $P_t = X_t^i \cdot V - \mathcal{O}_t^i \cdot V$, $V \in \mathbb{R}^d$ $|V| = 1$.

$\Rightarrow$ $dP_t = \frac{\beta}{2}[-P_t + A_t]\,dt$.

$\therefore$ $P_u - P_T = \frac{\beta}{2}\left[-\int_T^u P_t\,dt + \int_T^u A_t\,dt\right]$

$\le \frac{\beta}{2}\left[-\int_T^u P_t\,dt + (u-T)M_T\right]$

$\therefore$ $P_u \le P_T e^{-\frac{\beta}{2}(u-T)} + M_T - M_T e^{-\frac{\beta}{2}(u-T)}$ $(T < u < \infty)$

$\overline{\lim_{u\to\infty}} P_u \le M_T$ $(\forall T)$ $\Rightarrow$ $\overline{\lim_{u\to\infty}} P_u \le \inf_{0\le T<\infty} M_T$

$V \mapsto -V$ $\Rightarrow$ $\underline{\lim_{u\to\infty}} P_u \ge \sup_{0\le T<\infty} m_T$ //

3 確率幾何からの準備

1. Configuration space と S^{N}

$S = \mathbb{R}^d$, $S_r = \{ |s| < r \}$.

$\underline{S} = \{ \underline{s} = \sum_i \delta_{s_i} ; \ \underline{s}(S_r) < \infty \ (\forall r \in N) \}$ ⋯ configuration.

$\underline{S}$ は vague top. Polish sp. ⋯ configuration space.

$\underline{s}_n \to \underline{s} \iff \lim_{n\to\infty} \int_S f \, d\underline{s}_n = \int_S f \, d\underline{s}$ for $\forall f \in C_0(S)$

Def $(\underline{S}, \mathcal{B}(\underline{S}))$ 上の prob. m. μ を random point field (RPF, rpf).
or. point process (点過程)

10木 → 14:50

No. T3.2

3.

2 3つのクラス. (平行移動不変).

$S = \mathbb{R}^d$

(A) periodic

$v_1, \dots, v_d \in S$

m : $\{v_1 \dots v_d\}$ で張るトーラス T 一様分布

$f : T \to \underline{S}$ $\quad f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_{z_1 v_1 + \cdots + z_d v_d + x}$

※ quasi-periodic … 略.

(B) Poisson RPF, λ L.m. Λ = Poisson.

(1). $\xi(A_1) \cdots \xi(A_N)$: 独立 for ${}^\forall A_i \cap A_j = \phi$

$\xi(A_i)$ = A_i 内の粒子の個数

A_i

(2) $\Lambda(\xi(A) = n) = e^{-\lambda(A)} \cdot \frac{1}{n!} \lambda(A)^n$.

※ canonical Gibbs measures with Φ

periodic A

Poisson B Gibbs

Cou. C

Dyson

★ $\check{\mu} \sim \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i<j}^{\infty} \Phi(x_i - x_j)} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$ (直観的).

(C) Coulomb RPF :

$\Phi = \Phi_d$: d次元 Coulomb pot.

$\nabla \Phi_d = -\frac{2 V_{d-1}}{d} \frac{x}{|x|^d}$ $\quad$ V_{d-1} : d-1 dim. unit ball の体積

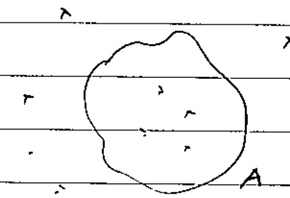
$\Phi_2(x) = -2 \log |x|$.

☆ 唯一の例 Ginibre RPF $d=2$. $\beta=2$.

$\check{\mu} = \frac{1}{Z} \prod_{i<j}^{\infty} |x_i - x_j|^2 \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$.

4. density & correlation fun.

m : $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の Radon meas.



Def. $\sigma_r^k(x_1, \dots, x_k) = \sigma_r^k(\mathbf{x}_k)$ が μ の m に対する S_r 上の k-density function とは $B \subset S_r^k$, sym.

1) σ_r^k は 対称 in $\mathbf{x}_k$.

2) $$\int_B \frac{1}{k!} \sigma_A^k(\mathbf{x}_k)\, m^k(d\mathbf{x}_k) = \mu(\pi_A(\mathsf{s}) \in \mathfrak{u}(B)\,;\, \mathsf{s}(A) = k)$$

ただし $\mathfrak{u} : S^k \to \mathsf{S}$: $\mathfrak{u}((x_1, \dots, x_k)) = \sum_j \delta_{x_j}$ … unlabel map.

☆ 正規化の方法は色々

Def. $\rho^k(\mathbf{x}_k)$ が μ の m に対する k-correlation fun (相関関数)

1) 対称 in $\mathbf{x}_k$

2) $$\int_{A_1^{k_1} \times \cdots \times A_n^{k_n}} \rho^k(\mathbf{x}_k)\, m^k(d\mathbf{x}_k) = \int_{\mathsf{S}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i) - k_i)!}}_{=\,*} \mu(d\mathsf{s})$$

ただし $k_1 + \cdots + k_n = k$, $A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j)$, $* = 0$ if $\mathsf{s}(A_i) - k_i < 0$.

注. $\mu(\mathsf{s}(S) = n) = 1 \Rightarrow \sigma_\infty^n = \rho^n$ //

Determinantal RPF

Def　μ が (K, m)-det RPF とは、μ の m に対する n-cor. fun ρ^n が、

$$\rho^n(x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{n}$$

で与えられること。

◎ 存在すれば一意。

T (Soshnikov, Shirai-Takahashi).
K = Hermit 対称、かつ $0 \le K \le I$.
$\Rightarrow$ (K, m)-det RPF は一意に存在する

◎ 特別にうまくいくクラス

Coulomb RPFでも有効な概念 (構成)

$\mathbb{R}^d$

$$\check{\mu}_{d,\gamma,\beta} \sim \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i<j}^{\infty} \Phi_\gamma(x_i - x_j)} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$$ (trans. inv. のとき)

∘ determinantal RPF

$$\rho^n(x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{n}$$ w.r.t. $m(dx)$.

① Ginibre $(d, \gamma, \beta) = (2, 2, 2)$.

$m(dx) = g(x)\,dx$, $K(x,y) = e^{x\bar{y}}$, $g(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2}$.

② Dyson. (Sine$_\beta$).

$\beta = 1, 2, 4$. $(1, 2, \beta)$.

$m(dx) = dx$. $K_2(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi(x-y))}{x-y}$ ($\beta = 1, 4$ は複雑)

注. 最近は β-esemble. 一般 $\beta > 0$

(1D. Random S.op). ∴ Virág at all.

注 1D では様々な例. Airy, Bessel etc.

④ Gin. RPF の有限近似

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x\bar{y})^n = \lim_N \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(x\bar{y})^n = \lim_N K_N(x,y)$$

$(K_N, g\,dx)$ の density.

$$= \frac{1}{Z_N} \prod_{i<j}^{N} |x_i - x_j|^2 \prod_{k=1}^{N} g(x_i)\,dx_i$$ ∴ RM の e.v.

quasi-Gibbs & log derivative. (DLR の代用品)

- $S = \mathbb{R}^d$
- <u>Def.</u> μ : (Φ, Ψ)-quasi-Gibbs とは

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall r \in \mathbb{N}$, μ-a.s. ξ, $\exists\, C = C(m, r, \xi)$ s.t.

$$C^{-1} \Lambda_r^m (d\varsigma) e^{-\mathcal{H}_r} \le \mu_{r,\xi}^m (d\varsigma) \le C\, \Lambda_r^m (d\varsigma) \cdot e^{-\mathcal{H}_r}$$

$\Lambda_r^m = \Lambda_r(d\varsigma \mid \varsigma(S_r) = m)$, $S_r = \{|x| < r\}$ ‥ Poisson RPF with Lebesgue intensity.

$\mu \le \nu \Leftrightarrow \mu(A) \le \nu(A)$ for $\forall A \in \mathfrak{F}$.

$$\mathcal{H}_r(\varsigma) = \sum_{\substack{i<j \\ s_i, s_j \in S_r}} \Psi(s_i - s_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i \in S_r}} \Phi(s_i)$$

- <u>Def</u> d_μ が μ の log-derivative. とは

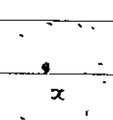
$$\int_{S\times\Sigma} f\, d_\mu\, \mu^{[1]}(dx d\xi) = -\int_{S\times\Sigma} \nabla_x f\, \mu^{[1]}(dx d\xi).$$

for all $f(x, \xi) \in C_0^\infty(S \times \underline{S})$.

$\mu^{[1]}(dx d\xi) = \rho^1(x)\, \mu_x(d\xi)\, dx$ ‥ 1-Campbell measure.

⊛ $d_\mu = \nabla_x \log \mu^{[1]}$ ‥ 形式的.

<u>イミ</u>



<u>ex</u> μ : (Φ, Ψ)-Gibbs のときに d^μ を求めよ.

Ginibre の場合

μ = Ginibre RPF

Th ([4])

μ is $(0, 2\Psi_2)$ - quasi Gibbs m

Th ([3])

$$d_\mu(x, \mathsf{s}) = 2 \lim_{r\to\infty} \sum_{|x-s_j|<r} \frac{x - s_j}{|x - s_j|^2} \quad \text{in } L^2_{loc}(\mu^{[1]}).$$

更に

$$d_\mu(x, \mathsf{s}) = -2(x-c) + 2 \lim_{r\to\infty} \sum_{|s_j - c|<r} \frac{x - s_j}{|x - s_j|^2} \quad \text{in.} =$$

Idea. $\mu^N \Rightarrow \mu$: 有限粒子系近似.

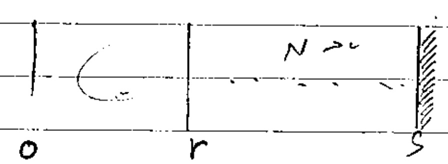
Ψ に応じた tightness :

$$H_{r,k} = \left\{ \mathsf{s} \in \mathsf{S} : \sup_{\substack{r<s<\infty \\ s\in\mathbb{N}}} \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in S_r}} \left[\frac{|\Psi_{r,rs}(x,\mathsf{s}) - \Psi_{r,rs}(y,\mathsf{s})|}{|x-y|} \right] \leq k \right\}.$$

where $\Psi_{r,rs}(x,\mathsf{s}) = \sum_{r\leq|s_i|<s} \Psi(x, s_i)$, $\quad \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$.

