Ginibre 干渉ブラウン運動:

平面内の 2D クーロン無限粒子系の確率幾何と力学

(Stochastic geometry and dynamics of infinite log-gases in the plane)

`version 9`

長田博文

京都大学集中講義

2010 年 12/6/月–12/10/金

平成 28 年 5 月 9 日

概 要

平面の中の無限個の粒子が 2 次元クーロンポテンシャル (対数関数) で相互作用するシステムを考える。このようなシステムを記述する確率測度の存在は非自明で、特別なポテンシャルの強さ ($\beta = 2$) の場合だけが構成されている。この測度は、非エルミート・ガウシアンランダム行列の固有値の分布の熱力学極限、つまり Ginibre ensemble の極限なので、ここでは Ginibre random point field と呼ぶ。尚、直線上の対応物は Dyson's モデルとよばれガウシアンランダム行列 (GOE, GUE, GSE) の固有値の熱力学極限である。

従来考察されてきたのは、Lebesgue 測度を密度とする Poisson ランダム測度や、Ruelle クラスの干渉ポテンシャルをもつ Gibbs 測度であった。Poisson ランダム測度は理想気体を表現する、無限粒子系の空間の Lebesgue 測度の役割を果たすものであり、Gibbs 測度はそれに近いクラスである。ここで、Gibbs 測度とは、与えられた干渉ポテンシャルをもつ無限粒子系を記述する測度を、その条件付き確率が満たすべき方程式 (Dobrushin-Lanford-Ruelle 方程式) で記述するものだが、その構成は、70 年前後に Ruelle クラスポテンシャルという超安定性と、正則性と呼ばれる遠方での可積分性のもとで確立した。しかし、クーロンポテンシャルは遠方で非可積分のため、この標準的なクラスから除外されていた。

この講演では、いかに無限クーロン系（Ginibre random point field）が、Gibbs 測度と異なる世界を形成するか、確率幾何および確率力学の視点から論じる。

目 次

0 始めに

このノートは、2010 年に京都大学で行った集中講義に基づいている。ただし、その後、論文として出版される過程で、証明が簡単になったものも多く、それらの証明は省いている。原稿は現在作成中で、version をタイトルの下に記載する。今後、時間があるときに、原稿を付け加え整理していく。

この原稿は、2013 年の集中講義の講義ノートに比べて、Kipnis-Varadhan 理論とクーロン無限粒子系に話を絞っている。この話題の最終到達点は、Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性、さらに、逆温度 β に対する、相転移現象だが、これらについては、準備ができれば、追加していきたい。

なお、2013 年のノートでは、無限次元確率微分方程式の構成法に関する、新理論を中心に話した。この結果もかなり使用するが、このノートではあまり説明していない。

2 章と 3 章は、一般的な配置空間の説明、特に、無限粒子系の解析学を実行するうえで、主要概念である、点過程の「準 Gibbs 性」と「対数微分」を導入している。

RIMS 別冊に投稿した論文も同様に掲載するので、ご覧いただければ幸いです。本来、換骨奪胎してこのノートの一部にしたいのだが、まだ、できていない。

1 序

s:k1

平面を $\mathbb{R}^2$ および $\mathbb{C}$ で表す。平面内に**無限個の粒子**が分布しているとして、その幾何的および力学的性質を追求したい。

粒子間には、クーロン力による相互作用が働いている。$\cdots$（作成中）

2 配置空間・点過程・相関関数

s:1

空間 S 内の有限もしくは可算無限個の粒子を表す空間を設定する。S とは粒子が動き回っている空間で、一般的な枠組みとしては S を Polish 空間とする。Polish 空間とは、完備可分距離空間と位相同型な空間である。「と位相同型な」とは持って回った言い方だが、便利である。例えば、$(0,1)$ は通所のユークリッド距離で完備距離空間とはならないが、$\mathbb{R}$ と位相同型だか

らポーランド空間となる。確率論は通常ポーランド空間位で設定するのが、一般性と具体性のバランスがうまくとれている。尚、ポーランド空間のボレル可測部分集合は、（部分位相の下で）再びポーランド空間となる。

ただし、この本では S は $\mathbb{R}^d$、$\mathbb{C}$ もしくは $[0,\infty)$ だけが登場する。

$\mathsf{M}(\mathrm{S})$ で S のラドン測度全体を表す。ここでラドン測度とは、可測空間 $(\mathrm{S},\mathcal{B}(\mathrm{S}))$ 上の測度でコンパクト集合に対し有限の値を取るものである。ここで $\mathcal{B}(\mathrm{S})$ は S のボレル集合族（開集合を含む最小の σ 加法族）を表す。$\mathsf{M}(\mathrm{S})$ には、漠位相（Vague topology）と弱位相（weak topology）という、次の 2 種類の位相をしばしば考える。

dfn:11
定義 2.1.

粒子の空間として、2 種類の空間が自然に考えられる。一つは、すべての粒子を区別する場合で、これは粒子の個数分だけ S の直積をとった空間である。例えば加算無限個の粒子に、順に $1,2,3,\ldots$ とラベルを付けた場合は、$\mathrm{S}^{\mathbb{N}}$ となる。もう一つは、すべての粒子を区別しない空間で、配置空間と呼ばれる。

粒子を区別した場合ラベル粒子系、また区別しない場合アンラベル粒子系と呼ぶことにする。

より正確に述べる。

空間 S 内の n 個の粒子は S^n の元と扱って差し支えないが，無限粒子系の場合，一般に粒子にラベルを付け S^∞ の元として扱うと平衡状態を表現する確率測度を構成することが難しくなる．そこで個々の粒子を区別しない配置空間を導入する必要が生じる．

配置空間

dfn:21
定義 2.2. Polish 空間 S 上の非負整数値ラドン測度 s を配置 (configuration) といい，S の配置全体 S に、漠位相 (vague topology) を入れたものを配置空間という．.

定義から s は

:12
$$\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \tag{2.1}$$

という形をしている。ここで $\{s_i\}$ は集積点を持たない S の点列で、δ_a は点 a に集中したデルタ測度である。$\{s_i\}_i$ は S 内のラベルを付けない可算個の粒子系を表現する．ラベル無粒子系の表現は集合として表現するなど、異なる流儀もあるが測度として表現すると下記に説明するように自然に位相が入るので便利である。

各 $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$ に対して $\mathsf{s}(A)$ は A 内の粒子の個数を表現し、非負整数および無限大の値をとる確率変数になる。仮定から定義から s はラドン測度だから、コンパクト集合に含まれる粒子数は常に有限になる．定義から、

:21
$$\mathsf{S} = \{\mathsf{s}\,;\, \mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i},\ \ \mathsf{s}(K) < \infty \quad (\forall \text{ コンパクト } K \subset \mathrm{S})\} \tag{2.2}$$

r:11
注意 2.1. $\mathsf{s}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{\frac{1}{i}}$ とする。この時 s は $(0,\infty)$ 上の配置空間の元だが、$[0,\infty)$ 上の配置空間の元ではない。実際、閉区間 $[0,1]$ は $[0,\infty)$ のコンパクト集合で、かつ $\mathsf{s}([0,1])=\infty$ となる。

S は Polish 空間となる．S がコンパクトなら S もコンパクトになる．

$\mathrm{S}=\mathbb{R}^d$ の時，S の部分集合 A が相対コンパクトである必要十分条件は，ある自然数列 $\{a_r\}$ が存在し $A\subset\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}\,;\mathsf{s}(D_r)\le a_r\}$ $(\forall r\in\mathbb{N})$ となることである[**?**][resnick]. ただし $D_r=\{|x|\le r\}$.

S の漠位相について、次の事実がよく知られている。

l:21
補題 2.1. $A\in\mathcal{B}(\mathrm{S})$、$A$ 上の配置空間を A とする。猿位相のもとで次が成立する。

(1) A が *Polish* 空間なら A も *Polish* 空間である。

(2) A が閉集合なら A も閉集合である。

(3) A がコンパクトなら A もコンパクトである。

[1]

l:22
補題 2.2. $A\in\mathcal{B}(\mathrm{S})$、$A$ 上の配置空間を A とする。d を S の距離、$s_0\in\mathrm{S}$ とし $B_r=\{d(x,s_0)<r\}$ とおく。A が相対コンパクトである必用十分条件はある相対コンパクト集合の増大列 $\{K_r\}$ が存在し

:22
$$A\subset\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}\,;\,\mathsf{s}(B_r)\le a_r\ (\forall r)\}\tag{2.3}$$

$(\mathsf{S},\mathcal{B}(\mathsf{S}))$ 上の確率測度を**点過程** (point process) あるいは確率点場 (random point field) という.

Poisson 点過程　m を $(S,\mathcal{B}(S))$ のラドン測度とする．S 上の点過程 μ は次の条件を満たす時，強度測度 m の Poisson 点過程と呼ばれる．

:poi1
$$\mathsf{s}(A)\text{ は }\mu\text{ の下で平均 }m(A)\text{ の Poisson 分布に従う，ただし }m(A)<\infty\tag{2.4}$$
:poi2
$$\{A_1,\dots,A_n\}\text{ が互いに素ならば，}\{\mathsf{s}(A_1),\dots,\mathsf{s}(A_n)\}\text{ は独立}\tag{2.5}$$

特に $\mathrm{S}=\mathbb{R}^d$ で強度測度 m が Lebesgue 測度の時，付随する Poisson 点過程は様々な不変性をもち，配置空間上の Lebesgue 測度の役割を果たす.

周期的点過程　$\mathrm{S}=\mathbb{R}^d$ する。d 個の独立なベクトル $\{v_1,\dots,v_d\}$ で張られる d 次元トーラス $\mathbf{T}=\{x\in\mathbb{R}^d\,;\,x=\sum_{i=1}^d\alpha_i v_i,\ 0\le\alpha_i<1\}$ 上の一様分布を λ とする。写像 $f:\mathbf{T}\to\mathsf{S}$ を $f(x)=\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d}\delta_{x+\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}}$ で与える。ただし $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_d)$、$\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積である。このとき像測度 λ^f を周期的点過程という。

Lebesgue 測度を強度測度とする Poisson 点過程 Λ と周期的点過程はともに $\mathbb{R}^d$ の配置空間の上の平行移動不変な点過程だが、性質は両極端である。Λ は最もランダムな点過程であるのに対して、周期的点過程は、本質的に d 次元の Lebesgue 測度のランダムネスしか持たない、有限次元的な点過程である。

これら二つを両極端な場合として、その中間的な場合を考察していく。

[1]混乱している。$\mathbb{R}^d$ ならいいが、ポーランド空間だとどうしよう

相関関数・密度関数　m を S 上のラドン測度とする．対称な局所可積分関数 $\rho^n : S^n \to [0,\infty)$ は (2.6)を満たす時，点過程 μ の m に対する n 点相関関数 (n point correlation function) と呼ばれる．

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_j^{k_j}} \rho^n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n m(dx_i) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^j \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!}d\mu \tag{2.6}$$

ここで $A_1,\ldots,A_j \subset \mathrm{S}$ は互いに素な可測集合，$k_1,\ldots,k_j$ は $k_1+\cdots+k_j=n$ を満たす自然数とする．$\mathsf{s}(A_i)-k_i<0$ の時は，$\mathsf{s}(A_i)!/(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!=0$ とみなす．次の (2.7)を満たす時，$\{\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を相関関数にもつ μ は一意である[?]．

$$\sum_{n=0}^\infty \{\frac{1}{n!}\int_{A^n}\rho^n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n m(dx_i)\}^{-\frac{1}{n}} = \infty \quad (\forall A : m(A)<\infty) \tag{2.7}$$

$\mu(\mathsf{s}(A)<\infty)=1$ とする．対称な非負関数 $\sigma_A^n : A^n \to [0,\infty)$ は (2.8)を満たす時，点過程 μ の m に対する A 上の n 密度関数 (n density function) とよばれる．

$$\mu_A(B) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_{\mathfrak{u}_n^{-1}(B)} \sigma_A^n(\mathbf{x}_n)\prod_{i=1}^n m(dx_i) \tag{2.8}$$

ここで $\mu_A := \mu\circ\pi_A^{-1}$，ただし $A\in\mathcal{B}(S)$ に対して，$\pi_A : \mathsf{S}\to\mathsf{S}$ は

$$\pi_A(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot\cap A)$$

を表す．更に，B は A 上の配置空間の可測部分集合，$\mathbf{x}_n=(x_1,\ldots,x_n)$，$\mathfrak{u}_n : A^n\to\mathsf{S}$ は $\mathfrak{u}_n(\mathbf{x}_n)=\sum_{i=1}^n\delta_{x_i}$ である．定義から

$$1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_{A^n}\sigma_A^n(\mathbf{x}_n)\prod_{i=1}^n m(dx_i) \tag{2.9}$$

この正規化による密度関数は，Janossy 密度と呼ばれる．相関関数の定義から，

$$\rho^n(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!}\int_{A^i}\sigma_A^{n+i}(\mathbf{x}_{n+i})\prod_{j=1}^i m(dx_{n+j}) \quad (\mathbf{x}_n\in A^n) \tag{2.10}$$

ある定数 $c_1>0,\, c_2<1$ に対し $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{A^n}\rho^n(\mathbf{x}_n)c_1^n n^{-c_2 n}<\infty$ を満たせば，逆に

$$\sigma_A^n(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i}{i!}\int_{A^i}\rho^{n+i}(\mathbf{x}_{n+i})\prod_{j=1}^i m(dx_{n+j}) \tag{2.11}$$

次の測度の弱収束条件[18, Lem. 11.1] は，行列式測度に対して有効である．

補題 2.3. $\mathrm{S}=\mathbb{R}$ の時，点過程 μ_{n}，μ の相関関数 $\{\rho_{\mathsf{n}}^m\}$，$\{\rho^m\}$ が (2.12) (2.13)を満たせば $\{\mu_{\mathsf{n}}\}$ は μ に弱収束する．ここで $c_1>0,\, c_2<1$ である．

$$\sup_{\mathsf{n}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{D_r^n}\rho_{\mathsf{n}}^n(\mathbf{x}_n)c_1^n n^{-c_2 n}<\infty \quad (\forall r\in\mathbb{N}) \tag{2.12}$$

$$\lim_{\mathsf{n}\to\infty}\rho_{\mathsf{n}}^n(\mathbf{x}_n) = \rho^n(\mathbf{x}_n) \quad \textit{for a.e. } \mathbf{x}_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.13}$$

相関関数と平均・分散　$\langle f, \mathsf{s}\rangle = \int_S f d\mathsf{s} = \sum_i f(s_i)$ と表す．ただし $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \in \mathsf{S}$．$f \in C_0(S)$ あるいは，より一般に積分が意味を持つ時，次が成立する．

$$\mathrm{E}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S f(x)\rho^1(x)m(dx) \tag{2.14}$$

$$\mathrm{E}^{\mu}[|\langle f, \mathsf{s}\rangle|^2] = \int_S |f(x)|^2\rho^1(x)m(dx) + \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)\rho^2(x,y)m(dx)m(dy) \tag{2.15}$$

$$\mathrm{Var}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S |f(x)|^2\rho^1(x)m(dx) + \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)\mathcal{T}(x,y)m(dx)m(dy) \tag{2.16}$$

