

ランダム行列と非衝突拡散過程

(確率論サマースクール, 2006 年 8 月 7 日 ~ 10 日, 信州大学)

種村 秀紀

千葉大学理学部数学・情報数理学科

〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33

e-mail: tanemura@math.s.chiba-u.ac.jp

Dyson は, 対角成分が実ブラウン運動に従って変動し, 非対角成分が複素ブラウン運動に従って変動する, エルミート行列に値をもつ確率過程を考案した. 行列のサイズが $N \times N$ であるとする, エルミート行列値なので N 個の固有値は実軸上を運動することになるが, Dyson はその運動を記述する N 連立の確率微分方程式を導いた. この固有値の確率過程を Dyson モデルとよぶことにする. 実軸上の固有値を, それぞれ 1 次元上の粒子の位置とみなすことにすると, Dyson モデルは 1 次元 N 粒子系を記述することになる. Dyson は, これはいかなる粒子間の衝突も起こらないという条件の下での N 個の 1 次元ブラウン運動 (非衝突ブラウン運動) に他ならないことを結論している [6]. 今回の集中講義では, これらの Dyson の結果の拡張, 発展について, この数年間の香取眞理氏 (中央大学理工学部) との共同研究を中心に紹介する.

Contents

1	ブラウン運動とその条件付き過程	2
2	エルミート行列値過程の固有値がみたす方程式	5
2.1	Bru の定理とその応用	5
2.2	定理 2.1 の証明	8
3	非衝突ブラウン運動とランダム行列	12
3.1	Karlin-McGregor の公式	12
3.2	時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動	15
3.3	非衝突ブラウン運動に対応するランダム行列	18
3.4	シューア関数による展開	21
4	一般化について	23

1 ブラウン運動とその条件付き過程

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする. 次の性質を満たす確率過程 $\{B(t, \omega)\}_{t \in [0, \infty)}$ を 1 次元ブラウン運動 (Brownian motion) という.

- (i) $B(0, \omega) = 0$ が確率 1 で成り立つ.
- (ii) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, ω を固定したとき $B(t, \omega)$ は t の関数として連続な実数値関数である. (この性質があるとき, 道が連続であるという.)
- (iii) 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_m$ ($m = 1, 2, \dots$) に対し, 増分 $\{B(t_j) - B(t_{j-1})\}_{j=1, 2, \dots, m}$ は独立で, 各々の分布は平均 0, 分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従う.

したがって

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

とおいて, $x_0 \equiv 0$ とすると, ブラウン運動が各時刻 t_j で区間 $[a_j, b_j]$ に滞在する確率 $P(B(t_j) \in [a_j, b_j], j = 1, 2, \dots, m)$ は

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_m}^{b_m} dx_m \prod_{j=1}^m G(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$$

で与えられることが導かれる. この積分核 (熱核) である $G(s, x; t, y) = G(t - s, y - x)$ を, ブラウン運動の推移確率密度関数という.

独立な D 個 (D は自然数) の 1 次元ブラウン運動を各成分にもつ確率過程を D 次元ブラウン運動という. 一般に, 道が連続である確率過程で, 強マルコフ性をもつものを拡散過程という. 特に, ブラウン運動のように推移確率密度が時刻の差 $t - s$ で定まる拡散過程は時間的に斉次であるという. 本講義では, そのような場合には, 推移確率密度 $G(s, x; t, y)$ を $G(t - s, y|x)$ と表記して, 時刻の差 $t - s$ の関数であることを明示することにする.

時刻 T で原点に到達するという条件の下でのブラウン運動を考える. この条件付き過程の推移確率密度は

$$\frac{P(B(s) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], B(t) \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon], B(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon])}{2\varepsilon P(B(s) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], B(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon])}$$

に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限をとることにより

$$G^T(s, x; t, y) = \frac{G(T - t, 0|y)G(t - s, y|x)}{G(T - s, 0|x)}, \quad 0 \leq s < t \leq T, x, y \in \mathbb{R}$$

と求められる. この条件付き確率過程を $\beta(t), t \in [0, T]$ と書くことにする. これは時間的に非斉次な拡散過程であり, 期間 T のブラウン橋 (Brownian bridge) とよばれている.