Prop ([4,5]) $\lim_{k\to\infty} \underline{\lim}\, \mu^N(H_{r,k}) = 1$

- $\pi_{rs} = \mathsf{s}(\cdot \cap S_{rs})$.
- $\mu^N_{r,rs,\xi}(d\mathsf{s}) = \mu^N(\pi_r \in d\mathsf{s} \mid \pi_{rs}(\mathsf{s}) = \pi_{rs}(\xi))$
- $\mu^N_{r,rs,\xi} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mu^\infty_{r,rs,\xi} \xrightarrow[s\to\infty]{} \mu^\infty_{r,\xi}$

☆ 

☆ $H_{r,k}$ は、次で用いられる.

q-Gibbs, log der, abs.c. of Palm m. restore density

Prop (small variance).

$$\sup_N \mathrm{Var}^{\mu^N}[\cdot\, \xi(S_r)] \sim r^{d-\varepsilon} \qquad \overset{\text{となる.}}{(\varepsilon>0)} \qquad (\varepsilon=1 \text{ if } d=2)$$

を示すのが key point　model dependent!

Ginibre ⇒ Shirai. est.　Dyson ⇒ Fourier 変換　Airy ⇒ Tanemura
Bessel $\beta=2$ ⇒ ミュクルツ・不等式.

Th [5].　2D Coulomb のとき. d-dim sp ($d=1,2$).
$\exists\, l_0$ s.t.

1) $$\sup_N \left\{ \int_{1\le|x|} \frac{1}{|x|^{l_0}} \rho_N^1\, dx \right\} < \infty$$

2) $1 \le \forall l < l_0$,

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{N\in\mathbb{N}} \| V_{l,s\infty} \|_{L^1(\xi,\mu^N)} < \infty .$$

ただし.
$$V_{l,s,\infty}(\xi) = \sum_{s\le|s_i|<\infty} \frac{1}{s_i^l} \qquad (s_i \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2)$$

4 Palm resolution & restore density.

ab. cont & singularity of Palm. m. of Gin RPF.

μ : Ginibre $\mathbb{C}$ 上 の RPF

$$g(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2}$$

$$K(x, y) = e^{x\bar{y}}. \qquad \tilde{K}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-|x|^2/2 + x\bar{y} - |y|^2/2}$$

μ $(K, g\,dx)$ に対応する det. RPF.

$((\tilde{K}, dx) \quad " \quad)$

Palm m

$\mathbf{x} \in S^m \qquad \mu_{\mathbf{x}} = \mu(\cdot - \sum_i \delta_{x_i} \mid s(x_i) \geq 1).$

$x = \sum_i \delta_{x_i} \qquad \mu_x = \mu(\cdot - x \mid s(x_i) \geq 1).$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$

T 1 ([6]) $\quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad \Rightarrow$

(1) $\quad m = n \iff \mu_{\mathbf{x}} \sim \mu_{\mathbf{y}} \qquad \sim$ 互に ab. cont.

(2) $\quad m \neq n \iff \mu_{\mathbf{x}} \perp \mu_{\mathbf{y}} \qquad \perp$ = singular.

注 Poisson $\Rightarrow \Lambda_{\mathbf{x}} = \Lambda$

ν: Gibbs $\Rightarrow \nu_{\mathbf{x}} \prec \nu$

° Geo. Rig. の一例

T 2 ([6]). $m = n \Rightarrow {}^{\exists} b_r \uparrow \infty$

$$\left(\frac{d\mu_{\mathbf{x}}}{d\mu_{\mathbf{y}}}\right)(\mathsf{s}) = \frac{1}{Z_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} \lim_{r\to\infty} \prod_{|s_i|<b_r} \frac{|\mathbf{x} - s_i|^2}{|\mathbf{y} - s_i|^2}, \qquad \mathsf{s} = \sum \delta_{s_i}$$

compact uni. in $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \setminus \{s_1, \ldots s_m\}$.

$$Z_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \frac{\Delta^2(\mathbf{y}) \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{m}}{\Delta^2(\mathbf{x}) \det[K(y_i, y_j)]_{i,j=1}^{m}}$$

$$\Delta^2(\mathbf{x}) = \prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j|^2, \qquad |\mathbf{x} - s_i| = \prod_{j=1}^{m} |x_j - s_i| \,_{\shortparallel}$$

T 3 ([6]). Let $\mathbf{x} \in S^m$.

$$F_r(\mathsf{s}) = \frac{1}{r}\sum_{q=1}^{r} (\mathsf{s}(S_{\sqrt{q}}) - q)$$

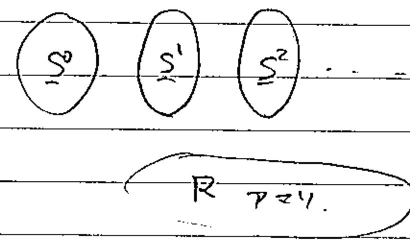
$\Rightarrow \quad \lim_{r\to\infty} F_r = -m$ weakly in $L^2(\mathsf{S}, \mu_{\mathbf{x}})$.

注 $\underset{\underset{\mu_{\mathbf{x}}}{\wr}}{\infty - m} \neq \underset{\underset{\mu}{\wr}}{\infty}$.

Palm resolution

$$\underline{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{S}^m + R \quad \leftarrow \text{アマリの集合.}$$

Sの分解.



$\mu_x(\underline{S}^m) = 1$ for all $x \in S^m$.

- ◎ Gibbs では. アリエナイ!
- Ginibre (一般に. strict Coulomb sys. の Geometric rigidity)
- ◎ いかに stochastic dyn. に影響を与えるか?
- ◎ Kipnis - Varadhan theory.
  sub diffusive が成立するには $\mu \perp \mu_0$ が必要!

periodic $\Rightarrow$ OK

restore density. 1 σ^m

$\underline{S}^0$

$\underline{S}^1$

Prob

$\underline{S}^0$ と $\underline{S}^m$ の関係は何か？ (structure 2)

μ と μ_a の間 の relation.

T4 ([7])

$\forall a = (a_1, \dots a_m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

(1) $\exists \sigma^m$, s.t.

$$\int_{S^m} \sigma^m(x, \xi)\, dx = 1 \qquad \text{for } \mu_a\text{-a.s. } \xi$$

and

μ = law of $(\sum_{i=1}^m \delta_{x_i}) + \xi$ under ν_a,

where ν_a is a prob. on $S^m \times \underline{S}$ defined by

$$\nu_a = \sigma^m(x, \xi)\, dx\, \mu_a(d\xi) .$$

(2) $\sigma^m(x, \xi)$ is unique up to $dx\,\mu_a(d\xi)$ -a.e.

(3) σ^m is indep. of a.

(3) の説明. 有限系では明らか. より

restore density 2

T5 ([8])

1° $\sigma^m(x, \xi)$ are loc. Lips. cont in x for μ_a-a.s. ξ,

2° $$\sigma^m(x, \xi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{Z_r(\xi)} \{\prod_{|s_i|\le r} |x - s_i|^2\} \Delta^2(x) \cdot g(x).$$

for μ_a-a.s. ξ & strongly in $L^2(\mu_a)$ for $\forall x \in S^m$,
cpt uni in x for μ_a-a.s. ξ.

$$Z_r(\xi) = \int_S \prod_{|s_i|\le r} |x - s_i|^2 \cdot \Delta^2(x) \cdot g(x)\, dx.$$

T6 ([8]) $\forall a \in S^m$, $m \in \mathbb{N}$, S.

$$\sigma^m(x, \xi) = \sigma^m(x+h, \xi+h) \quad \text{for } \forall h \in S.$$

where $x + h = (x_1+h, x_2+h, \dots, x_m+h)$,
$\xi + h = \sum_i \delta_{s_i+h}$ for $\xi = \sum \delta_{s_i}$

Pf a に依存しないことから. 自明.

T7 ([8]) $g(x) = \frac{1}{\pi} e^{-|x|^2}$ とおく.

$$\int_S \sigma^1(x, \xi)\, \mu_0(d\xi) = \rho^1(x) - \rho_0(x) = g(x).$$

$$\int_S \sigma^m(x, \xi)\, \mu_{0_m}(d\xi) = \rho^m(x) - \rho^m_{0_m}(x) =$$

注 μ_a の m-cor. fun を ρ^m_a とおく.

3回目 (5, 6)

St. Dyn   O-U trapping の pf (完成)

5.

6.

5

無限次元 Br.m. と Dirichlet forms.

- $S = \mathbb{R}^d$ $\quad \underline{S}$: S 上の config sp $\quad S^{\mathbb{N}} = S \times S \times \cdots$
- B_t $\quad \underline{B}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{B_t^i}$ $\quad \mathbb{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots)$
- λ ($\mathbb{R}^d$ の L.m) $\quad \Lambda$ (Poisson RPF) $\quad$ ($\lambda^{\mathbb{N}}$ … 意味なし.)
- $\mathcal{E}^\lambda = \int_S \mathbb{D}\, d\lambda \quad \mathcal{E}^\Lambda = \int_{\underline{S}} \mathbb{D}\, d\Lambda$ $\quad \times$.

square field.

- $\mathbb{D}[f.g] = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum \nabla_i f \cdot \nabla_i g$ $\quad$ ・ $\mathbb{R}^d$ の内積

$\mathcal{E}^\lambda = \int \mathbb{D}\, d\lambda$,

- $\mathbb{D}$ は自然に $\underline{S}$ の s. fld と思う. $\quad \tilde{f}$: sym.