ここで $\mathcal{T}(x,y) = \rho^2(x,y) - \rho^1(x)\rho^1(y)$ は 2cluster 関数と呼ばれる．([?] と [?] では定義の符号が違う)．μ が Hermite 対称な核 $K(x,y)$ から生成される行列式測度ならば，

$$\mathrm{Var}^{\mu}[\langle f, \mathsf{s}\rangle] = \int_S |f(x)|^2 K(x,x)m(dx) - \int_{S^2} f(x)\bar{f}(y)|K(x,y)|^2 m(dx)m(dy)$$

Palm 測度・Campbell 測度　$\mu_{\mathbf{x}}$ が $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ で条件付けた μ の Palm 測度とは，次で与えられる μ の条件付き確率のことをいう．

$$\mu_{\mathbf{x}} = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i} |\ \mathsf{s}(\{x_i\}) \geq 1 \text{ for } i = 1, \ldots, k). \tag{2.17}$$

μ^k が k-Campbell 測度とは，次式で定義される $\mathrm{S}^k \times \mathsf{S}$ 上の測度のことをいう．

$$\mu^k(A \times B) = \int_A \mu_{\mathbf{x}}(B)\rho^k(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^{k} m(dx_j). \tag{2.18}$$

3　Gibbs 測度・行列式測度

ポーランド空間 S 内を運動する粒子が，自由ポテンシャル $\Phi : \mathrm{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で媒質 S と相互作用し，また干渉ポテンシャル $\Psi : \mathrm{S} \times \mathrm{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で粒子間の相互作用をするとする．$\Psi(x,y) = \Psi(y,x)$ とする．この時，形式的な Hamiltonian$\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}(\mathsf{s}) = \sum_i \Phi(s_i) + \sum_{i<j} \Psi(s_i, s_j) \tag{3.1}$$

で与えられ，対応する粒子系の平衡分布は，直感的には次式で記述される．

$$\mu(d\mathsf{s}) = Z^{-1}e^{-\mathcal{H}(\mathsf{s})} \prod_i ds_i = Z^{-1}e^{-\sum_i \Phi(s_i) - \sum_{i<j}\Psi(s_i,s_j)} \prod_i ds_i \tag{3.2}$$

しかし無限体積の時，例えば $\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ で $\int_S e^{-\Phi}ds = \infty$ の時，表示に Lebesgue 測度の無限直積を含むため，(3.2)はそのままでは正当化できない．そのためまず無限粒子系を個々の粒子を区別しない配置空間の元として捉える．以下，無限粒子系の平衡分布を構成する二つの方法を説明する．

Gibbs 測度　条件付き確率を用いて (3.2)を正当化する方法について述べる．以下，$\mathrm{S}=\mathbb{R}^d$，$D_r=\{|x|\le r\}$ とする．$\pi_r(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap D_r)$，$\pi_r^c(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap D_r^c)$ とおく．

$$\mathcal{H}_r(\mathsf{s})=\sum_{s_i\in D_r}\Phi(s_i)+\sum_{i<j,s_i,s_j\in D_r}\Psi(s_i,s_j) \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}_{r,\xi}(\mathsf{s})=\mathcal{H}_r(\mathsf{s})+\sum_{s_i\in D_r,\ \xi_j\in D_r^c}\Psi(s_i,\xi_j) \qquad (\xi=\sum_i\delta_{\xi_i}\in\mathsf{S}) \tag{3.4}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の点過程 μ が (Φ,Ψ)**-カノニカル Gibbs 測度**とは $\forall r,m\in\mathbb{N}$，μ-a.s. ξ に対し

$$\mu(\pi_r\in\cdot|\pi_r(D_r)=m,\pi_r^c(\mathsf{s})=\pi_r^c(\xi))=Z^{-1}e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}(\mathsf{s})}1_{\mathsf{S}_r^m}(\mathsf{s})\Lambda(d\mathsf{s}) \tag{3.5}$$

ここで $\mathsf{S}_r^m=\{\mathsf{s}(D_r)=m\}$，$\Lambda$ は Lebesgue 測度を強度とする Poisson 点過程である．(3.5)の形の条件付き確率とポテンシャルの間の関係式を **DLR 方程式** (Dobrushin-Lanford-Ruelle equation) という．Ψ は超安定かつ Ruelle の意味で正則の時，Ruelle クラスのポテンシャルという[?]．Ruelle クラスのポテンシャルを持つ Gibbs 測度は，Poisson 点過程に近い性質を持つクラスである．一方，d 次元 Coulomb ポテンシャルは，$n\ge d-2$ の時 $\mathbb{R}^n$ において Ruelle の意味の正則性を満たさない．この時，μ が平行移動不変な点過程ならば，μ-a.s. ξ に対して (3.4)の最終項が発散し，DLR 方程式に意味がつかない．従って，カノニカル Gibbs 測度とならない．

行列式測度　m を S のラドン測度，$K:\mathrm{S}^2\to\mathbb{C}$ とする．m に対する相関関数が

$$\rho^n(\mathbf{x}_n)=\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n \tag{3.6}$$

で与えられる点過程 μ を (K,m) で生成される行列式測度 (determinantal measure) という．行列式点過程，行列式確率点場とも呼ばれる．

定理 3.1 ([?, ?])．(K,m) が (3.7)–(3.9)を満たす時，(K,m) で生成される行列式測度 μ が一意に存在する．また (3.7)と (3.8)を満たす K が，行列式測度を生成するための必要十分条件は (3.9)である．

$$K(x,y)=\overline{K(y,x)} \qquad (K\text{ は }\textit{Hermite}\text{ 対称}) \tag{3.7}$$

$$\mathsf{K}\text{ は }L^2(S,m)\text{ 上，局所 }\textit{trace}\text{ クラス作用素} \tag{3.8}$$

$$0\le\mathsf{K}\le\mathrm{Id} \qquad (\text{つまり }\mathrm{Spec}(\mathsf{K})\subset[0,1]) \tag{3.9}$$

ここで $\mathsf{K}f(x)=\int_S K(x,y)f(y)m(dy)$．(3.8)は K を任意のコンパクト集合 A に制限した時，K が $L^2(A,m)$ 上の *trace* クラスになることを意味する．

空間 S の可測部分集合 A 上の配置空間を S_A と表す．S_A を自然に S の部分集合とみなす．行列式測度 μ の S_A への制限は，再び行列式測度になる．実際，μ が (K,m) で生成される行列式測度の時，像測度 $\mu\circ\pi_A^{-1}$ は (K_A,m_A) で生成される (A 上の) 行列式測度となる．ただし $K_A(x,y)=1_A(x)K(x,y)1_A(y)$，$m_A(dx)=1_A(x)m(dx)$．また Palm 測度も行列式測度である．

定理 3.2 ([?]). (K,m) が (3.7)–(3.9) を満たすとし，μ を (K,m) で生成される行列式測度とする．この時，点 $a\in \mathrm{S}$ で条件付けた *Palm* 測度 μ_a は (K_a,m) で生成される行列式測度になる．ただし K_a は次式で与えられる．

$$K_a(x,y)=K(x,y)-\frac{K(x,a)K(a,y)}{K(a,a)} \tag{3.10}$$

核関数の重要なクラスは $\mathbb{R}$ の直交多項式で与えられる．$w:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ とする．$\{p_m\}_{m=0}^{\mathsf{n}-1}$ を monic(最高次の係数が 1) な多項式の列で p_m は m 次多項式，また測度 wdx に対して直交するとする．この時

$$K^{(\mathsf{n})}(x,y)=\{w(x)w(y)\}^{\frac12}\sum_{m=0}^{\mathsf{n}-1}\frac{p_m(x)p_m(y)}{\int p_m(t)^2w(t)dt} \tag{3.11}$$

とおくと，$K^{(\mathsf{n})}$ は定理 3.1 の条件を満たし，$(K^{(\mathsf{n})},dx)$ で生成される行列式測度が存在する．次の和公式は $\mathsf{n}\to\infty$ を計算する鍵となる [?].

定理 3.3 (Christoffel-Darboux の公式)**.**

$$K^{(\mathsf{n})}(x,y)=\frac{\{w(x)w(y)\}^{\frac12}}{\int p_{\mathsf{n}-1}(t)^2w(t)dt}\cdot\frac{p_{\mathsf{n}}(x)p_{\mathsf{n}-1}(y)-p_{\mathsf{n}-1}(x)p_{\mathsf{n}}(y)}{x-y} \tag{3.12}$$

(3.12)から直ちに対角成分の表示を得る．

$$K^{(\mathsf{n})}(x,x)=\frac{w(x)}{\int p_{\mathsf{n}-1}(t)^2w(t)dt}\cdot\{p'_{\mathsf{n}}(x)p_{\mathsf{n}-1}(x)-p'_{\mathsf{n}-1}(x)p_{\mathsf{n}}(x)\} \tag{3.13}$$

測度の対数微分・準 Gibbs 測度　無限体積 Gibbs 測度を Coulomb ポテンシャルに拡張するために 2 つの概念を導入する．以下 $S=\mathbb{R}^d$，μ は S 上の点過程とする．

- $\mathsf{d}^{\mu}=(\mathsf{d}^{\mu}_m)_{m=1,\dots,d}$ が次の条件を満たす時，μ の対数微分という [17]：

$$\mathsf{d}^{\mu}\in\{L^1_{\mathrm{loc}}(\mu^1)\}^d \tag{3.14}$$

$$\int_{S\times\mathsf{S}}\mathsf{d}^{\mu}fd\mu^1=-\int_{S\times\mathsf{S}}\nabla_xfd\mu^1\quad(\forall f\in C_0^\infty(S)\otimes\mathcal{D}_\circ). \tag{3.15}$$

ただし $\nabla_xf=(\frac{\partial f(x,\mathsf{s})}{\partial x_m})_{m=1,\dots,d}$，$\mu^1$ は (2.18)で定義された 1-Campbell 測度，$\mathcal{D}_\circ$ は S 上の局所的かつ滑らかな関数全体である．対数微分は，直感的には $\mathsf{d}^{\mu}=\nabla_x\log\mu^1$ であり，一つの粒子 x (tagged particle) が，他の無限個の粒子 $\mathsf{s}=\sum\delta_{s_i}$ からどのような力を受けるかを表現している．μ が (Φ,Ψ)-カノニカル Gibbs 測度ならば，

$$\mathsf{d}^{\mu}(x,\mathsf{s})=-\nabla_x\Phi(x)-\sum_i\nabla_x\Psi(x,s_i) \tag{3.16}$$

DLR 方程式 (3.5)と異なり，この表記は Ψ が Coulomb ポテンシャルでも無限粒子系に対して意味を持ちうる．sine 点過程や Ginibre 点過程の場合を後で計算する．

- μ が次の条件を満たす時，(Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度という [18]：ある自然数の増大列 $\{b_r\}$ と測度の列 $\{\mu^m_{r,k}\}$ が存在し，各 $r,m\in\mathbb{N}$ に対し $\mu^m_{r,k}$ が次を満たす：

$$\mu^m_{r,k}\le\mu^m_{r,k+1}\quad(\forall k),\quad\lim_{k\to\infty}\mu^m_{r,k}=\mu(\cdot\cap\mathsf{S}^m_{b_r})\quad\text{weakly}, \tag{3.17}$$

更に $\forall r, m, k \in \mathbb{N}$ と $\mu_{r,k}^{m}$-a.e. $\mathsf{s} \in \mathsf{S}$ に対して，

$$c_1^{-1} e^{-\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})} 1_{\mathsf{S}_{b_r}^m}(\mathsf{x}) \Lambda(d\mathsf{x}) \leq \mu_{r,k,\mathsf{s}}^{m}(d\mathsf{x}) \leq c_1 e^{-\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})} 1_{\mathsf{S}_{b_r}^m}(\mathsf{x}) \Lambda(d\mathsf{x}). \tag{3.18}$$

ここで c_1 は $r, m, k, \pi_{\{|x|>b_r\}}(\mathsf{s})$ に依存する正定数，更に

$$\mu_{r,k,\mathsf{s}}^{m}(d\mathsf{x}) = \mu_{r,k}^{m}(\pi_{\{|x|\leq b_r\}} \in d\mathsf{x} | \ \pi_{\{|x|>b_r\}}(\mathsf{s})). \tag{3.19}$$

Λ，$\mathsf{S}_{b_r}^m$，$\mathcal{H}_{b_r}(\mathsf{x})$ は Gibbs 測度の節で定義されている．

カノニカル Gibbs 測度は準 Gibbs 測度である．Lebesgue 測度を基礎の測度にする行列式測度はすべて準 Gibbs 測度であると期待されるがまだ証明されていない．Yoo[?] により核 K が $0 \leq \mathsf{K} < 1$，つまり固有値 1 を持たない時，行列式測度が Gibbs 測度であることが示されている．しかしランダム行列に関係するものは無限体積において 1 を固有値として含む．尚，sine 点過程や Ginibre 点過程については，準 Gibbs 性が示されている．μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度であり，(Φ, Ψ) が上半連続ならば自然な Dirichlet 形式を用いて μ 可逆な拡散過程が構成できる[18].