1 次元ブラウン運動は一般にはすべての実数値をとり得るが, 「負の値はとらない」という条件を課すことにする. こうして得られる条件付き過程 $Y(t), t \in [0, T]$ は, 時間的に斉次な拡散過程であり, その推移確率密度関数を $G^{(1/2)}(t, y|x), t > 0, x \geq 0, y \geq 0$ と書くことにすると

$$(1.1) \quad \begin{aligned} G^{(1/2)}(t, y|x) &= \frac{y}{x} \left\{ G(t, y|x) - G(t, -y|x) \right\}, \quad x > 0 \\ G^{(1/2)}(t, y|0) &= \frac{2}{t} y^2 G(t, y|0) \end{aligned}$$

であることが導ける. 3次元ブラウン運動 $\mathbb{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ の原点からの距離 $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2)^{1/2}$ も同じ推移確率密度関数をもつことが知られており, この拡散過程は3次元ベッセル過程 (Bessel process) とよばれている. つまり3次元ベッセル過程は, 1次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と3次元ブラウン運動の動径方向への射影としての表現という二つの異なる表現をもつことが分かる. $Y(t)$ は確率微分方程式

$$(1.2) \quad dY(t) = dB(t) + \frac{1}{Y(t)}dt, \quad t > 0$$

を満足する [36].

1次元ブラウン運動において時刻0から T までの有限な時間区間に着目し, この間には負の値はとらないという条件を課した確率過程 $X(t), t \in [0, T]$ を考えると, 今度は時間的に非斉次な拡散過程が得られる. その推移確率密度関数を $G_T^{(1/2)}(s, x; t, y), 0 \leq s < t \leq T, x, y \geq 0$ と書くと

$$(1.3) \quad \begin{aligned} G_T^{(1/2)}(s, x; t, y) &= \frac{h(T-t, y)}{h(T-s, x)} \left\{ G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x) \right\}, \quad x > 0 \\ G_T^{(1/2)}(0, 0; t, y) &= \frac{\sqrt{2\pi T}}{t} y G(t, y|0) h(T-t, y) \end{aligned}$$

である. ただし $h(T-s, x), x > 0, s \in (0, T]$ は, 時刻 s で x にいたブラウン運動が時間区間 $[s, T]$ の間は負の値をとらないでいる確率である. この条件付き過程はブラウン彷徨過程 (Brownian meander) とよばれている. 互いに独立な1次元ブラウン運動 $B_1(t), B_2(t)$ とそれらと独立である期間 T のブラウン橋 $\beta(t)$ を用いて $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \beta(t)^2)^{1/2}, t \in [0, T]$ で定義されたものもブラウン彷徨過程となることが知られており, ブラウン彷徨過程も, 1次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と3次元拡散過程の動径方向への射影としての表現の二つをもつことが分かる [40].

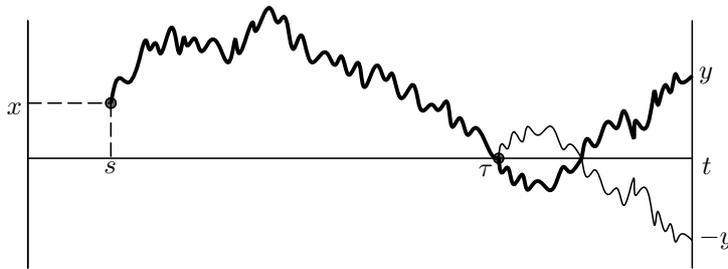


Figure 1: 反射原理の図

それでは, 上で述べた条件付き過程 $Y(t), t \in [0, T]$ の推移確率密度 (1.1) と $X(t), t \in [0, T]$ の推移確率密度 (1.3) を導いてみよう. これらはブラウン運動の反射原理 (reflection principle) というものを応用すると, 簡単に計算できるのである. 時刻 s で $x > 0$ にいたブラウン運動が, 時刻 t で $y > 0$ に到達するという状況を考えてみよう. ブラウン運動が, 時間区間 $[s, t]$ の間も常に正の値をとりながら到達する場合と, その途中のある時刻で0の値をとった後に到達する場合とに分けられる. 後者の場合を図1に示したが, この図にあるようにブラウン運動が最初に原点に到達した時刻を τ と書くことにする. τ はマルコフ時刻である. したがって, 上で述べたブラウン運動の強マルコフ性と対称性から, この時刻 τ 以降にブラウン運動がとる値の符号を