$\mathbb{D}[f.g] := \mathbb{D}[\tilde{f}, \tilde{g}] \quad \tilde{f}(x_1, \cdots) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} = \sum \delta_{x_i}$

一般論 : 標準的 s. fld. $\mathbb{D}$, loc. smooth fn. $\mathcal{D}_\circ$

$\mathcal{E}^\mu(f.g) = \int \mathbb{D}[f.g]\, d\mu. \quad \mathcal{D}_\circ^\mu = \{ f \in \mathcal{D}_\circ \cap L^2(\mu) ; \ \mathcal{E}^\mu(f.f) < \infty \}$

- $\underline{S}$: Polish sp. $\quad \mu$: Radon m on $\underline{S}$
- μ (ラドン.m) $\xmapsto{F_{\mathbb{D}}} (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_\circ^\mu, L^2(\mu))$.

$\downarrow$ closable $\quad$ T1

T_t^μ : L^2- Markov semi gr

$\downarrow$ quasi-regular $\quad$ T2

$\{P_x^\mu\}_{x \in \underline{S}}$: $\underline{S}$ - 値 diffusion

$\downarrow$ $\quad$ T3

$\{\mathbb{P}_x^\mu\}_{x \in S^{\mathbb{N}}}$: $S^{\mathbb{N}}$ - 値 diffusion., $(\mathcal{E}^{\mu^{[N]}}, \mathcal{D}^{\mu^{[N]}}, L^2(\mu^{[N]}))$

$\downarrow$ $\quad$ T4

$(X_t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ $\quad$ SDE - 表現

unlabeled diffusion の構成

μ の条件

(A1) μ is quasi-Gibbs with upper semi-cont. (Φ, Ψ).

$S_r = \{|x| < r\}$, $\underline{S}_r^k = \{\xi \in \underline{S} : \xi(S_r) = k\}$

(A2) $\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mu(\underline{S}_r^k) < \infty$, $\sigma_r^k \in L^p(S_r^k, dx_k)$ $(p > 1)$.

where σ_r^k is the k-density fun. on S_r.

T1 ([3], [096], ⋯)

(A1) $\Rightarrow$ $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_0^\mu, L^2(\mu))$ is closable

T2 ([096])

(A1), (A2) $\Rightarrow$ ($(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu, L^2(\mu))$ is quasi-regular)

& associated diffusion $\{P_{\underline{x}}^\mu\}_{x \in \underline{S}}$ exists

◎ $\ell : \mathsf{S} \to S^{\mathbb{N}}$ $\quad \ell(\mathsf{s}) = (s_1, s_2, \cdots)$ $\quad \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$: label

例. $\ell(\mathsf{s})$ $\quad |s_1| \le |s_2| \le \cdots$ $\quad$ 後は角度 etc.

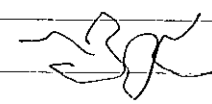
◎ $\mathsf{S}_0 = \{ \mathsf{s} \in \mathsf{S} : \mathsf{s}(x) = 0 \text{ or } 1, \quad \mathsf{s}(S) = \infty \}$

◎ $\{P_x\}_{x\in\mathcal{S}}$. $\mathcal{S}$: state space. $\mu(\mathcal{S}) = 1$. しかし全体ではない.

(A3) Non collision

$$P_x(\mathsf{X}_t \in \mathsf{S}_0 \ \text{for} \ \forall t) = 1 \qquad (\forall x \in \mathcal{S})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Cap}^{\mu}(\mathsf{S}_0^c) = 0.$$



(A3) より. (爆発するまで) 一意的に. ℓ を出発する label. をつけることができる $(X_0^i)_{i\in\mathbb{N}} = \ell(\mathsf{s})_i$

(A4) Non explosion.

$$P_x\Big(\sup_{t \le T} |X_t^i| < \infty \ (\forall T), \ \forall i \in \mathbb{N} \Big) = 1$$

$$\Longleftarrow \quad \int_S \rho^1(x) e^{-|x|^{2-\epsilon}} dx < \infty. \qquad \text{(とにかく OK)}$$

T3 (labeled dynamics) [2].
(A1) − (A3).

(1) $\mathbb{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots)$ が構成できる.

$\{\mathbb{P}_x^{\mu}\}$ diffusion

(2) $(X_t^1, \ldots, X_t^m, \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \delta_{X_t^\ell})$ は. $(\mathcal{E}^{\mu^{[m]}}, \mathcal{D}^{\mu^{[m]}}, L^2(\mu^{[m]}))$ associate した diffusion.

$\mu^{[m]} = \rho^m(x_m)\mu_{x_m}$ $\cdots$ m-Campbell meas.

Consistency

$S^{\mathbb{N}} \ni (s_1, s_2, \ldots)$	m-Campbell m.
	$\underline{S} \ni \sum_i \delta_{s_i}$
	$\mu^{[1]} \longleftrightarrow S \times \underline{S} \ni (s_1, \sum_{j=2}^{\infty} \delta_{s_j})$
	$\mu^{[2]} \quad S^2 \times \underline{S} \ni ((s_1, s_2), \sum_{j=3}^{\infty} \delta_{s_j})$
	$\vdots$
	$\mu^{[m]} \longleftrightarrow S^m \times \underline{S} \ni ((s_1, \ldots, s_m), \sum_{j>m}^{\infty} \delta_{s_j})$

$\mathbb{B}_t = (B_t^1, \cdots)$ は B_t の AF = ∥

$\mathbb{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots)$ はは X_t の A.F. しかし $\mathbb{X}_t$ 自身は Markov pr. として D.f. をもたない!

・ $\underline{X}_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$ の「additive functional」としてとらえられる.

⇒ そのままでは「Ito formula」. $f(X_t^1)$ は ない.

・しかし

$(X_t^1, \ldots, X_t^m, \sum_{j>m} \delta_{X_t^j})$ には D.f. があり, Ito 公式をつかえて

◎ T3 (2) は 非自明. $\mathbb{X}_t \mapsto (X_t^1, \ldots, X_t^m, \sum \delta_{X_t})$ をつくり, それが D.f. と対応しているところが,

ISDE 表現

(A5) log 微分 $d\mu$ が存在する

T4 [3]

$\mathbb{X}_t = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ は次の ISDE をみたす

(A) $dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2} d_\mu(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i*})\,dt.$ $(i \in \mathbb{N})$

where $\mathsf{X}_t^{i*} = \sum_{j\neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j}$

Pf $(X_t^1, \dots, X_t^m, \sum_{j>m} \delta_{X_t^j})$ の SDE 表現は自明

$m \to \infty$ とするといい. consistency より, A が成立する。

6. O-U trapping の証明.

1. env. seen from TPs (SDE rep.)

$\mathbb{R}^2$. $\beta = 2$.

1° $$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j|<r} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt. \qquad (i \in \mathbb{N})$$

1st D-R.

2° $$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i\, dt + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^j|<r} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$$

◎ env. seen from TPs,

3° $$\begin{cases} X = X^1 \quad \cdots \quad \text{T.P.} \\ Y_t^i = X_t^{i+1} - X_t^1 \end{cases}$$

4° $$dX_t = dB_t^1 - \lim_{r} \sum_{|Y_t^j|<r} \frac{Y_t^j}{|Y_t^j|^2}\, dt$$

5° $$dY_t^i = \sqrt{2}\, \tilde{B}_t^i + \frac{Y_t^i}{|Y_t^i|^2} + \lim_{r} \sum_{|Y_t^j|<r} \frac{Y_t^j}{|Y_t^j|^2}\, dt + \lim_{r} \sum_{|Y_t^i - Y_t^j|<r} \frac{Y_t^i - Y_t^j}{|Y_t^i - Y_t^j|^2}\, dt$$

where $\tilde{B}_t^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t^{i+1} - B_t^{(i)})$, ? $\cdots$ 独立ではない。

2. env. seen from TPs (Dirichlet forms I)

3° $(X_t, \sum_i \delta_{Y_t^i})$ の D.f. は何か-?

$x_i = (x_{i1}, x_{i2})$

$D = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_{i,k}}\right)_{k=1,2} = (D_1, D_2)$ $\mathbb{R}^2$-shift の generator

$(D_k f)(\xi) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(\tau_{he_k}\xi) - f(\xi)]\right)_{k=1,2}$, e_k : 単位ベクトル.

◎ shift s. field

$\mathbb{R}^2$ の内積

4° $D[f, g] = \frac{1}{2} Df \cdot Dg$ $\quad S \longleftarrow S^N + \sum_{i=0}^{\infty} S^i$

◎ standard square field

← perm. inv. $\xi = \sum \delta_{s_i}$

5° $\mathbb{D}[f, g](\xi) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial s_i}$, $\quad f(\xi) = \tilde{f}(s_1, s_2, \cdots)$

6° $\mathbb{D}_Y = \mathbb{D} + D$

μ : Ginibre RPF, μ_0 : 原点の reduced Palm m.

$\mathcal{E}^{\mu_0}(f, g) = \int_S \mathbb{D}_Y[f, g]\, \mu_0(d\xi)$.

L 1 ([2]).

(1) $(\mathcal{E}^{\mu_0}, \mathcal{D}_\circ^{\mu_0})$ is closable on $L^2(\mu_0)$.

(2) The closure $(\mathcal{E}^{\mu_0}, \mathcal{D}^{\mu_0})$ is a quasi-regular Diri. form.

(3) $Y = \sum_i \delta_{Y_t^i}$ is ass. with $(\mathcal{E}^{\mu_0}, \mathcal{D}^{\mu_0}, L^2(\mu_0))$.

3. TP + Env. pr. $(X, \sum \delta_{Y^i})$

$\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ is the nabla in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{D}_{0,XY}$ = loc. smooth. ... on $\mathbb{R}^2 \times \mathsf{S}$

7° $(\nabla_x - D)[f, g] = \frac{1}{2}(\nabla_x - D)f \cdot (\nabla_x - D)g$

注. $f(x, s) = f_1 \otimes f_2 \Rightarrow$

$(\nabla_x - D) f_1 \otimes f_2 = (\nabla_x f_1) \otimes f_2 - f_1 \otimes (D f_2)$

$\mathbb{D}$ を自然に S の v.fld と考える.

8° $\mathbb{D}_{XY}[f, g] = (\nabla_x - D)[f, g] + \mathbb{D}[f, g]$

9° $\mathcal{E}^{\mu'}(f, g) = \int_{S \times \mathsf{S}} \mathbb{D}_{XY}[f, g]\, \mu'(dx d\mathsf{s})$.