4 2D Coulomb Potential

平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} =: S$ 無限個の粒子

*1 2D Coulomb potential

$$\Psi(x, y) = -\beta \log |x - y| \tag{4.1}$$

*2 平衡分布（直観的には）

$$m_\beta(dx, ...) = \frac{1}{Z_\beta} \prod_{i<j}^{\infty} |x_i - y_j|^\beta \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \tag{4.2}$$

...non rigorous しかし、有効。

*3

$$X = (X_t^1, X_t^2, ...) \in S^{\mathbb{N}} \tag{4.3}$$

定理 4.1 ([18])**.** μ_{Gin} は、$(0, \beta \log |x - y|)$-*quasi-Gibbs* 測度。

μ_{Gin} が準 Gibbs 測度であることは分かったから、次に、その対数微分を計算する。Gibbs 測度の場合、DLR 方程式でポテンシャルとの対応関係が明示される。しかし、クーロンポテンシャルの場合は、DLR 方程式が、そのままでは意味を持たなくなる。しかし、対数微分は意味を持つ。

定理 4.2 ([17])**.** μ_{Gin} の対数微分 $\mathsf{d}^{\mu_{\mathrm{Gin}}}$ は、

$$\mathsf{d}^{\mu_{\mathrm{Gin}}}(x,\mathsf{s}) = 2\lim_{R\to\infty}\sum_{|x-s_i|<R}\frac{x-s_i}{|x-s_i|^2}$$

更に、第 *2* の表現を持つ。

$$\mathsf{d}^{\mu_{\mathrm{Gin}}}(x,\mathsf{s}) = -2x + 2\lim_{R\to\infty}\sum_{|s_i|<R}\frac{x-s_i}{|x-s_i|^2}$$

このように、Ginibre 点過程は、対数微分！で、表示できる。更に、対数微分がわかれば、一般論[17] から、Ginibre 干渉ブラウン運動を記述する、無限次元確率微分方程式が決まる。

これは、再び、一般論の応用だが、証明のカギとなるのは、無限個の両立条件を満たす、Dirichlet 空間の列を構成することである。その時の、鍵は、次のキャンベル測度である。

定義 4.1. μ の k-キャンベル測度とは、$\mathsf{S}\times\mathsf{S}$ 上の確率測度で、次式で与えられる。

$$\mu^{[k]} = \rho^k(x_1,\dots,x_k)\mu_{x_1,\dots,x_k}(d\mathsf{s})dx_1,\dots,dx_k \tag{4.4}$$

ここで ρ^k は、μ の k 点相関関数、また、μ の縮約 Palm 測度である。

5 SDE 表現と対数微分

5.1 Ginibre 干渉ブラウン運動の確率微分方程式表現

μ Ginibre 点過程

$F(\mu) = (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu, L^2(\mu))$

定理 5.1. (X_t^i) は次の無限次元確率微分方程式の一意的強解である。

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r,\ i\neq j}\frac{X_t^i-X_t^j}{|X_t^i-X_t^j|^2}dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{5.1}$$

第二の方程式が存在する。

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^j|<r,\ i\neq j}\frac{X_t^i-X_t^j}{|X_t^i-X_t^j|^2}dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{5.2}$$

6 Palm 測度の特異性

定義 6.1. 一般に、点過程 μ が、x で条件付けた縮約 Palm 測度 (reduced Palm measure) とは、

$$\mu_x = \mu(\cdot - \delta_x | \mathsf{s}(x)\geq 1) \tag{6.1}$$

で定義される、正則条件付き確率であることである。ここで、$\cdot - \delta_x$ という項は、$\mathsf{s}(x)\geq 1$ と条件付けているから、意味がある。

問題[p:1] **6.2.** (1) μ_x と μ は、互いに絶対連続か？　それとも、特異か？

(2) μ_x と μ_y は、互いに絶対連続か？　それとも、特異か？

例[d:71] **6.1** (Poisson 点過程)**.** $\Lambda_0 = \Lambda$ より、互いに絶対連続。

例[d:2] **6.2** (Gibbs 測度)**.** 干渉ポテンシャル Ψ をもつ Gibbs 測度の場合、（形式的には）

$$\mu_0 = \mathrm{const.}\, e^{-\sum_i \Psi(0-s_i) - \sum_{i<j} \Psi(s_i - s_j)} \tag{6.2}$$

[:71b]

より、μ に対して絶対連続。実際、Radon-Nikodym 密度は、

$$\frac{d\mu_0}{d\mu} = \mathrm{const.}\, e^{-\sum_i \Psi(0-s_i)} \tag{6.3}$$

[:71b]

超安定性から、Ψ は下から有界になる。また、遠方で可積分だから、この式は、正当化できる。

(6.3)[:71b]を直感的に説明することは、容易である。また、$\sum_i \Psi(0-s_i) - \sum_{i<j} \Psi(s_i - s_j)$ が、収束し可積分性が成立すれば、そのまま厳密に出来る。実際、Ruelle クラスの干渉ポテンシャルは、この可積分性が保証されている。

対数ポテンシャルでは、そうはいかないのだが、ともかく、同じように考えてみる。つまり、この直感的な表現を Ginibre 点過程の場合に適用してみよう。実際、「Lebesgue 測度の無限直積」 を用いると、元の μ 自身は、

$$\mu = \frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{i<j}^{\infty} |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \tag{6.4}$$

[:71c]

となるが、原点 0 に粒子があれば、

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \frac{1}{\mathcal{Z}'} \prod_l |0 - s_l|^2 \prod_{i<j}^{\infty} |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}'} \prod_l |s_l|^2 \prod_{i<j}^{\infty} |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}"} \prod_l |s_l|^2 d\mu
\end{aligned} \tag{6.5}$$

[:71c]

となる。これは、さすがに正当化できそうにない。実際、μ_0 と μ は互いに、特異なる事が、Osada-Shirai(定理 6.1[1:71]) で証明された。

同じような、形式計算で、二つの Palm 測度の密度は、Ginibre 点過程の場合、

$$\frac{d\mu_a}{d\mu_b} = \mathrm{const} \frac{\prod |a - y_i|^2}{\prod |b - y_i|^2} \tag{6.6}$$

[:71d]

(6.5)[:71c]と (6.6)[:71d]が意味するのは、

(1) μ_0 と μ は、特異。

(2) μ_a と μ_b は、互いに絶対連続。

・Gibbs とはちがう。sample を全部観測すると、Palm が full かわかる。

・たった一つの粒子を系全体が覚えている！

・ランダムクリスタル、periodic mean に近い

k 個の点で条件付けた縮約 Palm 測度を以下で表す。

$$\mu_{x_1,\ldots,x_k}(\cdot) = \mu(\cdot - \delta_{x_1} - \ldots - \delta_{x_k} |\ s(x_j) \geq 1\ j = 1, \ldots, k) \tag{6.7}$$

定理 6.1 (dichotomy)**.** (1) $k \neq l$ ならば $\mu_{x_1,\ldots,x_k}$ と $\mu_{y_1,\ldots,y_l}$ は特異。
(2) $k = l$ ならば $\mu_{\mathbf{x}} = \mu_{x_1,\ldots,x_k}$ と $\mu_{\mathbf{y}} = \mu_{y_1,\ldots,y_k}$ は絶対連続。更にその *Radon-Nikodym* 密度は次であたえられる。

$$\frac{d\mu_{\mathbf{x}}}{d\mu_{\mathbf{y}}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \lim_{R\to\infty} \prod_{|s_i|<b_R} \prod_{j=1}^{k} \frac{|x_j - s_i|^2}{|y_j - s_i|^2}$$

更に正規化定数は、次であたえられる。

$$\mathcal{Z} = \left|\frac{\Delta(\mathbf{y})}{\Delta(\mathbf{x})}\right|^2 \frac{\det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{k}}{\det[K(y_i, y_j)]_{i,j=1}^{k}}$$

証明は、[23] を参照。（講義では、話したが、今や、出版された論文の証明の方がわかりやすいので、略する）。

• Palm 測度 $\mu_{x_1,\ldots,x_k}$ が、再び、行列式測度になることが知られている。また、その核関数も、具体的に求められている。[23]

• (1)の証明のむつかしさは、Palm 測度は、局所的に、外部を条件付けたとき、内部は Lebesgue 測度に対して密度をもつ。また、遠方では、元の測度の相関関数と、Palm 測度の相関関数は、指数的に近づくことが知られている。にもかかわらず、互いに、特異であることを証明しないといけない点である。「指数的に近づく」というのは、本来、同一して良いような、速い収束である。ポイントは、あくまでもそれは、相関関数という、本来、点過程と言う無限次元の対象を有限次元に落とした情報である、相関関数についての、「指数的に近づき」だからで、大元の無限時限的対象である「点過程」にとっては、情報として弱すぎるからである。

このように、(1) を示すとき、遠くの方では linear statics 、あるいは多項式 $< f, \mathbf{s} >^n$ くらいでは、差が出ない！結局、singularity を示すには、末尾事象の情報が必要、とおもわれるが、これらの点過程の末尾事象は、自明であることが期待されていた。（これは、最近証明した）。また、自明のみならず、同一であることも期待される。以上から、末尾事象も使わず、指数以上の増大度を持つような関数の構造で特異性を示さないといけないことが分かる。

なお、結局、証明では、Kolmogorov の 0-1 法則に帰着する議論を用いた。

• Ghosh–Peres は、同時期に、Ginibre の剛性を示した。この結果は、形が違うが、Osada–Shirai と、本質的に同値である。彼らは、外側の粒子の配置を条件付けた時、内部の粒子の個数が一意に決まることを示したのである。これら 2 種類の剛性の同値性は、Bufetov や Ghosh によって示された。

さまざまな、点過程（無論すべて Gibbs 測度以外だが）において、様々な剛性が期待される。Bufetov や Ghosh たちは、今、盛んに研究している。

7 Tagged 粒子問題: μ_0-均質化と μ-均質化

干渉ブラウン運動や関連するランダム媒質内の粒子の運動について、3 つの種類の拡散的スケーリングの極限定理を紹介する。これは、一般的な話だが、ここでは、特に Ginibre 干渉ブラウン運動について考えてみる。$\mathbf{X}$ を Ginibre 干渉ブラウン運動、つまり、次の ISDE の解とする。

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{R\to\infty} \sum_{\substack{j;j\neq i \\ |X_t^i - X_t^j|\le R}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \tag{7.1}$$

$$\mathsf{X}_0 \sim \mu_{\mathrm{Gin}} \tag{7.2}$$

より一般に、点過程 μ に対する干渉ブラウン運動を考える。

本来、Dirichlet 形式で構成したアンラベル力学は、個々の粒子を区別していないが、ラベル $\mathfrak{l}$ をひとつ定め、各粒子に名前を付ける。そのラベル i を任意に固定するごとに以下が成立する。この定式化は、自然だが、[21] で確立するまで、原点を出発する粒子（tagged 粒子）から見た環境 (Y 過程) 過程の、加法的関数である tagged 粒子の極限定理という形で、いままでは述べられていた。

以下は Ginibre なので、$d=2$ であるが、一般に述べる。また、一般の μ 可逆な干渉ブラウン運動の場合は、μ_{Gin} を μ に取り換えることで、同様の定式化になる。

下記、1)–3) は、普遍的な結果である。各極限の係数、1) 「自己拡散行列」、2)-3) 「有効誘電行列」の値は、モデル (点過程 μ) に依存し、それが、非退化か否か、また、点過程が逆温度でパラメタライズされているとして、相転移を起すか否かに興味がある。無論、結果は、μ の属するクラス、Ruelle 族、クーロンポテンシャルの族、ガウス型解析関数の零点からなる点過程など、種類に応じてさまざまである。

1) tagged 粒子問題 ([21] の version で述べる)： 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon X_{t/\epsilon^2}^i = \sigma(\mathsf{s}) B_t \quad \text{in } \mu_{\mathrm{Gin}}\text{-probability.} \tag{7.3}$$

つまり、すべての $F\in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$ と $a>0$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu_{\mathrm{Gin}}(|E_{\mathsf{s}}[F(\epsilon X_{\cdot/\epsilon^2}^i)] - E[F(\sigma(\mathsf{s})B)]| \ge a) = 0. \tag{7.4}$$

ここで E_{s} は、初期条件 s によって決まる、(7.1)の解の分布による平均である。

極限の係数 $\sigma(\mathsf{s})^t\sigma(\mathsf{s})$ の縮約 Palm 測度についての平均

$$\alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}] = \int_{\mathsf{S}} \sigma(\mathsf{s})^t \sigma(\mathsf{s}) d\mu_{\mu_{\mathrm{Gin},0}} \tag{7.5}$$

を μ_{Gin} の自己拡散係数という。

2) $\mu_{\mathrm{Gin},0}$-均質化：s を $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ でばらまく。$\mathsf{s}=\sum_i \delta_{s_i}$ から、ランダムな係数

$$b(x,\mathsf{s}) = \lim_{R\to\infty} \sum_{j;|x-s_j|\le R} \frac{x-s_j}{|x-s_j|^2}$$

を構成し、それに対する確率微分方程式を考える。

$$dX_t = dB_t + \lim_{R\to\infty} \sum_{j;|X_t - s_j| \le R} \frac{X_t - s_j}{|X_t - s_j|^2} dt \tag{7.6}$$

$$X_0 = 0 \tag{7.7}$$

の解 X について

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon X_{t/\epsilon^2} = \sigma(\mathsf{s}) B_t \tag{7.8}$$

つまり、すべての $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$ と $a > 0$ に対して、

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu_{\mathrm{Gin},0}(|E_{\mathsf{s}}[F(\epsilon X_{\cdot/\epsilon^2})] - E[F(\sigma(\mathsf{s})B)]| \ge a) = 0. \tag{7.9}$$

ここで E_{s} は、ランダム媒質 s によって決まる、(7.6)の解の分布による平均である。

$$\gamma_0[\mu_{\mathrm{Gin}}] = \int_{\mathsf{S}} \sigma(\mathsf{s})^t \sigma(\mathsf{s}) d\mu_{\mu_{\mathrm{Gin},0}} \tag{7.10}$$

を μ_{Gin} の μ_{Gin}-有効誘電係数という。

3) μ_{Gin}-均質化：s を μ_{Gin} でばらまく。2) と同様に、確率微分方程式を考える。係数を定義する点過程 μ が 2) とは異なっている。

$$dX_t = dB_t + \lim_{R\to\infty} \sum_{j;|X_t - s_j| \le R} \frac{X_t - s_j}{|X_t - s_j|^2} dt \tag{7.11}$$

$$X_0 = 0 \tag{7.12}$$

の解 X について

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon X_{t/\epsilon^2} = \sigma(\mathsf{s}) B_t \tag{7.13}$$

つまり、すべての $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$ と $a > 0$ に対して、

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu_{\mathrm{Gin}}(|E_{\mathsf{s}}[F(\epsilon X_{\cdot/\epsilon^2})] - E[F(\sigma(\mathsf{s})B)]| \ge a) = 0. \tag{7.14}$$

ここで E_{s} は、ランダム媒質 s によって決まる、(7.6)の解の分布による平均である。

$$\gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}] = \int_{\mathsf{S}} \sigma(\mathsf{s})^t \sigma(\mathsf{s}) d\mu_{\mu_{\mathrm{Gin},0}} \tag{7.15}$$

を μ_{Gin} の μ_{Gin}-有効誘電行列 (effective conductivity matrices) という。

一般的に、極限係数の変分表示から、

$$\gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}] \le \alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}]$$

また、次が期待される

予想 1： $\gamma[\mu_{\mathrm{Gin}}]$ は正定値

$$0 < \gamma[\mu_{\mathrm{Gin}}]$$

この主張は、μ_{Gin} が、大局的には周期配置とみなせること、および、周期的点過程 μ に対して、それをランダム環境とする 2D クーロン力で干渉する粒子の均質化では、極限が非退化である、という理由で予想している。

集中講義では、次を示した。

結果 2： $\gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}] = 0.$ これは、その内発表するつもりである。

定理 7.1. $\gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}] = 0$

講義では証明したが、このノートでは、証明を述べない。定理 7.2 より従うからである。元々の証明は、下記の定理 7.2 の証明より複雑である。

予想 (結果)3： $\alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}] = 0.$

2010 年の時点では、予想だったが、2015 年に示された[20]。今は、定理である。つまり、

定理 7.2 (長田 2015 [20])**.** $\alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}] = 0$

- この preprint は、適宜推敲した後、近日中に公開する。
- 予想 1 と予想/結果 3 がともに成立するためには、**μ_{Gin} と $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ が互いに特異** にならないといけない。