すべて反転させるという変換 (図 1 を参照) を行なっても, ブラウン運動の分布は変わらないことが導かれる. これが反射原理である. このことから, ある時刻 $\tau \in [s, t]$ で 0 の値をとった場合には, 時刻 t で区間 $[y, y + \varepsilon]$ を訪問する確率と時刻 t で区間 $[-y - \varepsilon, -y]$ を訪問する確率とが等しくなることになるので, この場合にはそれぞれの確率密度の差は零になるはずである. ところが, そのような $\tau \in [s, t]$ がなければこの差は正である. つまり時刻 s で $x > 0$ にいたブラウン運動が, 時間区間 $[s, t]$ の間は常に正の値をとりながら時刻 t で $y > 0$ に到達する確率密度は,

$$(1.4) \quad \widehat{G}(t-s, y|x) = G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x)$$

で与えられることになる. この $\widehat{G}(t-s, y|x)$ は, 原点に吸収壁がありそこにブラウン粒子が到達すると消滅してしまうという, $(0, \infty)$ 内の吸収壁ブラウン運動 (absorbing Brownian motion) とよばれる確率過程の推移確率密度となっている, という言い方もできる. (1.4) を用いると, 時刻 t で $x > 0$ にいたブラウン運動が, 時間区間 $[t, T]$ の間には負の値をとらない確率 $h(T-t, x)$ は

$$\int_0^{\infty} \widehat{G}(T-t, y|x) dy = \int_{-x}^x G(T-t, u|0) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{T-t}}^{x/\sqrt{T-t}} e^{-u^2/2} du$$

となることが分かる. $x/\sqrt{T-t} \rightarrow 0$ のときには, 最右辺の被積分関数 $e^{-u^2/2}$ を 1 で近似できるので, $h(T-t, x) \sim 2x/\sqrt{2\pi(T-t)}$ という漸近評価が得られる.

$x > 0$ のときの $X(t)$ の推移確率密度 $G_T^{(1/2)}(s, x; t, y)$ は, 時刻 s で x にいたブラウン運動が, 時刻 T までの間には原点に到達することはないという条件の下で, 時刻 $t (\leq T)$ に y に到達する確率密度であるから, $h(T-s, x)^{-1} \widehat{G}(t-s, y|x) h(T-t, y)$ であり, これが (1.3) の第 1 式である. 第 2 式は第 1 式で $s = 0$ とおいて, 上述の $h(T-s, x)$ の漸近評価と, やはり (1.4) から容易に導くことが出来る $x \rightarrow 0$ での $\widehat{G}(t, y|x)$ の漸近評価, $\widehat{G}(t, y|x) \sim (2xy/t)G(t, y|0)$ を適用すれば導ける.

(1.1) は (1.3) で $T \rightarrow \infty$ の極限をとれば得られるはずである. このことは上述の $h(T-t, x)$ の漸近評価を用いれば簡単に確かめることができる. (1.1) の第 1 式は, 3 次元ベッセル過程の推移確率密度は吸収壁ブラウン運動の推移確率密度 $\widehat{G}(t, y|x)$ を $(1/x)\widehat{G}(t, y|x)y$ と変換すれば得られることを示しているが, これは Doob の意味での優調和変換 [5] である.

(1.1) と (1.3) で与えられた 3 次元ベッセル過程とブラウン彷徨過程の推移確率密度を比較してみると, それらの分布は互いに絶対連続であって

$$(1.5) \quad P(X(\cdot) \in dw) = \sqrt{\frac{\pi T}{2}} \frac{1}{w(T)} P(Y(\cdot) \in dw)$$

となることが分かる. (1.5) は Imhof 関係とよばれている [12].

2 エルミット行列値過程の固有値がみたす方程式

2.1 Bru の定理とその応用

$N \times N$ エルミット行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$, $N \times N$ 実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}(N)$ とおく. そして行列 A の転置行列を tA , 複素共役を \bar{A} , 随伴行列を $A^* \equiv {}^t\bar{A}$ と書くことにする. Bru は $\mathcal{H}(N)$ -値過程の一例である Wishart 過程について調べ, その固有値過程が満たす方程式を導いた [2, 3]. この結果は, 行列値過程の各要素 $\xi_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq N$ が複素数値連続半マルチンゲールである場合に拡張することができる [19, 20]. この節ではこの拡張の結果得られた一般化された Bru の定理を紹介し, その応用例を与えることにする.