$\mu'(dx d\mathsf{s}) = \rho'(x)\, dx\, \mu_x(d\mathsf{s}) = dx\, \mu_x(d\mathsf{s})$,

$\mu_x(d\mathsf{s}) = \mu(\cdot - \delta_x \mid \mathsf{s}(\{x\}) \geq 1)$, ... x で条件つけた 1 Palm. m. (reduced)

L2 ([2])

(1) $(\mathcal{E}_{XY}, \mathcal{D}_{0,XY})$ is closable on $L^2(\mu')$.

(2) The closure $(\mathcal{E}^{\mu'}_{XY}, \mathcal{D}^{\mu'}_{XY})$ on $L^2(\mu')$ is quasi-regular D.f.

(3) (X, Y) is ass. with $(\mathcal{E}^{\mu'}_{XY}, \mathcal{D}^{\mu'}_{XY}, L^2(\mu'))$.

② 2つの D sp. $(\mathcal{E}^{\mu}_{Y}, \mathcal{D}^{\mu}_{Y}, L^2(\mu))$ と $(\mathcal{E}^{\mu'}_{XY}, \mathcal{D}^{\mu'}_{XY}, L^2(\mu'))$ の間に,
coupling が存している.

Y と (X, Y) の関係

$(Y^i_\cdot)$, $(X_t, (Y^i_\cdot))$

5. TP + Env + Dammy pr.

Th 2 (X_t, Y_t), (Y_t, Z_t) の間に.

(1) $X_t - Z_t = -Z_0 \quad (\forall t)$ (注 $X_0 = 0$).

となる coupling が存在する。

$\mathcal{D}_{XYZ,0} = \mathcal{D}_0(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \Xi \times \mathbb{R}^2$

$$w(dx\,d\xi\,dz) = dx\,\mu_0(d\xi)\,\delta_{c_e(\xi)}(dz)$$

$$\mathcal{E}_{XYZ}(f, g) = \int_\Omega \{(\nabla_x - D) + D + (\nabla_z + D)\}[f, g]\, w(dx\,d\xi\,dz)$$

s. fld の形 は. 元々 わかっている。→ 自明. それを実現できる meas の coupling があるかどうか.
→ st. geo

Th 3

(1) $(\mathcal{E}_{XYZ}, \mathcal{D}_{XYZ,0}, L^2(w))$ is closable.

(2) Its closure is quasi-regular D. form

(3) The associated diffusion (X_t, Y_t, Z_t) sat. Th. 2.

実に. 今までの Y_t, (X_t, Y_t), (Y_t, Z_t) と coupling がつする.

Env + dammy

4. Dammy particle Z_t, (Y_t と Z_t の coupling)

restore density $m=1$ 1-Palm.

$\sigma(\check{z}, \xi) = \sigma'(z, \xi)$. $\qquad \mathbb{R}^2 \times \Xi \ni (z, \xi)$

1° $\nu(dz\, d\xi) = \sigma'(z, \xi)\, \mu_0(d\xi)$.

2次元の微分.

2° $(\nabla_z + D)\, \sigma(z, \xi) = 0$ by Th. 4.6 $\qquad$ * 方向微分

3° $\mu \sim \delta_z + \xi$ under $\nu_0 = \nu_0 \circ \mathcal{U}^{-1}$, $\mathcal{U}$: unlabel map.

Def center

4° $$Ce(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} z.\, \sigma(z, \xi)\, dz \in \mathbb{R}^2.$$

Def dammy particle

5° $$Z_t = Ce(Y_t) \in \mathbb{R}^2$$

● $\{Y_t\}$: Markov (diffusion) $\Rightarrow$ $(Z_t\ Y_t)$: Markov pr.

6° $$\zeta(dz\, d\xi) = \delta_{Ce(\xi)}\, \mu_0(d\xi)$$

7° $$(\nabla_z + D)[f.g] = \frac{1}{2}(\nabla_z + D)f \cdot (\nabla_z + D)g \quad \leftarrow$$

8° $$\mathbb{D}_{YZ}[f.g] = \mathbb{D}[f.g] + (\nabla_z + D)[f.g]$$

$$\mathcal{E}^{\zeta}_{YZ}(f.g) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \Xi} \mathbb{D}_{YZ}[f.g]\, d\zeta$$

5. Env + Dammy particle の構成

L 1

(1) $(\mathcal{E}^{\xi}_{YZ}, \mathcal{D}^{\xi}_{YZ,0})$ is closable on $L^2(\xi)$. (★ key point.

(2) Its closure $\mathcal{E}_{YZ} = (\mathcal{E}^{\xi}_{YZ}, \mathcal{D}^{\xi}_{\xi}, L^2(\xi))$ is a q. regular D. f.

(3) (Y_t, Z_t) is associated with $\mathcal{E}^{\xi}_{YZ}$

Prob ① $\mathbb{R}^2$. $\nu = \delta_x(dx)$. $\hat{\nabla}$: ↗ の方向微分

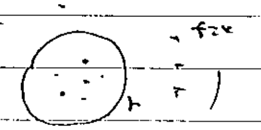
$$\hat{\mathcal{E}}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \hat{\nabla} f \cdot \hat{\nabla} g \, \nu(dxdy). \quad L^2(\nu),$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

closable. ass. diffusion は何か

②
$$\begin{cases} \mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{D} \, \nu. & \cdots \text{ closable でないことを示せ.} \\ C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

稠.



↑ $\mathcal{E}^n_r \to \mathcal{E}^\infty_r \to \mathcal{E}^\infty_\infty = \mathcal{E}$.

Pf (1). (2) は いつもの ギロン。

(3) は $\nu = \mu_0(d\xi)\, \delta_{Ce(\xi)}$ より. $\xi \leftrightarrow Y_t$ を決めれば. $Z_t \leftrightarrow Ce(Y_t)$ が決まる.

一般に Markov pr. Y_t と fun. $f: S \to S'$.

⇒ $(S \times S')$ 上 の Markov. $(Y_t, f(Y_t))$ が ∃ する. (f の てきとうな 連続性)

=

7. Proof of T.1.4 (O-U trapping.)

(2-2) $\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u X_t^i \, dt = \hat{X}^i$ a.s.

$i=1$. としてよい。

μの平行移動不変性と「label 条件」より. $a=0$. i.e. μ_0を考える。

$\mu(\cdot - \delta_0 \mid l_1(\xi)=0) \prec \mu(\cdot - \delta_0 \mid \xi(\{0\}) \geq 1) = \mu_0(d\xi)$

∴ 今までの結果 (μ_0 に基づく) を使える。

$X = X^1$ は. (X_t, Y, Z_t) でガ.

← gaussian bound

1° (Y_t, Z_t) は. inv. prob. m. ς をもつ. 又. $E[|Z_t|] < \infty$.

∴ $\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u Z_t \, dt = \hat{Z}$ $P_{(\xi,z)}$-a.s. for ς-a.s. $(\xi, z) \in \Xi \times \mathbb{R}^2$.

一方. Th 2 (i) より. $Z_t - Z_0 = X_t$ と. (X_t, Y_t, Z_t) との coupling より.

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u X_t \, dt = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u (Z_t - Z_0) \, dt$$

$$= \hat{Z} - Z_0 \quad \text{for } \varsigma\text{-a.s. } (\xi, z)$$

μ_0-a.s. ξ に対し. ~~(たが)ある~~

~~X_t は. $\{Y_t\}$ の A.F.~~

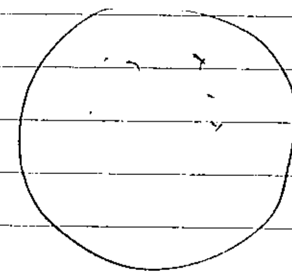
$\to \mu_0(d\xi)\, \delta_{c_0(\xi)}$ より μ_0-a.s. ξ.

Palm singularity と subdiffusivity :

$\mu \perp \mu_0$ ⇐ 必要条件 of subdiffisivity.

• K-V th. より. TP $X = X^1$ は.

① $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon X_{t/\varepsilon^2} = \sigma dB_t$ weakly in $C([0,\infty); S)$ under P_ξ
in μ_0-probability.



∴ もし、$\mu_0 \prec \mu$ (絶対連続) ⇒

② = in μ-probability.

一方、$\alpha^{\mu_0} = \sigma^t\sigma$: limit coefficients. 次の変分表現 [1]、

$$* \quad 2 \cdot (\alpha^{\mu_0} e_1, e_1) = \inf_{f \in \mathcal{D}_0} \left\{ \int_S (|D_1 f - e_1|^2 + |D_2 f|^2)\, d\mu_0 + \int_S \mathbb{D}[f, f]\, d\mu_0 \right\}.$$

∴ $\alpha_{11}^{\mu_0} = 0 \Leftrightarrow {}^\exists f_n \in \mathcal{D}_0,\ \lim_{n\to\infty} Df = e_1,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{D}[f_n, f_n] = 0$ μ_0-a.s

③ Homogenization. $\xi \in S$: fixed.

$$dH_t = dB_t + \lim \sum_{|H_t - s_i| \le r} \frac{H_t - s_i}{|H_t - s_i|^2}\, dt.$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon H_{t/\varepsilon^2} = {}^\exists \alpha_H dB_t$, 今,

$$2 (\alpha_H e_1, e_1) = \inf_{f \in \mathcal{D}_0} \int_S (|D_1 f - e_1|^2 + |D_2 f|^2)\, d\mu$$

ここで. μ: periodic ⇒ $\alpha_H^\mu > 0$ ∴ μ: Ginibre ⇒ $\alpha_H^\mu > 0$ のはず

∴ $\alpha^\mu \geq \alpha_H^\mu > 0$.

一方. $\mu_0 \prec \mu$ ⇒ ☆ において. $\alpha^\mu > 0 \Rightarrow \alpha^{\mu_0} > 0$.