実際、逆に、もし $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ が μ_{Gin} に対して絶対連続ならば、[μ-確率収束] を「μ 概収束」に置き換えられると信じると、少なくても形式的には、

$$0 < \gamma[\mu_{\mathrm{Gin}}] \Rightarrow 0 < \gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}]$$

が従う。更に、係数の変分表現による一般論から、

$$\gamma[\mu_{\mathrm{Gin},0}] \le \alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}]$$

が従う（これは、全く一般的な事実である）。その結果、これらの大小関係から

$$0 < \alpha[\mu_{\mathrm{Gin}}]$$

が従う。

「μ_{Gin} と $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ が互いに特異」という現象は、通常の Gibbs 測度（つまり Ruelle 族の干渉ポテンシャル）では到底期待できることではない。しかし、6 章で見てきたように Ginibre 点過程では成立している。このように、縮約 Palm 測度の dichotomy（定理 6.1）という幾何的剛性は、劣拡散性という Ginibre 点過程の力学的剛性の源である。

- 幾何剛性から、力学剛性（劣拡散性）を導出した、というよりは、実際は、力学剛性を証明する過程で、幾何的剛性にたどりついている。つまり、定理 6.1 の主張を思いついたのは、Ginibre の tagged 粒子問題が切っ掛けである。

2007 年から、極限が退化する、つまり、Ginibre 干渉ブラウン運動が劣拡散的である、という予想を立て、「何度も証明した」が、結局いつもバグが見つかり、うまく行かなかった。何度か失敗した後、嫌になって諦めようとしたとき、そのまま止めてしまうのも悔しいので、「劣

拡散性予想」が間違っていることを証明して、止めることにした。そこで、よく考えると、以上の観測から、この問題は、「μ_{Gin} と $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ が互いに特異か否か」に帰着することが理解できた。幸い、「μ_{Gin} と $\mu_{\mathrm{Gin},0}$ が互いに特異」を証明することが出来たので、劣拡散性を予想をあきらめず、最終的に 2015 年までかけて証明した。

後で考えてみると、1 度はそれまでに証明していたようである。夜寝る前に証明したが、抽象的な証明なので、朝起きたとき、ノートに書かなかった証明のポイントを忘れてしまい、出来た証明を見ても理解できず、間違っていると思ってしまったようだ。

もしその時証明してしまっていると、6 章の話は、考えていない。だから、むしろ幸運だったかもしれない。（屁理屈の極み、言いわけなのですが、塞翁が馬とも思う）。

8 Kipnis-Varadhan 理論

Kipnis-Varadhan 理論とは、彼らが 1986 年に発表した、可逆な Markov 過程の加法的汎関数の拡散極限に関する一般である [8]。元々は単純排他過程の tagged 粒子問題に応用するために作られた一般論で、非常に適用範囲が広く、それまであった様々な結果を、自明にしてしまう強烈な抽象論である。

干渉ブラウン運動の tagged 粒子問題は、Guo-Papanicolou [5] で研究が始まった。干渉ブラウン運動は、単純排他過程の場合の、連続モデルに対応する。彼らの証明は、Tartar の漸近展開による証明であり、見通しの良いものではない。尚、[5] は、干渉ポテンシャルが C_0^3 の場合を扱い、更に、極限の係数の非退化性を「証明」しているが、非退化性の証明には本質的な誤り（極めて不十分な論拠）がある。（とはいえ、彼らのの論文は、[8] にも先んじた、この分野の草分けの仕事であり、大変重要である）。

DeMasi 達 [1] による、非常に限定的な結果を経て、非退化性は、干渉ポテンシャルが Ruelle 族、また、ハードコアをもち、空間次元 2 次元以上という非常に一般的な仮定の下で、[14] で証明された。この証明は、長距離の相関を許す、大変一般的な設定で証明されている。それを踏まえると、干渉ポテンシャルが、クーロンになった場合に、退化することを証明できたのは驚きである [20]。

現時点で、β に対する Ginibre 干渉ブラウン運動について、逆温度 β 関して Alder 型相転移が発生することを予想しており、これを解決することが、現時点での主たる目標の一つである。

De Masi 達は、この問題を、Kipnis-Varadhan 理論を用いて扱った [1]。Kipnis-Varadhan 理論を用いるには、必然的に Dirichlet 形式を導入しないといけない。しかし、彼らの Dirichlet 形式の扱いは、幾分乱暴で可閉性の証明も、不十分で、また、拡散過程を構成するために必要な「準正則性」については、記述がない。彼らが論文を書いた時点では、まだ、無限次元の準正則 Dirichlet 形式の一般論は、成立していなかったので、無理もないのだが。

ここでは、まず、本来の Kipnis-Varadhan 理論を紹介し、その後、その Dirichlet 形式版をのべる。この一般化/抽象化は、干渉ブラウン運動の tagged 粒子問題に有効である。（むしろ、

そのためにつくった一般論である)。集中講義の時には述べなかったが (というよりは未だ存在しない結果であったが)、最近、後者を干渉ブラウン運動に使用するとき、より自然な主張を証明するための定理をつくった[21, Theorem 3.7]。これについても、このノートでは紹介する。

$\mathbb{Y}$: Polish 空間

μ: $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ の確率測度

$\mathbb{M} = (\{P_\eta\}_{\eta\in\Xi}, \{\eta(t)\})$: $\mathbb{Y}$ 上の μ 可逆な Markov 過程

X: $\mathbb{M}$ の加法的汎関数 (additive functional)

定理 8.1 (Kipnis-Varadhan)**.**

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E_\eta[X_t] =: \varphi(\eta) \in L^2(\mathbb{Y}, \mu) \tag{A1}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} dE_\lambda(\varphi, \varphi) < \infty \tag{A2}$$

$$\mathbb{M}\ \text{は}\ \textit{ergodic.} \tag{A3}$$

このとき、定数行列 σ が存在し、有限次元分布の意味で、かつ、μ *in probability* で

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon X_{t/\epsilon^2} = \sigma B_t \tag{8.1}$$

さらに $\mathbb{M}$ の生成作用素を L とおき、$\alpha = (1/2)\sigma^t\sigma$ とおくと、

$$\alpha_{ij} = \langle -L^{-1}\varphi_i, \varphi_j\rangle_{L^2(\mathbb{Y},\mu)}. \tag{8.2}$$

• 一般に、可逆なマルコフ過程があれば、対応する対称な Dirichlet 形式があり、もともとのマルコフ過程は、Dirichlet 形式で与えられるものと一致する。そういう意味で、Kipnis-Varadhan の定理では、すでに内在的に Dirichlet 形式の存在が仮定されている。長田[13] の結果のひとつのポイントは、Dirichlet 形式から出発し、予め与えられた空間の「シフト」から決まる作用素に関する 2 次場を持つ新しい Dirichlet 形式の構成（自然に Dirichlet 形式のカップリングと思える）があれば、上述の (A1)と (A2)は仮定しなくて良い点である。つまり、(A1)は不必要、ある意味もっと弱い意味で、しかし定理の証明には十分な形で、自動的に成立する。また、(A2)は、自動的に成立する。(A3)は、本来不必要な仮定であった。

• Kipnis-Varadhan の定理を干渉ブラウン運動に適用する場合、確率微分方程式による表現がないときは、(A1)を示すのが難しい。そこで、Dirichlet 形式論の枠組みに移行した一般論[13] が役に立つ。説明したとおり、以上の条件は、Dirichlet 形式の「カップリング」に話を変えている。

• [13] では、強セクター条件まで、Dirichlet 形式の対称性を緩めている。この部分は、[22] で初めて成された。

8.1 D による構造

媒質の空間 $\mathbb{Y}$ に、「平行移動」の生成作用素をイメージした D という作用素を備え付ける。ν を $\mathbb{Y}$ の確率測度とする。μ と一致している必要は無い。

$$D=(D_1,\ldots,D_d),\quad D_i\!:\!\mathcal{D}\!\to\! L^2(\mathbf{S},\nu) \tag{8.3}$$

$a=(a_{ij})_{i,j}^d$: 一様楕円、有界

$D_i1=0$, 線形写像、D は local

$$\mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}}(f,g)=\int_{\mathbb{Y}}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}D_ifD_jg\nu(d\eta) \tag{8.4}$$

(B1) $\mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}}$ と $\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$ は、$L^2(\mathbf{S},\mu)$ 上の閉形式

$$\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}=\mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}}+\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}} \tag{8.5}$$

ただし $\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$ には、Dirichlet 形式であること以外に、特に何も構造を仮定しない。

- $\mathbb{R}^d\times\mathbb{Y}$ 上の Dirichlet 形式を導入する。$f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{D}$

$$\mathcal{E}^1_{X\mathsf{Y}}(f,g)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Y}}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(D_i-\frac{\partial}{\partial x_i})f(D_j-\frac{\partial}{\partial x_j})g\,dx\nu(d\eta)$$

また、$\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$ を自然に $\mathbb{R}^d\times\mathbb{Y}$ に拡張したものを $\mathcal{E}^2_{X\mathsf{Y}}$ とおき、以下のように定める。

$$\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}=\mathcal{E}^1_{X\mathsf{Y}}+\mathcal{E}^2_{X\mathsf{Y}}$$

次を仮定する

(B2) これらの形式は $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{D},L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Y},dx\times\mu))$ 上可閉、更にその閉包は準正則 Dirichlet 形式である

とする。

この仮定は、<u>**Dirichlet 形式のカップリング**</u> を主張するものだが、これが、(A1)と (A2)の対応物なのである。いま、(B2)でえられるマルコフ過程を (X,Y) などとあらわす。初期条件を

$$(X_0,\mathsf{Y}_0)=(x,\eta)$$

定理 8.2 ([13]).

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2}=\sigma B\quad \textit{weakly in } C([0,\infty);\mathbb{R}^d)\ \textit{in } \mu\text{-測度} \tag{8.6}$$

つまり、すべての $a>0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mu(\eta;|F(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2})-F(\sigma(\eta)B)|\geq a)=0 \tag{8.7}$$

極限の平均を

$$\alpha = \int_{\mathbb{Y}} \sigma(\eta)^t \sigma(\eta) \mu(d\eta)$$

とおく。α の非退化/退化に興味がある。

マルコフ過程に D という構造を導入した効果として、極限の係数 α を $\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}$ の商 Dirichlet 形式で表現する。この表現定理は、Ginibre 点過程の力学剛性（Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性）を示す上で、鍵となる。

$$\Xi_0 = \{\mathfrak{f} = (D_1 f, \dots, D_d f, \tilde{f}); f \in \mathcal{D}\} \subset L^2(\mathbf{S}, \mu)^d \times (\mathcal{D}/\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}})$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \int_{\mathbb{Y}} \sum_{i,j}^{d} \frac{1}{2} a_{ij} D_i f D_j g \, \nu(d\eta) + \tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$$

Ξ_0 のこの形式 $\tilde{\mathcal{E}}$ に関する完備化を Ξ と表す。ここで、一般には、

$$\Xi \neq L^2(\mathbf{S}, \mu)^d \times (\mathcal{D}/\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}})$$

であることに注意する。むしろ、これが、一致するか否かで極限の退化/非退化が、決定される。つまり、

定理 8.3 ([13]). 極限の対称行列 α を $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ とベクトルで表す。$\mathbf{e}_i = (e_i, 0) \in L^2(\mathbf{S}, \mu)^d \times \mathcal{D}/\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$ とする。ここで、e_i は、$\mathbb{R}^d$ の i 方向の単位ベクトルに値をとる、$L^2(\mathbf{S}, \mu)^d$ の元である。(定義から定数関数)。このとき、

$$\alpha_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{e}_i \in \Xi.$$

非常に抽象的な定理だが、これを色々な例に応用することが出来る。

• 1 次元球間の非衝突干渉ブラウン運動の場合の α の退化は、[21] で示された。file を、添付するので、ご覧下さい。

• Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性の証明にも、本質的に使った。これは、preprint の推敲が終われば、upload します。

• α は、変分表示を持つ。

$$\Xi_0 = \{\mathfrak{f} = (D_1 f, \dots, D_d f, \tilde{f}); f \in \mathcal{D}\}$$

だったが、$\hat{\xi} = (\xi, 0)$ と書くと、α_{ij} は次で表示できる。

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = \inf_{\mathfrak{f} \in \Xi_0} \tilde{\mathcal{E}}(\hat{\xi} - \mathfrak{f}, \hat{\xi} - \mathfrak{f})$$

これは、[14] の証明の鍵である。変分表示を用いるアイデアは、著者にとっては、Spohn の本のアイデアによる。Spohn よりも前に、誰か用いていたのかもしれない。

• 干渉ブラウン運動の tagged 粒子に対する不変原理の精密化に関する最近の、論文「Self-diffusion constants of non-collision interacting Brownian motions in one spatial dimension」を、添付する。

参考文献

De

[1] De Masi, A. et al. An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments. *Joul. Stat. Phys,***55***, Nos.* 3/4 (1989) 787-855

fritz

[2] Fritz, J., *Gradient dynamics of infinite point systems*, Ann. Probab. **15** (1987) 478-514.

fot.2

[3] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda M., *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd ed., Walter de Gruyter (2011).

GP

[4] S. Ghosh and Y. Peres, *Rigidity and Tolerance in point processes: Gaussian zeroes and Ginibre eigenvalues*,, to appear in Duke Mathematical Journal, available at *http://arxiv.org/pdf/1211.2381v2.pdf*

gp

[5] Guo, M.Z., Papanicolaou, G.C. *Self-Diffusion of interacting Brownian particles*, in "Probabilistic Method in Mathematical Physics", Proc. Taniguchi International Sympo. at Katata and Kyoto (1985), eds. K. Ito and N. Ikeda, 113-152, (1987) Kinokuniya.

harris

[6] Harris, T.E., *Diffusions with collision between particles*, *J. Appl. Prob.* **2**, 323-338 (1965)

inu

[7] Inukai, K., *Collision or non-collision problem for interacting Brownian particles*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **82**, (2006), 66-70.