$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ を $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi(t) = (\xi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ の固有値を成分にもつベクトルとする. ただし, 大小関係 $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ を満たすものとする. このとき $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ を

$$U(t)^* \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

というように, $\Xi(t)$ を対角化するユニタリ行列の族とする.

$$\Gamma_{ij, k\ell}(t) dt = \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{ij} \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{k\ell}$$

とおき, また $(U(t)^* d\Xi(t) U(t))_{ii}$ の有界変動部分を $d\Upsilon_i(t)$ と書くこととする.

定理 2.1 (一般化された Bru の定理) 複素数値過程 $\xi_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq N$ を連続半マルチンゲールとする. このとき $\Xi(t)$ の固有値 $\lambda(t)$ は次の確率微分方程式を満たす.

$$(2.1) \quad d\lambda_i(t) = dM_i(t) + dJ_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ただし $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$ は $dM_i(t)dM_j(t) = \Gamma_{ii, jj}(t)dt$ であるマルチンゲールであり, $J(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_N(t))$ は

$$dJ_i(t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \mathbf{1}_{\{\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)\}} \Gamma_{ij, ji}(t) dt + d\Upsilon_i(t)$$

で与えられる有界変動過程である. ここで $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える「条件 ω の指示関数」である.

定理で導入された $\Gamma_{ik}(t)$, $\Upsilon_i(t)$ は一般にユニタリ行列過程 $U(t)$ に依存するので確率微分方程式 (2.1) はマルコフ型にはならず, $\lambda(t)$ は拡散過程にはならない. 次の 4 つの $\mathcal{H}(N)$ -値過程はユニタリ変換で分布が不変であるなどの条件があるために (2.1) がマルコフ型になる例である.

【応用例】 $\nu \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ とし, $B_{ij}^R(t)$, $B_{ij}^I(t)$, $1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N$ を $2N(N + \nu)$ 個の独立な 1 次元ブラウン運動とする. $1 \leq i, j \leq N$ に対して $s_{ij}(t)$, $a_{ij}(t)$ を次で

定義する:

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}^R(t), & i < j \\ B_{ii}^R(t), & i = j \\ \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ji}^R(t), & i > j \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}^I(t), & i < j \\ 0, & i = j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}B_{ji}^I(t), & i > j \end{cases}$$

(i) **GUE** 型行列値過程

$\Xi^{\text{GUE}}(t) = (s_{ij}(t) + \sqrt{-1}a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$, $t \in [0, \infty)$ で定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を考える. 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ は $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数になるが, $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{U}(dH)$ に対する確率密度関数は

$$\mu^{\text{GUE}}(H, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{c_1(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} H^2\right), \quad H \in \mathcal{H}(N)$$

で与えられる. ここで, Tr は行列のトレースをとることを表す. また, $c_1(N) = 2^{N/2} \pi^{N^2/2}$ である. $N \times N$ ユニタリ行列全体の集合を $\mathcal{U}(N)$ とおくと, 任意の $U \in \mathcal{U}(N)$ に対して, 確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, t)\mathcal{U}(dH)$ はユニタリ変換 $H \rightarrow U^* H U$ の下で不変である. ランダム行列理論では, このような不変性をもつ $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数の統計集団をガウス型ユニタリ集団 (GUE) とよぶ [30, 32]. この GUE の固有値分布の密度関数は, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して

$$(2.2) \quad g^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}\right) h_N(\mathbf{x})^2$$

で与えられる [30, 32]. ここで $h_N(\mathbf{x})$ は差積で表される $N \times N$ のヴァンデルモンドの行列式

$$h_N(\mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (x_j^{i-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i)$$

である. また, $C_1(N)$ は正規化定数であり, $\Gamma(x)$ をガンマ関数として $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)$ と表せる.