∴ subdiffusive ではなくなる。

7. Strong sol of ISDEs ← structure 1 を使う。

1. ISDE

$S = \mathbb{R}^d$

T : fix. $C_T(S^{\mathbb{N}}) = C([0,T]; \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

$W_{sol} \subset C_T(S^{\mathbb{N}})$: Borel subset -- sol の space.

$\sigma^i, b^i : W_{sol} \to C_T(S^{\mathbb{N}})$ -- coefficients. $i \in \mathbb{N}$

$\mathbb{S}_0 \subset S^{\mathbb{N}}$: 出発点.

$(\{\sigma^i\}, \{b^i\}, W_{sol}, \mathbb{S}_0)$ に対して. ISDE on $S^{\mathbb{N}}$: $\mathbb{X} = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}}$

★
1. $dX_t^i = \sigma^i(\mathbb{X})_t \, dB_t^i + b^i(\mathbb{X})_t \, dt \qquad i \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{X}_0 = \mathsf{s} = (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{S}$.
   $\iff \mathbb{X} \in W_{sol}^{\mathsf{s}} := \{\mathbb{X} \in W_{sol},\ \mathbb{X}_0 = \mathsf{s}\}$.
3. $\mathbb{X} \in W_{sol}$

① s. int. の 1ミ は 適当.

② $\mathbb{S}_0$, W_{sol} は. ∞ 次元 では. 必要.

(P1) ISDE ★ has a sol. $(\mathbb{X}, B)$, and.
$\exists \check{\mu}$: prob. m. on $S^{\mathbb{N}}$ s.t. $\check{\mu}(\mathbb{S}_0) = 1$

② sol. の 1ミ の 説明.

infinite system of finite-dimensional SDEs (

- $\mathbb{X} = (X^1, X^2, \cdots) \in C_T(S^{\mathbb{N}})$

$$\mathbb{X}^m = (X^1, \cdots, X^m).$$
$$\mathbb{X}^{m*} = (X^{m+1}, \cdots).$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{X} = (\mathbb{X}^m, \mathbb{X}^{m*})$

Def (infinite system of finite-dimensional SDEs)

For $\mathsf{s} \in \mathbb{S}_0$, $\mathbb{X} \in W_{\text{sol}}^{\mathsf{s}}$,

$$\star' \begin{cases} 1 & dY_t^{m,i} = \sigma^i(\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*})_t \, dB_t^i + b^i(\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*})_t \, dt \\ 2 & (\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*}) \in W_{\text{sol}}^{\mathsf{s}} \end{cases}$$

where $\sigma(\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*}) := \sigma((\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*}))$, Non-Markov 型 $)_t$ とした。

(P.2) For $\forall \mathsf{s} \in \mathbb{S}_0$ and $\mathbb{X} \in W_{\text{sol}}^{\mathsf{s}}$,

$\star'$ has a unique strong solution for each $m \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{B}^m, \mathbb{B}^{m*})$

ifc - solutions. (flow. ifc. stair)

∘ P^{∞}_{Br} : Br. m. $\mathbb{B}$ の分布. $C_T(S^{\mathbb{N}})$ 上の p.m

∘ $\mathcal{S} = S^{\mathbb{N}} \times W_{sol} \times C_T(S^{\mathbb{N}})$

∘ $F^m : \mathcal{S} \to W_{sol}$

$F^m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}) := (\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*})$

ここで. $\mathbb{Y}^m$: ★' の unique sol.

注.. ★'2 より. $\mathbb{Y}^m_0 = (s_1, \dots, s_m)$ とくに. $(\mathbb{Y}^m_0, \mathbb{X}^{m*}_0) = \mathsf{s} = (s_1, \dots) \in \mathcal{S}_0$.

・(P2) は. F^m を定義するために用いる.
・(strong でない) sol. $\mathbb{X}$ の存在は. D.f.th. より. OK.

Def $\mathcal{S}$ 上 prob. m. の族 $\{P_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s} \in \mathcal{S}_0}$ に対し. 各 $\mathsf{s} \in \mathcal{S}_0$ に対し.

1° $\lim_{m\to\infty} F^m := F^{\infty}$ in W^{s}_{sol} under P_{s}

$\Leftrightarrow$ P_{s}-a.s. $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ に対し. 次が成立すること.

(a) $\lim_{m\to\infty} F^m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}) = F^{\infty}(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B}) \in W^{\mathsf{s}}_{sol}$

(b) $\lim_{m\to\infty} \int_0^t \sigma^i(F^m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B})_u)\, dB^i_u = \int_0^t \sigma^i(F^{\infty}(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B})_u)\, dB^i_u \quad (\forall i \in \mathbb{N})$

(c) $\lim_{m\to\infty} \int_0^t b^i(F^m(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B})_u)\, du = \int_0^t b^i(F^{\infty}(\mathsf{s}, \mathbb{X}, \mathbb{B})_u)\, du \quad (\forall i \in \mathbb{N})$

ifc-sol.

Def. (1) $C_T(S^{\mathbb{N}}) \times C_T^0(S^{\mathbb{N}})$ 上の prob. m. $\bar{P}_{\mathsf{s}}$ は.

$\bar{P}_{\mathsf{s}}$ is called ifc-sol (starting at s) if

(i-1) $\lim_{m\to\infty} F^m = F^{\infty}$ in $W_{\mathrm{sol}}^{\mathsf{s}}$ under $\bar{P}_{\mathsf{s}}$

(i-2) $\bar{P}_{\mathsf{s}}(W_{\mathrm{sol}}^{\mathsf{s}} \times C_T^0(S^{\mathbb{N}})) = 1$

(i-3) $\bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{B} \in \cdot\,) = P_{Br}^{\infty}$.

(2) S 上の prob. m. $\bar{P}$ is called ifc-sol. on S_0 if,
for each $\mathsf{s} \in \mathsf{S}_0$, (a version) $\bar{P}_{\mathsf{s}}$ of r.c.p. $\bar{P}(\,\cdot\mid \mathsf{X}=\mathsf{s})$ かきにくい。 $(\mathsf{X}, \mathbb{X}, \mathbb{B})$ とおこう
is a ifc-sol starting at s.

Solution $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ と ifc-solution $\bar{P}_s$.

<u>L.1.</u> Ass. (P.1) & (P.2).

$\bar{P}_s$: dist of sol $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ of ★.

$\Rightarrow$

(1) F^m is consistent, for $\bar{P}_s$-a.s. $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$

← first m-component.

$$F^n(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})^{[m]} = F^{m+n}(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})^{[m]} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2) $\bar{P}_s$ is an ifc-sol starting at s,

(3) $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$ under $\bar{P}_s$ is a fix point of F^∞, i.e.

$$(F^\infty(s, \mathbb{X}, \mathbb{B}), \mathbb{B}) = (\mathbb{X}, \mathbb{B}) \quad \text{for } \bar{P}_s\text{-a.s}$$

(4) $F^\infty(s, \cdot, *)$ is $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{B}(C_T^0(S^{\mathbb{N}}))$ - m'ble.

F^∞ is $\mathcal{B}(S^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{B}(C_T^0(S^{\mathbb{N}}))$ - m'ble

$F^\infty(s, \cdot, *)$: $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{B}(C_T^0(S^{\mathbb{N}}))$ - m'ble.

where

$$\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}^{n*}]$$

<u>Pf.</u> (1), (2) : trivial by (P1) & (P2) $(Y^{m+1}, \ldots, Y^{m+m}, X^{m+1}, X^{m+2}, \ldots)$

... 一意性 より.

(3) は $\mathbb{Y}^m$ is $\bigcap_{n=m}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}^{n*}]$ - m'ble より//

L..2

Ass. (P.2) $\Rightarrow$ Let $\mathbb{Y} = F^{\infty}(s.\mathbb{X}.\mathbb{B})$.

If $\bar{P}_s$ is an ifc-sol, then $(\mathbb{Y}, \mathbb{B})$ under $\bar{P}_s$

is a sol of ★,

pf $\mathbb{Y} = (Y^i_t)$ とおく. $\bar{P}_s$ is ifc sol.

$$Y^i_t - Y^i_0 = \lim_{m\to\infty} F^m(s, \mathbb{X}.\mathbb{B})^i \quad \text{by (a)}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^t \sigma^i(\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*})_u dB^i_u + \int_0^t b^i(\mathbb{Y}^m, \mathbb{X}^{m*})_u du \quad \text{by (P-2) or def.}$$

$$= \int_0^t \sigma^i(\mathbb{Y})_u dB^i_u + \int_0^t b^i(\mathbb{Y})_u du \quad \text{by} \quad \text{by (b), (c).}$$

$\overline{P}_{s,\mathbb{B}} = \overline{P}_s(\mathbb{X} \in \cdot \mid \mathbb{B})$, $\quad \mathbb{Y} = F^\infty(s, \mathbb{X}, \mathbb{B})$.

T 3 $\quad \overline{P}_s$ is an ifc-sol of ☆ $\Rightarrow$ For $\forall s \in \$_0$ the fol. holds

(1). $(\mathbb{Y}, \mathbb{B})$ under $\overline{P}_s$ is a strong sol of ☆

$\iff \mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ is $\overline{P}_{s,\mathbb{B}}$ - Trivial for $\overline{P}^\infty_{Br}$ - a.s. $\mathbb{B}$.

(2). $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}'$: s. sol. defined on the same Br. m. $\mathbb{B}$.

$\overline{P}_s$, $\overline{P}_s'$: $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$, $(\mathbb{X}, \mathbb{B}')$ n dist.

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}' \text{ for a.s. } \mathbb{B} \iff \mathcal{J}^{[1]}_{path}(S^{\mathbb{N}}, \overline{P}_{s,\mathbb{B}}) = \mathcal{J}^{[1]}_{path}(S^{\mathbb{N}}, \overline{P}'_{s,\mathbb{B}}) \text{ for a.s. - } \mathbb{B}.$$

where

$$\mathcal{J}^{[1]}_{path}(S^{\mathbb{N}}, \mu) = \{ A \in \mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}}) ; \mu(A) = 1 \}.$$

(3). Ass. (P2) $\Rightarrow$

$$\text{s. sol. of ☆ is unique} \iff \left[\begin{array}{l} \text{For } P^\infty_{Br}\text{-a.s } \mathbb{B}, \\ \mathcal{J}^{[1]}_{path}(S^{\mathbb{N}}, \overline{P}_{s,\mathbb{B}}) \text{ is indep. of } \overline{P}_s \end{array} \right.$$

Let $\overline{P}_{\mathsf{s}}$ be an ifc-sol. of ☆.