KV

[8] Kipnis, C. and Varadhan, S.R.S. *Central limit theorems for additive functional of reversible Markov process and applications to simple exclusions*, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 1-19.

lang.1

[9] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977) 55-72.

lang.2

[10] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978) 277-299.

mr

[11] Ma, Z.-M., Röckner, M., *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, *Springer-Verlag*, 1992.

o.dfa

[12] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*,, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996).

o.inv2

[13] Osada, H. *An invariance principle for Markov processes and Brownian particles with singular interaction*, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* **34**, **n**° 2 (1998), 217-248.

o.p

[14] Osada, H., *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, *Probab. Theory Relat. Fields*, **112**, (1998), 53-90.

o.col
[15] Osada, H., *Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimensions and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields*, in Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, eds. T. Funaki and H. Osada, Advanced Studies in Pure Mathematics **39**, 2004, 325-343.

o.tp
[16] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, *J. Math. Soc. Japan*, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

o.isde
[17] Osada, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices. *Probability Theory and Related Fields*, **153**, 471-509 (2012)

o.rm
[18] Osada, H., Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials. Ann. of Probab. **41**, 1-49 (2013)

o.rm2
[19] Osada, H., Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II : Airy random point field. *Stochastic Processes and their applications* **123**, 813-838 (2013)

o.sub
[20] Osada, H., *Ginibre interacting Brownian motion in infinite dimensions is sub-diffusive*, (preprint)

o.inv3
[21] Osada, H., *Self-diffusion constants of non-collision interacting Brownian motions in one spatial dimension*, (preprint)

o.inv1
[22] Osada, H., Saitoh, T., *An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains*, Probab. Theory Relat. Fields **101** , 45-63 (1995)

o-s.abs
[23] Osada, H., Shirai, T., *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, Probab. Theory Relat. Fields DOI 10.1007/s00440-015-0644-6

o-t.tail
[24] Osada, H., Tanemura, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields. (preprint) arXiv:1412.8674

Sh
[25] Shiga, T. *A*, remark on infinite-dimensional Wiener processes with interactions Z. Wahrschverw. Gebiete **47** (1979) 299-304

sp.1
[26] Spohn, H., *Interacting Brownian particles:a study of Dyson's model*, In: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, G. Papanicolaou (ed), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, **9**, Berlin: Springer-Verlag, 1987, pp. 151-179.

sp.2
[27] Spohn, H., *Tracer dynamics in Dyson's model of interacting Brownian particles*, J Stat. Phys., **47**, 669-679 (1987).

tane
[28] Tanemura, H., *A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Relat. Fields **104** (1996) 399-426.

tsai.14
[29] Tsai, Li-Cheng, *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Relat. Fields (published on line) DOI 10.1007/s00440-015-0672-2

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B (201x), 000–000

Self-diffusion constants of non-colliding interacting Brownian motions in one spatial dimension

By

Hirofumi Osada *

Abstract

We prove that self-diffusion constants of interacting Brownian particles in $\mathbb{R}$ always vanish if the particles do not collide with each other. We represent self-diffusion constants by additive functionals of reversible Markov processes as obtained in [13].

§ 1. Introduction

We consider infinitely many Brownian particles $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ moving in $\mathbb{R}^d$ with interaction Ψ and inverse temperature $\beta > 0$. Intuitively, $\mathbf{X}$ is given by the infinite-dimensional stochastic differential equation (ISDE)

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z},\, j\neq i}\nabla\Psi(X_t^i - X_t^j)dt, \quad (i\in\mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

and is called an interacting Brownian motion in infinite dimensions [9, 10, 24, 2, 27, 17, 23]. We set the configuration-valued process X, called unlabeled dynamics, to be

$$\mathsf{X}_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\delta_{X_t^i}. \tag{1.2}$$

The dynamics in the present paper are quite general and not necessarily given by ISDEs of the form (1.1). We later present the unlabeled dynamics X using Dirichlet form theory (2.2) where the labeled dynamics $\mathbf{X}$ are an $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$-valued additive functional of X (2.9).

Received April 20, 201x. Revised September 11, 201x.
2010 Mathematics Subject Classification(s):
Key Words: *homogenization, self-diffusion constant, self-diffusion matrix, interacting Brownian motions, Kipnis–Varadhan theory, Dirichlet forms*
Supported in part by a Grant-in-Aid for Scientific Research (KIBAN-A, No. 24244010) of the Japan Society for the Promotion of Science.
*Graduate School of Mathematics, Kyushu University Fukuoka 819-0395, Japan
e-mail: osada@math.kyushu-u.ac.jp

We suppose that the system is in equilibrium in the sense that

$$\mathsf{X}_t \underset{\text{law}}{=} \mathsf{X}_0 \quad \text{for all } t,$$

and that X is a μ-reversible diffusion, where μ is the distribution of X_0. Thus μ is the equilibrium state of the unlabeled dynamics X. By definition, μ is a probability measure on the configuration space S over $\mathbb{R}^d$:

$$\mathsf{S} = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}\,;\, s_i \in \mathbb{R}^d,\, \mathsf{s}(\{|s_i| \le r\}) < \infty \text{ for all } r \in \mathbb{N})\}. \tag{1.3}$$

We equip S with the vague topology under which S is a Polish space. Throughout the paper we assume that μ is translation invariant:

$$\mu \circ \theta_x^{-1} = \mu \quad \text{for each } x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

where $\theta_x : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ is the shift $\theta_x(\mathsf{s}) = \sum_i \delta_{s_i + x}$ for $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$. By definition, $\theta_{-x} = \theta_x^{-1}$, and θ_x is a homeomorphism for each x.

We tag a particle $X^0 = \{X_t^0\}$, say, and study its asymptotic behavior. In particular, we investigate the diffusive scaling limit. The celebrated Kipnis–Varadhan theory [8] asserts that tagged particles of reversible systems converge to (a constant multiple of) the Brownian motion B:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon X^0_{\cdot/\varepsilon^2} = \sigma(\mathsf{s})B,$$

where $\sigma(\mathsf{s})$ may depend on the initial configuration s of environment seen from the tagged particle, that is, $\mathsf{s} = \sum_{i \ne 0} \delta_{X_0^i - X_0^0}$. The average $\alpha[\mu]$ of $\sigma^t\sigma$ with respect to the reduced Palm measure $\mu_0 = \mu(\cdot - \delta_0 | \mathsf{s}(\{0\}) \ge 1)$ conditioned at the origin is called a self-diffusion matrix (see (3.8)).

It is known that $\alpha[\mu]$ is always positive definite if $d \ge 2$ and that the interaction Ψ is of Ruelle's class with hard core having positive volume [14]. It is expected that self-diffusion matrices for point processes with Ruelle's class potentials are always positive definite in multiple dimensions. The only known degenerate example in multiple dimensions is Ginibre interacting Brownian motion, in which an infinite-particle system interacts via the two-dimensional Coulomb potential $\Psi(x) = -\log|x|$ with $\beta = 2$ [20]. We remark that the two-dimensional Coulomb potential is not of Ruelle's class because it is unbounded at infinity.

In one dimension, there are degenerate examples such as hard rods (Harris [6]) and Dyson's model (Spohn [25, 26]), which have scaling orders such that $O(t^{1/4})$ in [6] and $O((\log t)^{1/2})$ in [26], respectively.

The main purpose of this paper is to give a sufficient condition for the degeneracy of the self-diffusion constant in one dimension. We prove that $\alpha[\mu] = 0$ if particles do not collide with each other (Theorem 2.1). Let

$$\Delta = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\, ;\, x_i < x_{i+1} \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Then the non-collision condition (2.6) requires that $\mathbf{X}_t \in \Delta$ for all $0 \le t < \infty$ for all labeled particles $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ that start at $\mathbf{X}_0 \in \Delta$. The set Δ is very tiny compared with the whole space $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, which is the state space of independent Brownian motions $\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ and interacting Brownian motions $\mathbf{X}$ with Ruelle's class potentials but without non-collision condition. Intuitively, such a small state space of interacting one-dimensional Brownian motions with the non-collision condition results in sub-diffusive behavior. Briefly, smallness of the state space implies sub-diffusivity. To some extent, this phenomenon resembles the sub-diffusivity of a simple random walk in the incipient infinite cluster, which is a random domain enjoying a fractal structure at the critical point of Bernoulli percolation.

Another purpose of this paper is to give a statement of the main theorem in a more natural fashion than previously (Theorem 3.7). Traditionally, these problems are stated for tagged particles $\{X_t^0\}$ as functionals of the stationary environment process $\mathsf{Y} = \{\sum_{i\neq 0} \delta_{X_t^i - X_t^0}\}$, with the reduced Palm measure μ_0 as the invariant probability measure [1, 5, 8, 14]. One statement of the result is that, for any $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu_0(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}[F(\epsilon X^0_{\cdot/\epsilon^2})] - E[F(\sigma(\mathsf{s})B)]| \ge \kappa\}) = 0 \quad \text{for each } \kappa > 0. \tag{1.5}$$

Here, the expectation $\mathsf{E}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ is with respect to the distribution $\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ of the environment process $\mathsf{Y} = \{\sum_{i\neq 0} \delta_{X_t^i - X_t^0}\}$ starting at s, and μ_0 is the initial distribution of the whole environment process Y. Furthermore, $B = \{B_t\}$ denotes the standard d-dimensional Brownian motion and $E[\cdot]$ is the expectation with respect to B. This reduction of the problem through the idea of "tagged particle and environment seen from the tagged particle" is a key idea in Kipnis-Varadhan theory for tagged particle problems.

We define a label $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}))_{i\in\mathbb{Z}} = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ for μ-a.s. $\mathsf{s} \in \mathsf{S}$, and construct the labeled process $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}} = \mathfrak{l}_{\mathrm{path}}(\mathsf{X})$ from the unlabeled process $\mathsf{X} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X^i}$ (see (2.9)). A refinement of statement (1.5) is that, for each $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\epsilon X^i_{\cdot/\epsilon^2})] - E[F(\sigma(\mathsf{s})B)]| \ge \kappa\}) = 0 \quad \text{for each } \kappa > 0. \tag{1.6}$$

Here, E_{s} is the expectation with respect to the distribution P_{s} of the original μ-reversible diffusion $\mathsf{X} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X^i}$ given by (1.2) starting at s.

We thus state the theorem in terms of the scaling limit of each tagged particle X^i of the original unlabeled dynamics $\mathsf{X} = \sum_i \delta_{X^i}$ (Theorem 3.7). To formulate the statement as (1.6), we need to prepare a label $\mathfrak{l}$ to choose tagged particles from the unlabeled system.

We remark that the equilibrium state for the unlabeled dynamics is μ. Note that μ_0 is not necessary absolutely continuous with respect to μ. Indeed, the Ginibre point process is an example where μ and μ_0 are singular each other [22]. We nontheless deduce claim (1.6) from (1.5).

Example 1.1 (Ruelle's class potentials). Typical examples of the interaction Ψ in ISDE (1.1) are Ruelle's class potentials, where the point processes μ are translation invariant canonical Gibbs measures with interaction potential Ψ and inverse temperature β. If $d \geq 2$ and Ψ has a hard core with positive volume, then $\alpha[\mu]$ is positive definite for any $\beta \geq 0$ [14]. If Ψ does not have a hard core, then the positivity of $\alpha[\mu]$ has only been proved for $\Psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ and sufficiently small β [1]. This result is valid for $d \geq 1$. It is plausible that the positivity of $\alpha[\mu]$ holds for all Ruelle's class potentials without any hard core condition or restriction on β if $d \geq 2$. This problem is still open in this framework.

Example 1.2 (Ruelle's class potentials: $d = 1$). Let Ψ be of Ruelle's class. Suppose that $\Psi \in C^3(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ is non-negative with bounded support and satisfies the non-collision condition (2.5). The point processes μ are translation invariant canonical Gibbs measures with interaction potential Ψ and inverse temperature β. In [26], Spohn showed that $\alpha[\mu]$ vanishes and that the correct scaling is $\varepsilon X^0_{t/\varepsilon^4}$.

Example 1.3 (Hard rods in $\mathbb{R}$). Consider Brownian motions $\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{R}$, and pose the reflecting boundary condition for the set of multiple points $\Gamma = \cup_{i\neq j}\{\mathbf{s} = (s_i); s_i = s_j\}$. Harris proved that $\alpha[\mu] = 0$ and that the correct order is $\varepsilon X^0_{t/\varepsilon 4}$ [6].

Example 1.4 (Dyson's model). Another interesting example is Dyson's model in infinite dimensions [25]:

$$dX^i_t = dB^i_t + \lim_{R\to\infty} \frac{\beta}{2} \sum_{j\neq i, |X^j_t|<R} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} dt. \tag{1.7}$$

The ISDE was solved for $\beta = 1, 2, 4$ in [17, 18] (weak solution) and in [23] (pathwise unique, strong solution). The case $\beta = 1, 2, 4$ fulfill the assumptions in Theorem 2.1. For general $1 \leq \beta < \infty$, Tsai [28] solved (1.7) at the level of non-equilibrium, pathwise unique strong solutions. He did not, however, prove the μ-reversibility of the associated unlabeled diffusions. Hence, these diffusions have not yet been shown to be associated with Dirichlet forms. The problem is thus still open for cases other than $\beta = 1, 2, 4$.

In [26], Spohn proved that $E[|X^0_t - X^0_0|^2] \sim \text{const.} \log t$ as $t \to \infty$. This suggests that$X_t \approx (\log t)^{1/2}$ as $t \to \infty$, which is also an open problem.

The organization of the paper is as follows. In Section 2, we set up the problem and state the main result (Theorem 2.1). In Section 3, we prepare an invariance principle and state Theorem 3.7. In Section 4, we present a representation of self-diffusion constants. In Section 5, we prove that the self-diffusion constant vanishes under the non-collision condition in one-dimension. In Section 6, we complete the proof of Theorem 2.1.

§ 2. Set up and the main result

In this section, we set up and state the main theorem (Theorem 2.1).

Let S be the configuration space over $\mathbb{R}^d$ as in (1.3). Let μ be a point process on $\mathbb{R}^d$ supported on a set consisting of infinitely many particles. We assume that μ is translation invariant as in (1.4).

A symmetric and locally integrable function $\rho^n : (\mathbb{R}^d)^n \to [0, \infty)$ is called the n-point correlation function of a random point field μ on $\mathbb{R}^d$ with respect to the Lebesgue measure if ρ^n satisfies

$$\int_{A_1^{k_1} \times \cdots \times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i) - k_i)!} d\mu$$

for any sequence of disjoint bounded measurable sets $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ and some sequence of natural numbers $k_1, \ldots, k_m$ satisfying $k_1 + \cdots + k_m = n$. If $\mathsf{s}(A_i) - k_i < 0$, according to our interpretation, $\mathsf{s}(A_i)!/(\mathsf{s}(A_i) - k_i)! = 0$ by convention.

For a function f on S, we denote by $\check{f}$ the symmetric function defined on a subset of $\{\cup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^n\} \cup (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ such that $\check{f}(s_1, \ldots,) = f(\mathsf{s})$, where $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \in \mathsf{S}$. We say that a function f on S is smooth if $\check{f}$ is smooth, and local if $f = f \circ \pi_r$ for some r, where $\pi_r : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ such that $\pi_r(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap \{|x| \le r\})$.