一般化された Bru の定理を $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ に適用するために, $d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t)$ の値を計算しておくことにする. まず $d\xi_{ii}(t)d\xi_{ii}(t) = dB_{ii}^R(t)dB_{ii}^R(t) = dt$ がすぐに分かる. また $i < j$ のときには, $d\xi_{ij}(t) = dB_{ij}^R(t)/\sqrt{2} + \sqrt{-1}dB_{ij}^I(t)/\sqrt{2} = d\overline{\xi_{ji}(t)}$ であることに注意すると, $d\xi_{ij}(t)d\xi_{ij}(t) = dt/2 - dt/2 = 0$, $d\xi_{ij}(t)d\xi_{ji}(t) = dt/2 + dt/2 = dt$ となることも分かる. $(i, j) \neq (k, \ell), (\ell, k)$ のときには, 独立性から $dB_{ij}^R(t)dB_{kl}^R(t) = dB_{ij}^I(t)dB_{kl}^I(t) = 0$ が成り立つので, $d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t) = 0$ となる. 以上をまとめると $d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t) = \delta_{i\ell}\delta_{jk}dt$, $1 \leq i, j, k, \ell \leq N$ となる. この結果を用いて $dM_i(t)dM_j(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii, jj}(t)dt &= \left(U(t)^* d\Xi(t)U(t)\right)_{ii} \left(U(t)^* d\Xi(t)U(t)\right)_{jj} \\ &= \sum_{k, \ell} \overline{u_{ki}(t)} d\xi_{k\ell} u_{\ell i}(t) \sum_{m, n} \overline{u_{mj}(t)} d\xi_{mn} u_{nj}(t) \\ &= \sum_{k, \ell} \overline{u_{ki}(t)} u_{kj}(t) u_{\ell i}(t) \overline{u_{\ell j}(t)} dt = \delta_{ij} dt \end{aligned}$$

となる. ここで最後の等式は, $U(t)$ がユニタリ行列であること ($U(t)^* U(t) = U(t)U(t)^* = I_N$) から導かれる. したがって, マルチンゲ - ル部分は N 次元ブラウン運動であることが示されたこ

となる。同様な計算により $\Gamma_{ij,ji}(t) = 1, 1 \leq i, j \leq N$ が分かる。 $(U(t)^* d\Xi(t)U(t))_{ii}$ には有界変動部分はないこと ($dY_i(t) = 0$) に注意すると、一般化された Bru の定理から、 $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式が

$$(2.3) \quad d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad 1 \leq i \leq N$$

であることが導かれる。本講義録の冒頭で述べた Dyson モデルの確率微分方程式は

$$(2.4) \quad dY_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{Y_i(t) - Y_j(t)} dt$$

($t \in (0, \infty), 1 \leq i \leq N$) の形であり、(2.3) はこの $\beta = 2$ の場合になっている。

(ii) **GOE 型行列値過程**

$\Xi^{\text{GOE}}(t) = (s_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}, t \in [0, \infty)$ で定義される $S(N)$ -値過程を考える。任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ は、 $S(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(dS)$ に対する確率密度関数が

$$\mu^{\text{GOE}}(S, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{c_2(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} S^2\right), \quad S \in S(N)$$

であるような $S(N)$ -値確率変数を与える。ここで $c_2(N) = 2^{N/2} \pi^{N(N+1)/4}$ である。 $N \times N$ 実直交行列全体の集合を $O(N)$ とおくと、任意の $V \in O(N)$ に対して、確率 $\mu^{\text{GOE}}(S, t) \mathcal{V}(dS)$ は直交変換 $S \rightarrow {}^t V S V$ の下で不変である。このような $S(N)$ -値確率変数の統計集団はガウス型直交集団 (GOE) とよばれている。GOE の固有値分布の密度関数は、 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して、

$$(2.5) \quad g^{\text{GOE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_2(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}\right) h_N(\mathbf{x})$$

で与えられる (ただし $C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i/2)$) [30, 32]。GUE 型行列値過程と同様な計算により、 $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式は

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad 1 \leq i \leq N$$

と定まる。これは Dyson モデルの方程式 (2.4) の $\beta = 1$ の場合に等しい。

(iii) **Laguerre 過程**

$(N + \nu) \times N$ 複素行列全体の集合を $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ と書くことにする。 $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ -値過程として、 $L(t) = (B_{ij}^R(t) + \sqrt{-1} B_{ij}^I(t))_{1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N}$ を考える。これは、任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して、確率密度関数が

$$\mu_\nu^{\text{chGUE}}(L, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)/2}}{c_3(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} L^* L\right), \quad L \in \mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$$

であるような $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ -値確率変数を与える ($c_3(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)}$)。このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型ユニタリ集団 (chGUE) とよばれている [32]。これに対して、 $\Xi^L(t) = L(t)^* L(t), t \in [0, \infty)$ によって定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を Laguerre 過程とよぶ [26]。行列 $\Xi^L(t)$ は非負定値であるので固有値はすべて非負である。定義より $\xi_{ij}(t) =$