(P.3) $\quad J_{\text{path}}(S^{\mathbb{N}})$ is $\overline{P}_{\mathsf{s},\mathbb{B}}$-trivial for P^{∞}_{Br}-a.s. $\mathbb{B}$ for $\forall \mathsf{s} \in \mathfrak{S}_0$.

(P4) $\quad J^{[1]}_{\text{path}}(S^{\mathbb{N}}; \overline{P}_{\mathsf{s},\mathbb{B}})$ is indep of P^{∞}_{Br}-a.s. $\mathbb{B}$ for $\forall \mathsf{s} \in \mathfrak{S}_0$

(P5) $\quad J^{[1]}_{\text{path}}(S^{\mathbb{N}}; \overline{P}_{\mathsf{s},\mathbb{B}})$ is indep of $\overline{P}_{\mathsf{s}}$ & $\overline{P}^{\infty}_{\mathrm{Br}}$-a.s. $\mathbb{B}$ for $\forall \mathsf{s} \in \mathfrak{S}_0$.

<u>T'4.</u> For $\forall \mathsf{s} \in \mathfrak{S}_0$.

(1) (P1) − (P3) $\Rightarrow$ $\exists$ s. sol.

(2) (P1) − (P4) $\Rightarrow$ $\overline{P}_{\mathsf{s}}$ を分布としてもつ s. sol. は一意.

(3) (P1) − (P5) $\Rightarrow$ $\exists_1$ s. sol.

8 (P3) − (P5) の十分条件

Prop 1 main results in §8.

Def. cylindrical tail σ-field:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{path}}(S^{\mathbb{N}}) = \bigvee_{\mathbf{t} \in \mathbb{T}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[\mathbb{X}^{n*}_{\mathbf{t}}].$$

where

$$\mathbb{T} = \{ \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \ ; \ t_i \in [0, T], \ m \in \mathbb{N} \}$$
$$\mathbb{X}^{n*}_{\mathbf{t}} = (\mathbb{X}^{n*}_{t_1}, \dots, \mathbb{X}^{n*}_{t_m}).$$

$\bar{P}_{\mathsf{s}}$: given, $\check{\mu}$: p. m. on $S^{\mathbb{N}}$. $\mathcal{S}_0$, $\check{\mu}(\mathcal{S}_0) = 1$.

$$\mathbb{P}_{\mathsf{s}} = \bar{P}_{\mathsf{s}}(\mathbb{X} \in \cdot) \qquad \mathbb{P}_{\check{\mu}} := \int_{S^{\mathbb{N}}} \mathbb{P}_{\mathsf{s}} \, \check{\mu}(d\mathsf{s})$$

(T1) $\bar{P}_{\mathsf{s}}$ is an ifc-sol.

(T2) $\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{path}}(S^{\mathbb{N}})$ is $\mathbb{P}_{\check{\mu}}$-trivial

(T3) $\mathcal{F}^{[1]}(S^{\mathbb{N}}; \mathbb{P}_{\check{\mu}})$ is indep. of ifc sol $\{\bar{\mathbb{P}}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s} \in \mathcal{S}_0}$ on $\mathcal{S}_0$

(T1) は常に仮定:
(この章の main th).

Prop 1

(1) Ass. (T1) & (T2) ⇒ (P3) & (P4)

(2) Ass. (T1) − (T3) ⇒ (P5).

L2

$(\mathfrak{X}, \mathcal{U})$: m'ble sp.

coutable determined by $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

m is p. m. on $(\mathfrak{X}, \mathcal{U})$

$\Rightarrow$ $m(A) \in \{0, 1\}$ if $m(V_n) \in \{0, 1\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

pf (略) //

・ $\overline{P}_{s,\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{P}}_s(\mathbb{X} \in \cdot \mid \mathbb{B})$.

・ F^∞ . $\overline{P}_s$ is ifc-sol. より.

1° $F^\infty(s, \mathbb{X}, \mathbb{B}) = \mathbb{X}$ for $\overline{P}_s$ - a.s $(\mathbb{X}, \mathbb{B})$. //

2° $F^\infty_{s,\mathbb{B}}(\cdot) = F^\infty(s, \cdot, \mathbb{B})$

$\Rightarrow$ 1° と 2° より.

3° $\overline{P}_{s,\mathbb{B}} \circ (F^\infty_{s,\mathbb{B}})^{-1} = \overline{P}_{s,\mathbb{B}}$. (アタリマエ)

$W_{fix} = \{\mathbb{X} \in W_{sol} : F^\infty_{s,\mathbb{B}}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ for $\forall s \in \mathcal{S}_0$, $P^\infty_{B_r}$-a.s. $\mathbb{B}\}$

$\Rightarrow$ 1° より.

4° $\overline{P}_{s,\mathbb{B}}(W_{fix}) = 1$ for $\forall s \in \mathcal{S}_0$, $P^\infty_{B_r}$-a.s. $\mathbb{B}$.

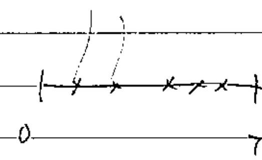
◎ $C_T(S^{\mathbb{N}})$ = Polish sp. ⇒ 可算決定 ⇒ 特に次の形の determination class

$$\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}[U_r(s);\ 0<r\in\mathbb{Q},\ s\in S_1].$$

where S_1 : S の countable dense set, $U_r(s)$: 中心 s 半径 r の ball.

$$\mathcal{V} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{(X_{\mathbf{t}})^{-1}(A);\ A\in\mathcal{U}^l,\ \mathbf{t}\in\{\mathbb{Q}\cap[0,T]\}^l\}.$$

where $X_{\mathbf{t}} = (X_{t_1},\dots,X_{t_l})$ for $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_l)$.



⇒ $\mathcal{V}$: countable determination class"

L3 Ass (T1). ⇒ $\forall V\in\mathcal{V}$,

1° $(F^{\infty}_{s,\mathbb{B}})^{-1}(V)\cap W_{fix} \in \tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}})\cap W_{fix}$ for $\mu^l\times P^{\infty}_{B_r}$-a.s.

Pf ∘ $F^{\infty}_{s,\mathbb{B}}$ is $\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$-m'ble ⇒

2° $(F^{\infty}_{s,\mathbb{B}})^{-1}(V)\in\mathcal{J}_{path}(S^{\mathbb{N}})$

∘ $X\in W_{fix}$ ⇒ $F^{\infty}_{s,\mathbb{B}}(X)=X$ ∴

3° $(F^{\infty}_{s,\mathbb{B}})^{-1}(V)\cap W_{fix} = V\cap W_{fix}$ for $\mu^l\times P^{\infty}_{B_r}$-a.s.

∘ $V\in\mathcal{V}$ より, $\exists\mathbf{t}$, $V\in\sigma[X_{\mathbf{t}}]$. ∴

4° $V\cap W_{fix} \in \sigma[X_{\mathbf{t}}]\cap W_{fix}$

∴ 2°−4° より, 1° が従う

$\underline{L4}$ (T2) $\Rightarrow$ for $\forall \mathbb{A} \in \tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}})$.

1° $\bar{P}_{s,\mathbb{B}}(\mathbb{A}) \in \{0, 1\}$ for $\mu^{l} \times P_{B_r}^{\infty}$ - a.s.

Pf ∘ $\bar{P}_{s,\mathbb{B}} = \bar{P}_s(\cdot\, X \in \cdot \mid \mathbb{B})$ より.

2° $\mathbb{P}_{\check{\mu}}(\mathbb{A}) = \int_{S \times G_T^{\circ}(S^{\mathbb{N}})} \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(\mathbb{A})\, \check{\mu}(ds)\, P_{B_r}^{\infty}(d\mathbb{B})$.

∘ Let $B = \{(s, \mathbb{B}) : 0 < \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(\mathbb{A}) < 1\}$

∘ Suppose that $0 < (\mu^{l} \times P_{B_r}^{\infty})(B) < 1$. for some

3° $0 < \int_B \bar{P}_{s,\mathbb{B}}(\mathbb{A})\, \check{\mu}(ds)\, P_{B_r}^{\infty}(d\mathbb{B}) < 1$.

ここで. 2° + 3° $\Rightarrow$ $0 < \mathbb{P}_{\check{\mu}}(\mathbb{A}) < 1$ $\Rightarrow$ (T2) に矛盾 //

$\underline{L5}$ Ass. (T1) & (T2) $\Rightarrow$ (P.3).

Pf ∘ L3. L4, $F_{s,\mathbb{B}}^{\infty}(W_{fix}) = 1$. より. For $\forall\, \mathbb{V} \in \mathcal{V}$,
$\bar{P}_{s,\mathbb{B}}$

1° $\bar{P}_{s,\mathbb{B}} \circ (F_{s,\mathbb{B}}^{\infty})^{-1}(\mathbb{V}) \in \{0, 1\}$ for $\mu^{l} \times P_{B_r}^{\infty}$ - a.s.

∘ $\mathcal{V}$ is countable $\Rightarrow$ For $\mu^{l} \times P_{B_r}^{\infty}$ - a.s,

2° $\bar{P}_{s,\mathbb{B}} \circ (F_{s,\mathbb{B}}^{\infty})^{-1}(\mathbb{V}) \in \{0, 1\}$ for all $\mathbb{V} \in \mathcal{V}$.

∘ $\mathcal{V}$ = countable determination class より. L2 と 2° から.

3° 〃 for $\forall\, \mathbb{A} \in \mathcal{B}(G_T(S^{\mathbb{N}}))$.