Let $\mathcal{D}_\circ$ be the set of all smooth, local functions on S. Let $\mathbb{D}$ be the square field on S such that, for $f, g \in \mathcal{D}_\circ$,

$$\mathbb{D}[f, g](\mathsf{s}) = \frac{1}{2} \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\partial \check{f}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \check{g}}{\partial s_i} \Big\}(\mathsf{s}). \tag{2.1}$$

We use the square field $\mathbb{D}$ in (2.1) to define a function $F_{\mathbb{D}}$ from the space of point processes to the space of bilinear forms on the configuration space S. Indeed, we set

$$F_{\mathbb{D}}(\mu) = (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_\circ^\mu),$$

where the bilinear form $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu)$ is such that

$$\mathcal{E}^\mu(f, g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f, g] \mu(d\mathsf{s}), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{D}_\circ^\mu = \{ f \in \mathcal{D}_\circ \, ; \, f \in L^2(\mathsf{S}, \mu), \, \mathcal{E}^\mu(f, f) < \infty \}.$$

If $F_{\mathbb{D}}(\mu) = (\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ is closable on $L^2(\mathsf{S}, \mu)$, and its closure $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu)$ is a quasi-regular Dirichlet form, then by the general theory of Dirichlet forms there exists a μ-reversible diffusion associated with the Dirichlet space $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}, L^2(\mathsf{S}, \mu))$ [11]. Hence we assume that

$$(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}_{\circ}) \text{ is closable on } L^2(\mathsf{S}, \mu), \tag{2.3}$$

and

$$\text{the } n\text{-point correlation function } \rho^n \text{ of } \mu \text{ is locally bounded for each } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

We can deduce from (2.4) that the closure $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu})$ of $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}_{\circ})$ is a quasi-regular Dirichlet form [12, 18]. Thus the associated diffusion (P, X) exists [11], where $\mathsf{P} = \{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s} \in \mathsf{S}}$ is the family of diffusion measures and $\mathsf{X} = \{\mathsf{X}_t\}_{t \in [0,\infty)}$ denotes the canonical process. By construction, (P, X) is a μ-reversible diffusion.

If μ is a Poisson point process with Lebesgue intensity, then the associated diffusion is an S-valued Brownian motion $\mathsf{B} = \sum_i \delta_{B^i}$. In some sense, this correspondence is natural. If μ is a $(0, \Psi)$-quasi-Gibbs measure with upper semi-continuous potential Ψ in the sense of [18], then (2.3) is satisfied [18, 19]. We also remark that a $(0, \Psi)$-Gibbs measure is a $(0, \Psi)$-quasi-Gibbs measure by definition. We present the ISDEs associated with these unlabeled diffusions at the end of this section.

We assume that

$$\mathrm{Cap}(\mathcal{N}_1) = 0, \tag{2.5}$$

where $\mathcal{N}_1 = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}\,;\, \mathsf{s}(\{x\}) \geq 2 \text{ for some } x \in \mathbb{R}^d\}$ and Cap is the 1-capacity of the Dirichlet space $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}, L^2(\mathsf{S}, \mu))$. Assumption (2.5) is equivalent to

$$\mathsf{P}_{\mathsf{s}}(X^i_t \neq X^j_t \text{ for all } i \neq j,\ t \in [0, \infty)) = 0 \quad \text{for q.e. } \mathsf{s}, \tag{2.6}$$

where $\mathsf{X}_t = \sum_i \delta_{X^i_t}$, and q.e. indicates quasi-everywhere (see [11, 3]).

We refer to Inukai [7] for the necessary and sufficient conditions for (2.5) in terms of Ψ. This result is for finite-particle systems, but can be used to obtain a precise sufficient condition for (2.5) because the limiting Dirichlet form is a decreasing limit of finite-particle Dirichlet forms [12]. We also refer to [15] for the non-collision property of unlabeled diffusions associated with determinantal point processes.

We remark that the translation invariance of μ yields the non-explosion of each tagged particle X^i [16, Theorem 2.5]:

$$\mathsf{P}_{\mathsf{s}}(\sup_{t \in [0,T]} |X^i_t| < \infty \text{ for all } i \in \mathbb{Z},\ T \in [0, \infty)) = 0 \quad \text{for q.e. } \mathsf{s}.$$

Let $\mathfrak{u}$ be a function on $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ such that $\mathfrak{u}((s_i)) = \sum_i \delta_{s_i}$ and let

$$\mathsf{S}_{\mathrm{s.i}} = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}\,;\, \mathsf{s}(\{x\}) \leq 1 \text{ for all } x,\ \mathsf{s}(\mathbb{R}^d) = \infty\}. \tag{2.7}$$

From (2.5) and the translation invariance of μ we see that

$$\mu(\mathsf{S}_{\mathrm{s.i}}) = 1. \tag{2.8}$$

Let $\mathfrak{l}\colon \mathsf{S}_{\mathrm{s.i}} \to (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ be a measurable map such that $\mathfrak{u} \circ \mathfrak{l} = \mathrm{id}$. We call $\mathfrak{l}$ a label and write $\mathfrak{l}$ as $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}))_{i\in\mathbb{Z}} = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, where $\mathsf{s} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{s_i}$.

Example: Let $\mathfrak{l} = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ be a label. The label $\mathfrak{l}$ is well defined for all $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \in \mathsf{S}_{\mathrm{s.i}}$ from the following.

(1) When $d = 1$, a typical example of the label $\mathfrak{l}$ is as follows: $s_{-1} < s_0 < s_1$ and

$$\cdots < s_{-2} < s_{-1} < 0 < s_1 < s_2 < \cdots .$$

(2) Another example for $d \geq 1$ is:

$$|s_0| < |s_1| < |s_{-1}| < |s_2| < |s_{-2}| < \cdots .$$

We can lift the map $\mathfrak{l}$ to $\mathfrak{l}_{\mathrm{path}} : C([0,\infty); (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}) \to C([0,\infty); (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}})$ in an obvious fashion. Indeed, once $\mathfrak{l}$ is given, the dynamics $\mathsf{X}_t = \sum_i \delta_{X_t^i}$ can keep the initial label for all $t \in [0,\infty)$ because the particles neither collide with each other nor explode. Hence we write

$$\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i\in\mathbb{Z}} = \mathfrak{l}_{\mathrm{path}}(\mathsf{X})_t. \tag{2.9}$$

We assume that a label $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}))_{i\in\mathbb{Z}} = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ is given and fix this throughout the paper. If $\mathsf{X}_0 = \mathsf{s}$ and $\mathbf{X}$ satisfies (2.9), then $\mathbf{X}_0 = (\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}))_{i\in\mathbb{Z}}$ by definition. We study the diffusive scaling limit of each tagged particle X^i of the labeled process $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

Let $\mu_x = \mu(\cdot - \delta_x | \mathsf{s}(\{x\}) \geq 1)$ be the reduced Palm measure conditioned at $x \in \mathbb{R}^d$. Let $\mu^{[1]}(dx d\mathsf{s}) = \rho^1(x)\mu_x(d\mathsf{s})dx$ be the one-Campbell measure of μ. Note that $\rho^1(x)$ is constant in x because μ is translation invariant by (1.4). Let ∇_x be the nabla in $x \in \mathbb{R}^d$. We regard $\mathbb{D}$ as a square field on $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ$ in an obvious fashion. Let

$$\mathcal{E}^{[1]}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathsf{S}} \Big\{ \frac{1}{2} \nabla_x f \cdot \nabla_x g + \mathbb{D}[f,g] \Big\} \mu^{[1]}(dx d\mathsf{s}),$$
$$\mathcal{D}_\circ^{[1]} = \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ;\ f \in L^2(\mathsf{S}, \mu^{[1]}),\ \mathcal{E}^{[1]}(f,f) < \infty \}.$$

We assume the following:

$$(\mathcal{E}^{[1]}, \mathcal{D}_\circ^{[1]}) \text{ is closable on } L^2(\mathbb{R}^d \times \mathsf{S}, \mu^{[1]}). \tag{2.10}$$

Recall that from (2.3) and (2.4) we obtain a μ-reversible diffusion (P, X). Using the label $\mathfrak{l}$, we can write $\mathsf{X}_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_t^i}$. We thus obtain the labeled process $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Our main theorem is the following:

Theorem 2.1. *Assume* (1.4), (2.3)–(2.5), *and* (2.10), *and assume that* $d = 1$. *Then, for each* $i \in \mathbb{Z}$, *we obtain*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon X^i_{\cdot/\epsilon^2} = 0 \qquad \textit{weakly in } C([0,\infty);\mathbb{R}) \textit{ under } \mathsf{P}_\mathsf{s} \textit{ in } \mu\textit{-probability.}$$

That is, for any $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}))$ *and for each* $\kappa > 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_\mathsf{s}[F(\epsilon X^i_{\cdot/\epsilon^2})] - F(0)| \geq \kappa\}) = 0,$$

where 0 *in* $F(0)$ *denotes the constant path with value* 0.

The Dirichlet forms describing $(X^0, \sum_{i\neq 0} \delta_{X^i - X^0})$ and $\sum_{i\neq 0} \delta_{X^i-X^0}$ will be given in Section 3. Assumption (2.10) is necessary for this.

We emphasize that our framework does not require any ISDE. Indeed, only a Dirichlet form constructing the unlabeled diffusion is sufficient.

If the point process μ satisfies the geometric condition below, then the unlabeled diffusion given by the Dirichlet form is a solution of the ISDE [17]. Suppose that μ has a logarithmic derivative $\mathsf{d}^\mu = \mathsf{d}^\mu(s, \mathsf{s})$ in the sense of [17]. Then the labeled dynamics $\mathbf{X}$ are described by the infinite-dimensional stochastic differential equation

$$dX^i_t = dB^i_t + \frac{1}{2}\mathsf{d}^\mu(X^i_t, \mathsf{X}^{\diamondsuit,i}_t)dt,$$

where, for $\mathbf{X} = (X^i_t)_i$, we set

$$\mathsf{X}^{\diamondsuit,i}_t = \sum_{j\in\mathbb{Z},\, j\neq i} \delta_{X^j_t}.$$

If μ is a canonical Gibbs measure with inverse temperature β and potential Ψ, then

$$\mathsf{d}^\mu(x, \mathsf{s}) = -\beta \sum_i \nabla_x \Psi(x, s_i) \qquad (\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}).$$

If μ is a Ginibre point process or a Sine$_\beta$ point process, then d^μ is given by

$$\mathsf{d}^\mu(x, \mathsf{s}) = \beta \lim_{R\to\infty} \sum_{|s_i|<R} \frac{x - s_i}{|x - s_i|^2}.$$

This justifies the intuition such that the interaction potentials of these point processes are logarithmic function $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$.

We remark that our framework [13] is very general, and contains many examples beyond Gibbs measures and point processes with pairwise interactions. For example, if μ is a distribution of the zero points of planar Gaussian analytic functions (GAF), then its logarithmic derivative would not be given by a two-body potential Ψ. We can still apply our result to this model. We plan to study this problem in a forth coming paper. We refer to [4] for discussion of GAFs.

§ 3. Invariance principle and self-diffusion matrix

In this section, we quote a general theorem on an invariance principle for additive functionals of reversible Markov processes from [13], and present a refinement corresponding to (1.6).

Throughout this section, we assume (1.4), (2.3)–(2.5), and (2.10). That is, we make the assumptions in Theorem 2.1 except $d = 1$. We suppress this in the statements of the lemmas in this section.

Let (P, X) be the diffusion given by the Dirichlet form $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu)$ as in Section 2. Let $\mathfrak{l}$ be a label, and write $\mathsf{X} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X^i}$. Let $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ be the associated labeled dynamics.

A standard device for the tagged particle problem for interacting Brownian motions is to introduce processes of the environment seen from the tagged particles [1, 5, 8, 21, 13, 14]. Following this, we define a change of coordinates for $\mathbf{X}$ as follows. Let $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and set

$$X = X^0, \quad Y^i = X^i - X^0, \ (i \in \mathbb{Z}^*). \tag{3.1}$$

Then X denotes the tagged particle and $\mathbf{Y} = (Y^i)_{i\in\mathbb{Z}^*}$ is the (labeled) environment seen from the tagged particle. Let $\mathsf{Y} = \{\mathsf{Y}_t\}$ be the unlabeled process associated with $\mathbf{Y} = (Y^i)_{i\in\mathbb{Z}^*}$:

$$\mathsf{Y}_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*} \delta_{Y^i_t} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*} \delta_{X^i_t - X^0_t}. \tag{3.2}$$

Then Y is the process representing the (unlabeled) environment seen from the tagged particle $X = X^0$. We call Y the environment process. We also call the pair (X, Y) the tagged particle and environment process.

Remark. If $\mathbf{X}$ is given by (1.1), then from (3.1) we see that $(X, \mathbf{Y})$ is given by

$$dX_t = dB^0_t - \frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \nabla\Psi(Y^j_t)dt,$$
$$dY^i_t = \sqrt{2}\, d\tilde{B}^i - \frac{\beta}{2}\nabla\Psi(Y^i_t)dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \nabla\Psi(Y^j_t)dt - \frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \nabla\Psi(Y^i_t - Y^j_t)dt,$$

where $\{\tilde{B}^i\}_{i\in\mathbb{Z}^*}$ are d-dimensional Brownian motions given by

$$\tilde{B}^i_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^i_t - B^0_t).$$

We remark that $\{\tilde{B}^i\}_{i\in\mathbb{Z}^*}$ are not independent but only identically distributed random variables equivalent to standard Brownian motion.

Using (3.1) and (3.2), we have constructed dynamics $\mathbf{Y}$, $(X, \mathbf{Y})$, Y, and (X, Y) from X. We now specify the Dirichlet forms associated with Y and (X, Y).

We remark that, although $\mathbf{Y}$ and $(X, \mathbf{Y})$ are also diffusions with state space $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ and $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$, respectively, there exist no associated Dirichlet spaces because of the lack of suitable invariant measures. For example, if μ is a Gibbs measure with interaction Ψ, then such measures $\widetilde{\mu}_0$ and $dx \times \widetilde{\mu}_0$ for $\mathbf{Y}$ and $(X, \mathbf{Y})$ are loosely given by

$$\widetilde{\mu}_0 = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\{-\beta\Big(\sum_{i<j,\, i,j\in\mathbb{Z}} \Psi(y_i - y_j) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Psi(0 - y_k)\Big)\} \prod_{l\in\mathbb{Z}} dy_l.$$

This cannot be justified because of the presence of the infinite product of Lebesgue measures $\prod_{l\in\mathbb{Z}} dy_l$. In contrast, Y and (X, Y) are diffusions with invariant measures μ_0 and $dx \times \mu_0$, respectively. As a result, they have associated Dirichlet spaces. This fact is key to analysis in the Dirichlet form version of Kipnis–Varadhan theory [13].

Once the Dirichlet forms describing the processes Y and (X, Y) have been established, we can dispense with ISDE (1.1), which yields the generality of our result. In fact, the process $\mathbf{X}$ in Theorem 2.1 is not necessary given by ISDE (1.1). Thus our framework is much more general than the classical one in [1] and [5].

Let $D^{\mathrm{sft}} = (D_1^{\mathrm{sft}}, \dots, D_d^{\mathrm{sft}})$, where $D_k^{\mathrm{sft}} : \mathcal{D}_\circ \to \mathcal{D}_\circ$ is such that

$$D_k^{\mathrm{sft}} f(\mathsf{s}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\{f(\theta_{\epsilon \mathbf{e}_k}(\mathsf{s})) - f(\mathsf{s})\},$$

and $\mathbf{e}_k$ is the kth unit vector in $\mathbb{R}^d$. We set

$$D^{\mathrm{sft}}[f, g] = \frac{1}{2} D^{\mathrm{sft}} f \cdot D^{\mathrm{sft}} g.$$

Let $\mathbb{D}$ be defined as in (2.1). Let $\mathbb{D}_{\mathsf{Y}}$ be the square field on $\mathcal{D}_\circ$ such that

$$\mathbb{D}_{\mathsf{Y}}[f, g] = D^{\mathrm{sft}}[f, g] + \mathbb{D}[f, g]. \tag{3.3}$$

Let $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ})$ be the bilinear form such that

$$\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(f, g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}_{\mathsf{Y}}[f, g] d\mu_0,$$
$$\mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ} = \{f \in L^2(\mathsf{S}, \mu_0) \cap \mathcal{D}_\circ \,;\, \mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(f, f) < \infty\}.$$

The next lemma is a special case of a result for translation invariant diffusions on S in [16], and gives a Dirichlet form for Y.

Lemma 3.1 ([16, Th. 2.6 (1), Th. 2.7 (2.33)]).
(1) $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ})$ is closable on $L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$.
(2) Y in (3.2) is a diffusion associated with $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$, where $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ is the closure of $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$.

We next specify the Dirichlet space associated with the coupled process (X, Y). We naturally regard ∇_x and D^{sft} as operators on $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ$. For $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ$, we set

$$\begin{aligned}
&(\nabla_x - D^{\mathrm{sft}})[f,g] = \frac{1}{2}(\nabla_x - D^{\mathrm{sft}})f \cdot (\nabla_x - D^{\mathrm{sft}})g, \\
&\mathbb{D}_{X\mathsf{Y}}[f,g] = (\nabla_x - D^{\mathrm{sft}})[f,g] + \mathbb{D}[f,g], \\
&\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathsf{S}} \mathbb{D}_{X\mathsf{Y}}[f,g] dx d\mu_0.
\end{aligned}$$

Applying a general result in [16] to translation invariant diffusions on S, we obtain:

Lemma 3.2 ([16], Th. 2.6). $(\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}, C_0(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ)$ is closable on $L^2(\mathbb{R} \times \mathsf{S}, dx d\mu_0)$.

We denote by $\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ the distribution of the diffusion $\mathsf{Y} = \{\mathsf{Y}_t\}$ starting at s given by the Dirichlet form $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$. We denote by $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$ the distribution of the diffusion $(X, \mathsf{Y}) = \{(X_t, \mathsf{Y}_t)\}$ starting at (x, s) given by the Dirichlet form $(\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{X\mathsf{Y}})$ on $L^2(\mathbb{R} \times \mathsf{S}, dx d\mu_0)$. By the general theory of Dirichlet forms [3], $\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ and $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$ are unique up to quasi-everywhere starting points. The next two lemmas show the existence of suitable versions of these diffusion measures.

The next lemma explains the relationship between Y and (X, Y) and recalls the identities involving $\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ and $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$. We set

$$X - X_0 = \{X_t - X_0\}_{t \in [0,\infty)}.$$

Lemma 3.3 ([13, Lem. 2.3]). The diffusions $\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}}$ and $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$ satisfy the following:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{Y}} = \mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}(\mathsf{Y} \in \cdot) \quad \text{for each } x \in \mathbb{R}^d, \\
&\mathsf{P}_{(0,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}((X - X_0, \mathsf{Y}) \in \cdot) = \mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}((X - X_0, \mathsf{Y}) \in \cdot) \quad \text{for each } x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

We next clarify the relationship between the original diffusion X and the diffusion (X, Y). Let $\mathsf{S}_{\mathrm{s.i}}$ be defined as in (2.7), and let

$$\mathsf{S}_x = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}_{\mathrm{s.i}}; \mathsf{s}(\{x\}) = 1\}.$$

For $\mathsf{s} \in \mathsf{S}_x$ and a label $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, we set $i(\mathsf{s}, x) \in \mathbb{Z}$ such that

$$s_{i(\mathsf{s},x)} = x. \tag{3.4}$$

Let $\mathsf{P} = \{\mathsf{P}_{\mathsf{s}}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}}$ be the distribution of the original unlabeled diffusion X given by the Dirichlet form $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu)$ as before. Because μ is translation invariant, there is a version of P_{s} such that

$$\mathsf{P}_{\mathsf{s}} \circ \theta_x^{-1} = \mathsf{P}_{\theta_x(\mathsf{s})} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d \text{ and } \mathsf{s} \in \mathsf{S}.$$

Lemma 3.4 ([16, Th. 2.7 (2.32)]). Let $i(\mathsf{s}, x)$ be defined as above. Then, for each $x \in \mathbb{R}^d$ and $\mathsf{s} \in \mathsf{S}_x$, (a version of) $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$ satisfies

$$\mathsf{P}_{\mathsf{s}}(X^{i(x,\mathsf{s})} \in \cdot) = \mathsf{P}_{(x,\theta_{-x}(\mathsf{s}-\delta_x))}^{X\mathsf{Y}}(X \in \cdot). \tag{3.5}$$

We use an invariance principle obtained in [13]. Applying [13, Th. 1, Lem. 5.5] to P^{Y} and $\mathsf{P}^{X\mathsf{Y}}$, we obtain:

Lemma 3.5. There exists a non-negative definite matrix-valued function $\hat{a}$ such that, for each x,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2}) = \sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B \quad \text{in law in } C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \tag{3.6}$$

under $\mathsf{P}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}$ in μ_0-probability. That is, for any $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$ and each $\kappa > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu_0(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_{(x,\mathsf{s})}^{X\mathsf{Y}}[F(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]| \geq \kappa\}) = 0. \tag{3.7}$$

From Lemma 3.5, we introduce the self-diffusion matrix $\alpha[\mu]$ given by

$$\alpha[\mu] = \int_{\mathsf{S}} \hat{a}(\mathsf{s})\mu_0(d\mathsf{s}). \tag{3.8}$$

Lemma 3.6. Let $x \in \mathbb{R}^d$ and set $\hat{\mu}_x = \mu(\cdot|\mathsf{s}(\{x\}) = 1)$. Then

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2}^{i(x,\mathsf{s})} = \sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B \quad \text{in law in } C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$$

under P_{s} in $\hat{\mu}_x$-probability. That is, for any $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$ and each $\kappa > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2}^{i(x,\mathsf{s})})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]| \geq \kappa\}) = 0. \tag{3.9}$$

Proof. Note that $\varepsilon X_{0/\varepsilon^2}^{i(x,\mathsf{s})} = x$ for P_{s}-a.s. and $\varepsilon X_{0/\varepsilon^2} = x$ for $\mathsf{P}_{(x,\theta_{-x}(\mathsf{s}-\delta_x))}^{X\mathsf{Y}}$-a.s.. From this and (3.5) in Lemma 3.4, we see that

$$\mathsf{P}_{\mathsf{s}} \circ (\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2}^{i(x,\mathsf{s})} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2}^{i(x,\mathsf{s})})^{-1} = \mathsf{P}_{(x,\theta_{-x}(\mathsf{s}-\delta_x))}^{X\mathsf{Y}} \circ (\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2})^{-1}. \tag{3.10}$$

We easily see that

$$\hat{\mu}_x \circ \{\theta_{-x}(\mathsf{s} - \delta_x)\}^{-1} = \mu_0. \tag{3.11}$$

Using (3.10) and (3.11) and applying (3.7) in Lemma 3.5, we obtain, for each x,

$$
\begin{aligned}
(3.12)\qquad & \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; \Big|\mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\varepsilon X^{i(x,\mathsf{s})}_{\cdot/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]\Big| \ge \kappa\}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; \Big|\mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\varepsilon X^{i(x,\mathsf{s})}_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X^{i(x,\mathsf{s})}_{0/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]\Big| \ge \kappa\}) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; \Big|\mathsf{E}^{X\mathsf{Y}}_{(x,\theta_{-x}(\mathsf{s}-\delta_x))}[F(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]\Big| \ge \kappa\}) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\mu_0(\{\mathsf{s}; \Big|\mathsf{E}^{X\mathsf{Y}}_{(x,\mathsf{s})}[F(\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2} - \varepsilon X_{0/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)]\Big| \ge \kappa\}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

We immediately deduce (3.9) from (3.12). □

Theorem 3.7. *Assume* (1.4), (2.3)–(2.5), *and* (2.10). *Then, for each* $i \in \mathbb{Z}$,

$$
(3.13)\qquad \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon X^{i}_{\cdot/\epsilon^2} = \sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B \quad \textit{weakly in } C([0,\infty);\mathbb{R}^d)
$$

under P_{s} *in* μ*-probability. That is, for any* $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$,

$$
(3.14)\qquad \lim_{\epsilon\to 0}\mu(\{\mathsf{s}; |\mathsf{E}_{\mathsf{s}}(F(\epsilon X^{i}_{\cdot/\epsilon^2})) - F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)| \ge \kappa\}) = 0 \quad \textit{for each } \kappa > 0.
$$

Proof. Let $i(\mathsf{s},x)$ be as in (3.4). Set $\hat{\mu}_x = \mu(\cdot|\mathsf{s}(\{x\}) = 1)$ as in Lemma 3.6. Recall that $\mu(\mathsf{S}_{\mathrm{s.i}}) = 1$ by (2.8). Let $\mathfrak{l}(\mathsf{s}) = (\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}))_{i\in\mathbb{Z}}$ be the label as before.

Without loss of generality, we can and do assume $i = 0$ in (3.13). By a straightforward calculation, we have

$$
\begin{aligned}
(3.15)\qquad \mu(X^0 \in \cdot) &= \int_{\mathbb{R}^d}\mu(X^0 \in \cdot\,|\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)\,\mu\circ\mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\mu(X^0 \in \cdot\,|\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x,\, \mathsf{s}(\{x\}) = 1)\,\mu\circ\mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\mu}_x(\{X^{i(\mathsf{s},x)} \in \cdot\} \cap \{i(\mathsf{s},x) = 0\}\,|\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)\,\mu\circ\mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\mu}_x(X^{i(\mathsf{s},x)} \in \cdot\,|\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)\,\mu\circ\mathfrak{l}_0^{-1}(dx).
\end{aligned}
$$

Let $F \in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^d))$, and set

$$
\begin{aligned}
(3.16)\qquad G^1_{\varepsilon}(\mathsf{s}) &= \mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\varepsilon X^{0}_{\cdot/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)], \\
G^2_{\varepsilon}(\mathsf{s}) &= \mathsf{E}_{\mathsf{s}}[F(\varepsilon X^{i(\mathsf{s},\mathsf{x})}_{\cdot/\varepsilon^2})] - E[F(\sqrt{\hat{a}(\mathsf{s})}B)].
\end{aligned}
$$

For each $\kappa > 0$, we see from (3.15) that

$$
(3.17)\qquad \mu(\{\mathsf{s}; |G^1_{\varepsilon}(\mathsf{s})| \ge \kappa\}) = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |G^2_{\varepsilon}(\mathsf{s})| \ge \kappa\}\,|\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)\,\mu\circ\mathfrak{l}_0^{-1}(dx).
$$

Let $S_R = \{x; |x| \le R\}$. For any $\upsilon > 0$, take $R = R(\upsilon)$ such that

$$\mu \circ \mathfrak{l}_0^{-1}(S_R^c) \le \upsilon.$$

Then

$$\int_{S_R^c} \hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |G_\varepsilon^2(\mathsf{s})| \ge \kappa\} | \mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x) \, \mu \circ \mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \le \upsilon. \tag{3.18}$$

It is not difficult to see that, for each $i, R \in \mathbb{N}$,

$$\int_{S_R} \frac{1}{\hat{\mu}_x(\mathfrak{l}_i(\mathsf{s}) = x)} \mu \circ \mathfrak{l}_i^{-1}(dx) = \int_{S_R} \rho^1 dx < \infty.$$

Using this and Lemma 3.6, we apply the bounded convergence theorem to obtain

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{S_R} \hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |G_\varepsilon^2(\mathsf{s})| \ge \kappa\} \, | \mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x) \, \mu \circ \mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&\le \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{S_R} \hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |G_\varepsilon^2(\mathsf{s})| \ge \kappa\}) \frac{1}{\hat{\mu}_x(\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)} \, \mu \circ \mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&= \int_{S_R} \limsup_{\varepsilon \to 0} \hat{\mu}_x(\{\mathsf{s}; |G_\varepsilon^2(\mathsf{s})| \ge \kappa\}) \frac{1}{\hat{\mu}_x(\mathfrak{l}_0(\mathsf{s}) = x)} \, \mu \circ \mathfrak{l}_0^{-1}(dx) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Putting (3.16)–(3.19) together we have

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mu(\{\mathsf{s}; |G_\varepsilon^1(\mathsf{s})| \ge \kappa\}) \le \upsilon. \tag{3.20}$$

Because υ is arbitrary, we see that the left-hand side of (3.20) equals zero. Together with (3.16), this yields (3.14). We have thus completed the proof. □

Remark. (1) When using Kipnis–Varadhan theory, one has to assume the existence of the mean forward velocity $\varphi \in L^2(\mu_0)$ of tagged particles and that

$$|\int_{\mathsf{S}} \varphi f d\mu_0| \le C \mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(f, f)^{1/2} \quad \text{for all } f \in \mathcal{D}_{\mathsf{Y}}$$

for some constant C. Roughly speaking, the existence of the mean forward velocity is captured by the condition

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} E_{\mathsf{s}}[X_t^0 - X_0^0] =: \varphi(\mathsf{s}) \quad \text{in } L^2(\mathsf{S}, \mu_0),$$

the average of which must vanish with respect to the reduced Palm measure μ_0. It is often difficult to check these conditions for interacting Brownian motions with singular or long range potentials. Indeed, one essentially uses the fact that the dynamics are given by a strong solution of an ISDE (1.1).

In [13], we developed a Dirichlet form version of Kipnis–Varadhan theory that allows us to verify these conditions and generalize the results themselves. In fact, only the existence of the coupled Dirichlet form $(\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{X\mathsf{Y}})$ on $L^2(\mathbb{R} \times \mathsf{S}, dxd\mu_0)$ was necessary as a substitute for the mean forward velocity condition above. This follows from (1.4), (2.3)–(2.5), and (2.10) as we see in Lemma 3.2.
(2) In [13], Dirichlet forms are assumed to satisfy the strong sector condition, which is a generalization of reversibility. It is easy to see that Theorem 3.7 holds under the strong sector condition.

§ 4. Representation of the self-diffusion constant $\alpha[\mu]$

Before quoting a representation theorem for the self-diffusion matrix $\alpha[\mu]$ from [13], we introduce the quotient Dirichlet form associated with $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$. Although the ideas in this section are valid for $d \geq 1$, we restrict our discussion to $d = 1$ for simplicity. We refer the reader to [13] for the general case.