∴ 3° と $\bar{P}_{s,\mathbb{B}} \circ (F_{s,\mathbb{B}}^{\infty})^{-1} = \bar{P}_{s,\mathbb{B}}$ より //

2.6. (T1) & (T2) $\Rightarrow$ (P.4)

略

2.7. (T1) – (T3) $\Rightarrow$ (P.5)

略。

$\underset{\sim}{S} \xrightarrow{1} C_T(\underset{\sim}{S}) \xrightarrow{2} C_T(S^{\mathbb{N}})$

No. T91

( )

9. Cylindrical tail triviality of labeled path

1 Cyl tail tri of unlabeled path. . ① lift dynamics.

$\underset{\sim}{S} \xrightarrow{1} C_T(\underset{\sim}{S}) \xrightarrow{2} C_T(S^{\mathbb{N}})$, $\quad C_T(\cdot) = C([0,T];\cdot)$

- Tail σ-field of $\underset{\sim}{S}$:

$$\mathcal{T}(\underset{\sim}{S}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}], \qquad S_r = \{|x| < r\}.$$

- μ : prob. m. on $\underset{\sim}{S}$.
- lift dynamics P_μ : prob. m. on $C_T(\underset{\sim}{S})$.

(Q1) $\mathcal{T}(\underset{\sim}{S})$ is μ-trivial

(Q2) $P_\mu^t \prec \mu \ (\forall t)$, $\quad P_\mu^t = P_\mu \circ X_t^{-1}$, $\quad \prec$: ab. cont.

◎ 後で. P_μ は μ-stationary diffusion ととる. 今は一般.

- $\mathcal{T}^{[1]}(\underset{\sim}{S}; P) = \{A \in \mathcal{T}(\underset{\sim}{S}) : P(A) = 1\}$.

L1. (Q1) & (Q2) ⇒

(1) $\mathcal{T}(\underset{\sim}{S})$ is P_μ^t-trivial for $\forall t$.

(2) $\mathcal{T}^{[1]}(\underset{\sim}{S}; \mu) = \mathcal{T}^{[1]}(\underset{\sim}{S}; P_\mu^t)$ $\quad (\forall t)$.

pf : 自明 //

②

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{path}(\underline{S}) = \sigma[X_t^{-1}(\mathcal{J}(\underline{S})) : 0 \le t \le T]$$

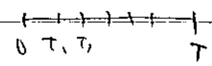
L 2 (Q1) & (Q2) $\Rightarrow$

(1) $\widetilde{\mathcal{J}}_{path}(\underline{S})$ is P_μ - trivial

(2) $\widetilde{\mathcal{J}}^{(1)}_{path}(\underline{S} : P_\mu)$ is indep of P_μ

Pf (1) $(t_1, \cdots, t_N)$, $A_i \in \mathcal{J}(\underline{S})$

1° $\chi = \{ \underline{X} \in C_T(\underline{S}) ; X_{t_i} \in A_i, (\forall i) \}$ とする。



$\Rightarrow$ L 1 (1) より. $P_\mu^{t_i}(A_i) \in \{0, 1\}$ $\forall i$.

・ $\exists i_0$, $P_\mu^{t_i}(A_i) = 0$

$$\Rightarrow P_\mu(\chi) = P_\mu(\bigcap_{j=1}^{N} A_j) \le P_\mu(A_i) = 0$$

・ $\forall i$, $P_\mu^{t_i}(A_i) \ne 0$. $\Rightarrow$ $P_\mu^{t_i}(A_i) = 1$ $(\forall i)$.

$$P_\mu(\chi^c) = P_\mu(\bigcup_{i=1}^{N} \{X_{t_i} \in A_i^c\}) \le \sum_{i=1}^{N} P_\mu(X_{t_i} \in A_i) = 0.$$

$\therefore$ $P_\mu(\chi) \in \{0, 1\}$. 一般には monotone class th. より.

(2) $\chi \in \widetilde{\mathcal{J}}^{(1)}_{path}(\underline{S} : P_\mu) \Longleftrightarrow P_\mu^{t_i}(A_i) = 1$ $(\forall i)$.

L 1 より

$$P_\mu^{t_i}(A_i) = \mu(A_i) \quad (\forall i)$$

右辺は P_μ と独立 より //

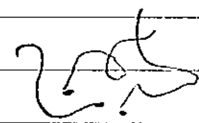
2. Cyl. tail. tr: of labeled path sp. -- unlabeled path ⇒ labeled path へ.

∘ $\mathfrak{S}_1 := \{ \mathsf{s} \in \mathfrak{S} ;\ \mathsf{s}(S) = \infty,\ \mathsf{s}(\{x\}) \in \{0,1\},\ (\forall x \in S)\}$.
… 無限個 かつ. 多重点 なし.

(Q3) $P_\mu(C_T(\mathfrak{S}_1)) = 1$.

∘ $\mathfrak{l} : \mathfrak{S}_1 \to S^{\mathbb{N}}$ … ラベル.

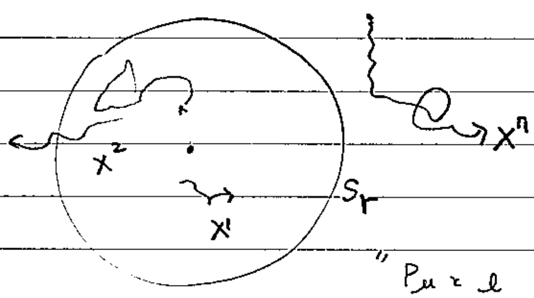
∘ $\mathfrak{l}_{path} : C_T(\mathfrak{S}_1) \to C_T(S^{\mathbb{N}})$ … ゼッケン



… $\mathfrak{l}$ に依存 - 初期状態 できまる.

∘ $\mathfrak{l}$: given に対して. $\mathsf{X} = \{\mathsf{X}_t\}_{0\le t\le T} \in C_T(\mathfrak{S}) \Rightarrow \mathsf{X} = \sum_i^\infty \delta_{X^i}$ ..

$m_r(\mathsf{X}) = \inf\{ m \in \mathbb{N};\ X^n \in C_T(S_r^c) \text{ for } m < \forall n \}$

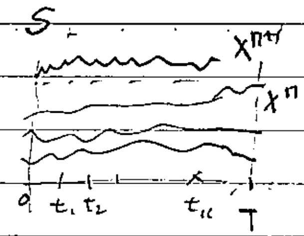


S_r の外にあるパス. の中で. 一番小さな. ラベル.

"P_μ と $\mathfrak{l}$ に対する仮定"

(Q4) $P_\mu\left(\bigcap_{r=1}^\infty \{m_r(\mathsf{X}) < \infty\}\right) = 1$

$\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ … labeled path の cyl. T. σ-fld.



<u>L 4</u> (Q1) − (Q4) ⇒

$$\ell_{path}^{-1}(\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}})) \subset \tilde{\mathcal{J}}_{path}(S_1) \qquad P_\mu\text{-a.s.}$$

<u>Pf.</u> $A \in \bigcup_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[X_{\mathbf{t}}^{n*}] \Rightarrow A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[X_{\mathbf{t}}^{n*}]$ ($\exists\, \mathbf{t}=(t_1,\dots,t_k)$).
← tail の元 より.

∴ 1° $\ell_{path}^{-1}(A)\cap\{m_r<\infty\} \in \bigvee_{i=1}^{k} \sigma[\pi_{S_r^c}(X_{t_i})] \cap \{m_r<\infty\}$, … $(\forall r)$.

∴ (Q4) と 1° より.

$$\begin{aligned}
\ell_{path}^{-1}(A) &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\ell_{path}^{-1}(A) \cap \{m_r<\infty\}\} \\
&\in \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\bigvee_{i=1}^{k} \sigma[\pi_{S_r^c}(X_{t_i})] \cap \{m_r<\infty\}\} \\
&= \bigvee_{i=1}^{k} \{\bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}(X_{t_i})] \cap \{m_r<\infty\}\}? \\
&= \bigvee_{i=1}^{k} \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}(X_{t_i})] \qquad P_\mu\text{-a.s. by (Q4)} \\
&\subset \tilde{\mathcal{J}}_{path}(\underline{S})
\end{aligned}$$

⇒ MC th より.

<u>Prop 5</u> (Q1) − (Q4) ⇒

(1) $\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}})$ is $P_{\mu\ell}$-trivial. $P_{\mu\ell} = P_\mu \circ \ell_{path}^{-1}$

(2) $\tilde{\mathcal{J}}_{path}(S^{\mathbb{N}}, P_{\mu\ell})$ is indep. of P_μ. ← ビナエ-dyn.

Pf. L2 と L4 より //

config sp ⇒ $\mathfrak{u}$ は m ble?

10 Strong sol. of ISDE

↙ $\underline{H}$ とかかない

$H \subset \underline{\mathsf{S}}_1$, $\quad H^1 = S \times H \qquad \mathfrak{u}(H^1) = H$

$\mathbb{H} = \mathfrak{u}^{-1}(H)$: $\quad \mathfrak{u} : S^{\mathbb{N}} \supset \cdots \to \underline{\mathsf{S}} \qquad (s_1, s_2, \cdots) \mapsto \mathfrak{u}(s) = \sum \delta_{s_i}$

ℓ : label. $\quad \ell_{path}(\underline{X}) = (X^1, X^2, \cdots) \in C_{?}(S^{\mathbb{N}})$

$\underline{X}_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{X_t^i}$, $\quad \underline{X}_t^{i*} = \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j}$,

$\sigma : H^1 \to \mathbb{R}^{d^2}$ $\qquad b : H^1 \to \mathbb{R}^d$. $\qquad \ell$: label.

★
1. $dX_t^i = \sigma(X_t^i, X_t^{i*})\, dB_t^i + b(X_t^i, X_t^{i*})\, dt$
2. $\mathbf{X}_0^i = \ell(\mathsf{s}) =: \mathbf{s}$
3. $\mathbf{X}_t \in \mathbb{H}$ $\qquad$ (ともかく. $\mathbf{X}_t \in \ell(H)$ はダメ.)

ex. Ginibre IBM. $\quad S = \mathbb{R}^2$

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \to \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r \\ i \neq j}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt.$$

$a := \sigma^t\sigma$: 対称行列

RPF μ についての微分方程式 (R1)

(R1) $2b = \nabla_x a + a\nabla_x \log \mu$ | $\nabla_x \log \mu := d^\mu$

を考える。

(R1′) $b = \frac{1}{2}\{\nabla_x a + a\, d^\mu\}$, d^μ: log der. of μ.

T1 (R1) の sol. μ で、(Q1), (R2) − (R7) をみたせば、
次が成立。$\exists S_0$, $\mu^\ell(S_0)=1$, かつ、

(1) (☆) は、$\forall s \in S_0$ ($\forall \mathbf{s} \in \mathcal{U}(S_0)$) に対し、
strong sol. $\mathbb{X} = (X^i)$ を、この sol. は、($X = \sum \delta_{X^i}$ の分布を $P_{\mathbf{s}}$ として)

1° $P_\mu \circ X_t^{-1} \prec \mu$ ($\forall t$) 、μ-rev. diffusion となる。

(2) (☆) の sol. の族 $\{(X, \mathbb{B})\}_{\mathbf{s}\in S_0}$ で、1° をみたすものは、
μ^ℓ-a.s. $\mathbf{s}$ に対し一意。

注. strong uniqueness である。

条件 (R2) − (R3).

(Q1) μ is tail trivial.

(R2) μ is a (Φ, Ψ)-quasi Gibbs m. (Φ, Ψ) is upper semi cont.

·· closability

σ_r^i: density fun. on S_r.

(R3) $\sum_{i=1}^{\infty} i\,\mu(S_r^i) < \infty$, $\sigma_r^i \in L^p(S_r^i, dx_i)$ for $\exists 1<p$. ··

··· quasi-regular.

(R1), (R2) $\longrightarrow$ ξ-値 diffusion. $\{P_\xi\}$.

とり直せば

(R4) $\mathrm{Cap}^\mu(H^c) = 0 \iff P_\xi(X_t \in H \ (\forall t)) = 1 \quad (\forall \xi \in H)$

(R5) $P_\xi(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^i| < \infty \ \ (\forall T, i \in \mathbb{N})) = 1$ for $\forall \xi \in H$.

l_{path} によって, ラベルpath sp. と考.

For $\mathbb{X} \in C_T(\mathbb{H})$, let $\check{\sigma}(x; y_1, \dots) = \sigma(x, \sum \delta_{y_i})$ とおく.

$$\sigma_{\mathbb{X}}^m(x_m, t) = \check{\sigma}(x_1; x_2, \dots x_m, X_t^{m+1}, X_t^{m+2}, \dots)$$

$$b_{\mathbb{X}}^m(x_m, t) = \check{\sigma}(x_1; x_2, \dots x_m, X_t^{m+1}, X_t^{m+2}, \dots).$$

$$\Omega_{\mathbb{X}}^m = \{(x_m, t) \in S^m \times [0T] ;\ (x_m, \mathbb{X}_t^{m*}) \in \mathbb{H}\}$$

(R6) $\forall \mathbb{X} \in C_T(\mathbb{H})$ に対し. $\sigma_{\mathbb{X}}^m$, $b_{\mathbb{X}}^m$ が loc. Lips. cont. in x_m on $\Omega_{\mathbb{X}}^m$ for $\forall m$, $\exists c = c(m, \mathbb{X}^m, T)$,

$$|\sigma_{\mathbb{X}}^m(x_m, t) - \sigma_{\mathbb{X}}^m(y_m, t)| \le c\,|x_m - y_m|$$
$$|b_{\mathbb{X}}^m(x_m, t) - b_{\mathbb{X}}^m(y_m, t)| \le \quad ;$$

(R7) $\sum_{i=1}^{\infty} P_\mu(\sup_{t\in[0,T]} |M_t^i| \ge |X_0^i| - r) < \infty$ for $\forall r \in \mathbb{N}$,

∘ T1 のために. T7.4. を用いる。
T7.4 の条件 (P.1) − (P5) を check する。

L7. (R1) − (R7), (Q1) $\Rightarrow$ (P1) − (P5)

Pf (P1) : [3]
(P2) : SDE の一般論 (古典)

◎ (P3) − (P5) のために. Prop 9.5 をつかう。
(Q1) − (Q4) を check.

(Q2) : OK. μ-rev. diffusion より.
(Q3) : (R4) より.

(Q4) の pf : Lyons - Zheng 分解 より, $\left[\begin{array}{l}\hat{M}_t^i = M_{T-t}^i(\gamma_T) - M_T^i(\gamma_T). \\ \gamma_T(w)(t) = w(T-t)\end{array}\right.$

$$X_t^i - X_0^i = \frac{1}{2}\{M_t^i + \hat{M}_t^i\}, \quad \forall t. \text{ under } P_\mu.$$

∘ $P_\mu(|X_t^i| \in S_r \ \exists t \in [0.T])$, $\quad s_i = X_0^i$ とおく.

$\leq P_\mu(|X_t^i - X_0^i| \geq |S_i| - r \quad \exists t)$

$\leq P_\mu(\sup_{[0.T]} |M_t^i| \geq |S_i| - r) + P_\mu(\sup_{[0.T]} |\hat{M}_t^i| \geq |S_i| - r)$

$= 2 P_\mu(\sup |M_t^i| \geq |S_i| - r)$

∴ (R7) より. $\sum_{i=1}^{\infty} P_\mu(|X_t^i| \in S_r \quad \exists t) < \infty.$

∴ Borel - Cantelli's lem,

$$P_\mu(\varlimsup_{i\to\infty}\{|X_t^i| \in S_r \quad \exists t\}) = 0 \quad //$$

(a1) をゆるめる.

∘ r.c.p. $\mu_{\mathfrak{s}} = \mu(\cdot \mid \mathcal{T}(\mathfrak{S}))(\mathfrak{s})$.

L.3 Ass. μ is a g-Gibbs m.

$\Rightarrow$ $\mathcal{T}(\mathfrak{S})$ is $\mu_{\mathfrak{s}}$-trivial for μ-a.s. $\mathfrak{s}$.

注 自明ではない. Gibbs $\Rightarrow$ Georgii.

L.4. Ass. μ sat. (R1)–(R7) $\Rightarrow$

μ_t sat (R1)–(R7) for μ-a.s. $\mathfrak{s}$ //

T5 Ass. (R1)–(R7) $\Rightarrow$

(1) ISDE * have a strong sol $\{X_s\}_{s \in S_0}$,

The associated P_μ is a μ-rev diffusion.

(2) S_0 can be decomposed as

$$S_0 = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mathfrak{S})} S_{0,\mathfrak{t}} \qquad (\mathcal{T}(\mathfrak{S})\text{-mble な. 分割})$$

s.t. $\mu_t(S_{0,t}) = 1$, $\mathfrak{S}_{0,t} = \mathcal{U}(S_{0,t})$.

更に. $\{(X, P_{\mathfrak{s}})\}_{\mathfrak{s} \in S_{0,t}}$ is a $\mu_{\mathfrak{s}}$-rev. diffusion. t.e.r.

2° $P^t_{\mu_{\mathfrak{s}}} \prec \mu_{\mathfrak{s}}$ for $\forall t$ for μ-a.s. $\mathfrak{t}$.

(3). ISDE * の解で. 2° をみたすものは 一意.

" tail をかえないものは 一意".

10回目に話した訂正 H25 10 18 金

μ : Ginibre. $\mathcal{E}^{\mu} = \int_{S} \mathbb{D}[\cdot\,] \, d\mu$. $L^2(\mu)$, $\underline{X} = \sum \delta_{X^i}$.

- $\underline{Y} = \sum_i \delta_{X^{i+1} - X^1} = \sum \delta_{Y^i}$

$X = X^1$

μ_0 = Palm.

よむでるために

- $\mathcal{E}_Y = \int_{S} D[\cdot\,] + \mathbb{D}[\cdot\,] \, d\mu_0$, $\tilde{\mathcal{E}}_Y = \int_{S} \mathbb{D}[\cdot\,] \, d\mu_0$

$dY_t^i = \sqrt{2}\,\hat{B}_t^i + \frac{Y_t^i}{|Y_t^i|^2} + \lim_r \sum_{|\cdot|<r} \frac{Y_t^j}{|Y_t^j|^2} dt + \lim_r \sum_{|Y_t^i - Y_t^j| < r} \frac{Y_t^i - Y_t^j}{|Y_t^i - Y_t^j|^2} dt$

$dY_t^i = B_t^i + \frac{Y_t^i}{|Y_t^i|^2} + \lim \sum \frac{Y_t^i - Y_t^j}{|Y_t^i - Y_t^j|^2} dt.$

方向微分

- $\mathcal{E}_{XY} = \int_{S \times S} (\nabla_x - D)[\cdot\,] + \;\; m(C_e(\xi), z)\, d\xi)$

$\int \delta' f \, d\mu$ $m' \cdot DCe$.

$dX_t = dB_t^1 - \lim \sum_{|Y_t^j|<r} \frac{Y_t^j}{|Y_t^j|^2} dt$

$= -\int \delta f \, d\mu$

$= -\delta'(x)$ $m'z$ $(f'(C_e(\xi)))$

訂正.

方向微分

- $\mathcal{E}_{XYZ} = \int_{S \times S \times S} (\nabla_x - D - \nabla_z)[\cdot\,] + \mathbb{D}[\cdot\,] \quad dx\,\mu_0(d\xi)\,\delta_{Ce(\xi)}(dz)$

$x + z = x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes z$. ✓ サボーティベ $D[x+z, x+z] = 0$. $\mathbb{D}[x+z, x+z] = 0$.

$\therefore \mathcal{E}_{XYZ}(x-z, x-z) = 0$ $(\nabla_x - D - \nabla_z)[x+z, x+z] = (\nabla_x - \nabla_z)[x+z, x+z] = 0.$

Ito formula.

$\therefore X_t - Z_t = X_0 - Z_0$. ($\because$ $X_0 = 0$ とすると. $X_t - Z_t = -Z_0$)

注. X_t は Ξ の fun でない ($\underline{Y}_t$ の fun でない). しかし. $Z_t = Ce(\underline{Y}_t)$

しかし. X_t は. $\underline{Y}_t$ の AF. … どなた

X_t と はいうは ムホンゲー だが 初期条件で 決めると. あとは 保持される。

X
X_t