Recall the decomposition $\mathbb{D}_{\mathsf{Y}} = D^{\mathrm{sft}} + \mathbb{D}$ in (3.3), and choose bilinear forms on $\mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ}$ such that

$$\mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}}(f, g) = \int_{\mathsf{S}} D^{\mathrm{sft}}[f, g] d\mu_0, \quad \mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}(f, g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f, g] d\mu_0.$$

We can naturally extend the domain $\mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ}$ of the operator $D^{\mathrm{sft}} : \mathcal{D}_{\mathsf{Y}\circ} \to L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$ to $\mathcal{D}_{\mathsf{Y}}$, where these bilinear forms are represented by the Dirichlet form $\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}$.

$$\mathcal{E}_{\mathsf{Y}} = \mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}} + \mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}. \tag{4.1}$$

Let $\tilde{\mathcal{D}}^2_{\mathsf{Y}} = \mathcal{D}_{\mathsf{Y}} / \mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$ be the quotient space of $\mathcal{D}_{\mathsf{Y}}$ with the equivalence relation $\sim_{\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}}$ given by $\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}$, that is, $f \sim_{\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}} g$ if and only if $\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}(f - g, f - g) = 0$. Let $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}\circ}$ be a vector space

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}\circ} = \{\mathsf{f} = (D^{\mathrm{sft}} f, f / \sim_{\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}}) \in L^2(\mathsf{S}, \mu_0) \times \tilde{\mathcal{D}}^2_{\mathsf{Y}} \,;\, f \in \mathcal{D}_{\mathsf{Y}}\}$$

with inner product

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}, \mathsf{g}) = (D^{\mathrm{sft}} f, D^{\mathrm{sft}} g)_{L^2(\mathsf{S}, \mu_0)} + \mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}(f, g).$$

Let $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$ be the completion of $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}\circ}$ with inner product $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}$ as above. Note that $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}, \mathsf{g}) = \mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(f, g)$. Hence $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}})$ gives a representation of the quotient Hilbert space of $\mathcal{D}_{\mathsf{Y}}$ with inner product $\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}$.

Let $(\tilde{\mathcal{E}}^1_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}})$ and $(\tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}})$ be the quotient bilinear forms of $(\mathcal{E}^1_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ and $(\mathcal{E}^2_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ defined in the same manner as $(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}})$. By definition, the domain of these bilinear forms is $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$, and (4.1) yields the representation

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}} = \tilde{\mathcal{E}}^1_{\mathsf{Y}} + \tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}.$$

For $\mathsf{f} = (\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2)$ and $\mathsf{g} = (\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$, we have $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}, \mathsf{g}) = \tilde{\mathcal{E}}^1_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}_1, \mathsf{g}_1) + \tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}_2, \mathsf{g}_2)$.

For $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in L^2(\mathsf{S}, \mu_0) \times \tilde{\mathcal{D}}^2_{\mathsf{Y}}$ we extend the domain of $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}$ so that

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}((f_1, f_2), (g_1, g_2)) = (f_1, g_1)_{L^2(\mathsf{S}, \mu_0)} + \tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(f_2, g_2).$$

We quote the following lemma from [13]:

Lemma 4.1. There exists a unique solution $\chi \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$ of the equation

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}(\chi, \mathsf{g}) = \tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}((1,0), \mathsf{g}) \quad \text{for all } \mathsf{g} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}. \tag{4.2}$$

Proof. Because $F(\mathsf{g}) = \tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}((1,0), \mathsf{g})$ can be regarded as a bounded linear functional of the Hilbert space $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$ with inner product $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}$, Lemma 4.1 is obvious from the Riesz theorem. □

Lemma 4.2. Let $\chi = (\chi_1, \chi_2) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$ be the unique solution of equation (4.2). Then the self-diffusion constant $\alpha[\mu]$ is given by

$$\alpha[\mu] = \tilde{\mathcal{E}}^1_{\mathsf{Y}}(1 - \chi_1, 1 - \chi_1) + \tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(\chi_2, \chi_2). \tag{4.3}$$

In particular, if $(1,0) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$, then $\alpha[\mu] = 0$.

Proof. Applying [13, Theorems 1,2] to X, we deduce that X has the scaling limit in (3.6) with the self-diffusion constant $\alpha[\mu]$ given by (4.3). This completes the proof of the first claim. If $(1,0) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$, then $\chi = (1,0)$. Hence the second claim follows from the first. □

In the rest of this section, we explain the back-ground of the representation formula (4.3). To prove the convergence of $\varepsilon X_{\cdot/\varepsilon^2}$, we use the technique of corrector [8], that is, we use a function χ_ε, called corrector, for which

$$\varepsilon X_{t/\varepsilon^2} - \chi_\varepsilon(\theta_{\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}}(\mathsf{s})) = \text{ a continuous local martingale } + o(\varepsilon),$$

and for which

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|x| < R} E[|\chi_\varepsilon(\theta_{\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}}(\mathsf{s}))|^2] = 0 \quad \text{for any } R \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \nabla_x \chi_\varepsilon(\theta_x(\mathsf{s}))|_{x=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} D^{\mathrm{sft}} \chi_\varepsilon(\mathsf{s}) = \psi(\mathsf{s}) \quad \text{in } L^2(\mathsf{S}, \mu_0).$$

Then we have

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon X_{t/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \{\varepsilon X_{t/\varepsilon^2} - \chi_\varepsilon(\theta_{\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}}(\mathsf{s}))\} = M_t.$$

Very roughly, using Fukushima decomposition (the Dirichlet form version of the Itô-Tanaka formula), we see that the quadratic variation of the limit martingale M is given by

$$\langle M\rangle_t = \mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(x-\chi, x-\chi)t, \tag{4.4}$$

where χ is a formal limit $\chi = \lim_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon(\mathsf{s})$. In practice, χ_ε diverge as $\varepsilon \to 0$ and x is not in the domain of the Dirichlet space $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$; nevertheless, we can still justify (4.4) from formula (4.3) by introducing the quotient Dirichlet form $(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}})$ and regarding ψ as an element of $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$. In fact, $\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(x-\chi, x-\chi)$ can be replaced by $\tilde{\mathcal{E}}^1_{\mathsf{Y}}(1-\chi_1, 1-\chi_1)+\tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(\chi_2,\chi_2)$, where χ corresponds to (χ_1,χ_2).

To apply Fukushima decomposition to the function $x-\chi_\varepsilon(\theta_x(\mathsf{s}))$, we use the coupled Dirichlet form $(\mathcal{E}_{X\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{X\mathsf{Y}})$ because $x-\chi_\varepsilon(\theta_x(\mathsf{s}))$ belongs to $\mathcal{D}_{X\mathsf{Y}}$ locally. We remark that $x-\chi_\varepsilon(\theta_x(\mathsf{s}))$ cannot be in the domain of $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ even locally.

§ 5. Vanishing self-diffusion constant in one dimension

In this section, we prove that $\alpha[\mu] = 0$ for $d = 1$ and μ satisfying (2.5).

Theorem 5.1. *Suppose that $d = 1$, and assume* (1.4), (2.3)–(2.5), *and* (2.10). *Then the self-diffusion constant $\alpha[\mu]$ vanishes.*

Lemma 5.2. Let $\mathcal{N}_2 = \{\mathsf{s}\,;\,\mathsf{s}(\{0\}) \ge 1\}$, and let $\mathrm{Cap}_{\mathsf{Y}}$ be the capacity of the Dirichlet space $(\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}, \mathcal{D}_{\mathsf{Y}})$ on $L^2(\mathsf{S}, \mu_0)$. Then we obtain

$$\mathrm{Cap}_{\mathsf{Y}}(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = 0. \tag{5.1}$$

Proof. Recall that $\mathrm{Cap}(\mathcal{N}_1) = 0$ by assumption, which implies the non-collision property of X. Because $\mathsf{Y} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*}\delta_{Y^i_t} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*}\delta_{X^i_t - X^0_t}$ is given by (3.1) and (3.2), Y inherits the non-collision property from X. Hence we deduce $\mathrm{Cap}_{\mathsf{Y}}(\mathcal{N}_1) = \mathrm{Cap}_{\mathsf{Y}}(\mathcal{N}_2) = 0$ from $\mathrm{Cap}(\mathcal{N}_1) = 0$. This implies (5.1). □

Let φ_N be the function on S such that

$$\varphi_N(\mathsf{s}) = \frac{1}{N}\{s_1 + \cdots + s_N\},$$

where we write $\mathsf{s} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*}\delta_{s_i}$ in such a way that $s_{-1} < 0 < s_1 < s_2 < s_3, \ldots$. We note that φ_N is neither continuous on $\mathcal{N}_1$ nor smooth on $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$; nevertheless, φ_N is an element of the domain of the Dirichlet form. Indeed, Lemma 5.2 implies the following.

Lemma 5.3. For each $N \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_N \in \mathcal{D}_{\mathsf{Y}}. \tag{5.2}$$

Furthermore, $\{\varphi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ is an $\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}$-Cauchy sequence.

Proof. By Lemma 5.2 we have $\mathrm{Cap}_{\mathsf{Y}}(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = 0$. The points of discontinuity of φ are included in $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Away from the points of discontinuity, φ satisfies

$$\mathbb{D}_{\mathsf{Y}}[\varphi_N, \varphi_N] \le \frac{1}{2}\{1 + \frac{1}{N}\}.$$

Combining these, we see that

$$\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(\varphi_N, \varphi_N) \le \frac{1}{2}\{1 + \frac{1}{N}\}.$$

Hence we obtain claim (5.2).

A straightforward calculation shows that $D^{\mathrm{sft}}[\varphi_M - \varphi_N, \varphi_M - \varphi_N] = 0$. Recall that $\mathbb{D}_{\mathsf{Y}} = D^{\mathrm{sft}} + \mathbb{D}$ by (3.3). Then,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\mathsf{Y}}[\varphi_M - \varphi_N, \varphi_M - \varphi_N] =& \mathbb{D}[\varphi_M - \varphi_N, \varphi_M - \varphi_N] \\ \le& 2\big\{\mathbb{D}[\varphi_M, \varphi_M] + \mathbb{D}[\varphi_N, \varphi_N]\big\} = \big\{\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\big\}.\end{aligned}$$

Thus we have

$$\lim_{M,N\to\infty} \mathcal{E}_{\mathsf{Y}}(\varphi_M - \varphi_N, \varphi_M - \varphi_N) = 0.$$

This completes the proof of Lemma 5.3. $\square$

Lemma 5.4. Let $\tilde{\varphi}_N$ be the element of $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$ whose representative is φ_N. Then

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\varphi}_N = (1, 0) \quad \text{in } \tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}. \tag{5.3}$$

In particular, $(1, 0) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$.

Proof. By Lemma 5.3, $\{\varphi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ is an $\mathcal{E}_{\mathsf{Y}}$-Cauchy sequence. Hence we easily deduce that $\{\tilde{\varphi}_N\}_N$ is a Cauchy sequence in the quotient Dirichlet space $(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathsf{Y}}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}})$.

By a direct calculation we see that, for all N and μ_0-a.s. s,

$$D^{\mathrm{sft}}\varphi_N(\mathsf{s}) = 1, \quad \mathbb{D}[\varphi_N, \varphi_N](\mathsf{s}) = 1/2N.$$

Hence we have $\tilde{\mathcal{E}}^2_{\mathsf{Y}}(\varphi_N, \varphi_N) = 1/2N$. Combining these we obtain (5.3). $\square$

Proof of Theorem 5.1 From Lemma 5.4, we see that $(1, 0) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathsf{Y}}$. Hence we obtain $\alpha[\mu] = 0$ from Lemma 4.2. $\square$

§ 6. Proof of Theorem 2.1

Theorem 2.1 follows immediately from Theorem 3.7 and Theorem 5.1.

References

[1] De Masi, A., Ferrari, P.A., Goldstein, S., Wick, W.D., An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments. *J. Stat. Phys,* **55***, Nos.* 3/4 (1989) 787-855

[2] Fritz, J., Gradient dynamics of infinite point systems Ann. Prob. **15** (1987) 478-514.

[3] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda M., Dirichlet forms and symmetric Markov processes 2nd ed., Walter de Gruyter (2011).

[4] S. Ghosh and Y. Peres, Rigidity and Tolerance in point processes: Gaussian zeroes and Ginibre eigenvalues, to appear in Duke Mathematical Journal, available at *http://arxiv.org/pdf/1211.2381v2.pdf*

[5] Guo, M.Z., Papanicolaou, G.C. Self-Diffusion of interacting Brownian particles in "Probabilistic Method in Mathematical Physics", Proc. Taniguchi International Sympo. at Katata and Kyoto (1985), eds. K. Ito and N. Ikeda, 113-152, (1987) Kinokuniya.

[6] Harris, T.E., Diffusions with collision between particles *J. Appl. Prob.* **2**, 323-338 (1965)

[7] Inukai, K., Collision or non-collision problem for interacting Brownian particles *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **82**, (2006), 66-70.

[8] Kipnis, C. and Varadhan, S.R.S. Central limit theorems for additive functional of reversible Markov process and applications to simple exclusions *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 1-19.

[9] Lang, R., Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung I Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977) 55-72.

[10] Lang, R., Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung II Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978) 277-299.

[11] Ma, Z.-M., Röckner, M., Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms Springer-Verlag 1992.

[12] Osada, H., Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996).

[13] Osada, H. An invariance principle for Markov processes and Brownian particles with singular interaction *Ann. Inst. Henri Poincaré,* **34**, **n**° 2 (1998), 217-248.

[14] Osada, H., Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core *Probab. Theory Relat. Fields*, **112**, (1998), 53-90.

[15] Osada, H., Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimensions and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields in Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, eds. T. Funaki and H. Osada, Advanced Studies in Pure Mathematics **39**, 2004, 325-343.

[16] Osada, H., Tagged particle processes and their non-explosion criteria *J. Math. Soc. Japan*, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

[17] Osada, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices. *Probability Theory and Related Fields*, **153**, 471-509 (2012)

[18] Osada, H., Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials. Ann. Prob. **41**, 1-49 (2013)

[19] Osada, H., Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II : Airy random point field. *Stochastic Processes and their applications* **123**, 813-838 (2013)

[20] Osada, H., Ginibre interacting Brownian motion in infinite dimensions is sub-diffusive (preprint)

[21] Osada, H., Saitoh, T., An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains Probab. Theory Relat. Fields **101** , 45-63 (1995)
[22] Osada, H., Shirai, T., Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process Probab. Theory Relat. Fields DOI 10.1007/s00440-015-0644-6
[23] Osada, H., Tanemura, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields. (preprint) arXiv:1412.8674
[24] Shiga, T. A remark on infinite-dimensional Wiener processes with interactions Z. Wahrschverw. Gebiete **47** (1979) 299-304
[25] Spohn, H., Interacting Brownian particles:a study of Dyson's model In: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, G. Papanicolaou (ed), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, **9**, Berlin: Springer-Verlag, 1987, pp. 151-179.
[26] Spohn, H., Tracer dynamics in Dyson's model of interacting Brownian particles J Stat. Phys., **47**, 669-679 (1987).
[27] Tanemura, H., A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in $\mathbb{R}^d$ Probab. Theory Relat. Fields **104** (1996) 399-426.
[28] Tsai, Li-Cheng, Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model Probab. Theory Relat. Fields (published on line) DOI 10.1007/s00440-015-0672-2