$\sum_{k=1}^{N+\nu} (B_{ki}^R(t) - \sqrt{-1}B_{ki}^I(t))(B_{kj}^R(t) + \sqrt{-1}B_{kj}^I(t))$ となるので, $B(t)^2 = 2 \int_0^t B(s)dB(s) + t$ であることに注意すると, $d\xi_{ij}(t)$ の有界変動部分は $2(N+\nu)\delta_{ij}dt, 1 \leq i, j \leq N$ であることがすぐに分かる (従って $d\Upsilon_i(t) = 2(N+\nu)dt$). また,

$$d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t) = 2\left(\xi_{i\ell}(t)\delta_{jk} + \xi_{kj}(t)\delta_{i\ell}\right)dt, \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq N$$

と計算できるので, $\Gamma_{ii,jj}(t) = 4\lambda_i(t)\delta_{ij}, \Gamma_{ij,ji}(t) = 2(\lambda_i(t) + \lambda_j(t)), 1 \leq i, j \leq N$ と求められる. したがって $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}dB_i(t) + 2(N+\nu)dt + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

($1 \leq i \leq N$) の解となっていることが導かれる.

(iv) **Wishart 過程**

$(N+\nu) \times N$ 実行列全体の集合を $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbb{R})$ とおく. $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbb{R})$ -値過程 $W(t) = (B_{ij}^R(t))_{1 \leq i \leq N+\nu, 1 \leq j \leq N}$ は, 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, 確率密度関数が

$$\mu_\nu^{\text{chGOE}}(W, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)/2}}{c_4(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr } {}^t W W\right), \quad W \in \mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbb{R})$$

であるような $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbb{R})$ -値確率変数を与える ($c_4(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)/2}$). このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型直交集団 (chGOE) とよばれている [32]. これに対して, $\Xi^W(t) = {}^t W(t)W(t), t \in [0, \infty)$ によって定義される $S(N)$ -値過程を **Wishart 過程** とよぶ [3]. Laguerre 過程のときと同様な計算により, $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}dB_i(t) + (N+\nu)dt + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

($1 \leq i \leq N$) の解となっていることが導かれる.

2.2 定理 2.1 の証明

定理の証明のために準備を行う. 伊藤の公式により次の式を得る:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} d\Lambda(t) &= dU(t)^*\Xi(t)U(t) + U(t)^*d\Xi(t)U(t) + U(t)^*\Xi(t)dU(t) \\ &\quad + dU(t)^*d\Xi(t)U(t) + dU(t)^*\Xi(t)dU(t) + U(t)^*d\Xi(t)dU(t). \end{aligned}$$

行列 $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}, \Phi(t) = (\phi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}, \Psi(t) = (\psi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} dA(t) &= U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) = d(\log U(t)), \quad A(0) = 0, \\ d\Phi(t) &= U(t)^*d\Xi(t)U(t)dA(t), \\ d\Psi(t) &= dA(t)^*\Lambda(t)dA(t). \end{aligned}$$

明らかに $\Phi(t), \Psi(t)$ は有界変動である.

Claim 1. $A(t)$ は歪エルミットであり, $dA(t)dA(t)$ はエルミットである.

(\because)

$$0 = d(U(t)^*U(t)) = dU(t)^*U(t) + U(t)^*dU(t) + dU(t)^*dU(t).$$

よって

$$dU(t)^*U(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) = -U(t)^*dU(t) - \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t).$$

がなりたつ.

Claim 2. $dU(t) = U(t)\{dA(t) + \frac{1}{2}dA(t)dA(t)\}.$

(\because)

$$\begin{aligned} (2.7) \quad & -dA(t)dA(t) = dA(t)^*dA(t) \\ & = \left(U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right)^* \left(U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right) \\ & = dU(t)^*U(t)U(t)^*dU(t) \\ & = dU(t)^*dU(t). \end{aligned}$$

したがって $U(t)^*dU(t) = dA(t) - \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t)$ に注意すると

$$\begin{aligned} dU(t) & = U(t) \left\{ dA(t) - \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right\} \\ & = U(t) \left\{ dA(t) + \frac{1}{2}dA(t)dA(t) \right\}. \end{aligned}$$

Claim 3.

$$\begin{aligned} d\Lambda(t) & = U(t)^*d\Xi(t)U(t) + dA(t)^*\Lambda(t) + \Lambda(t)dA(t) \\ & + \frac{1}{2}dA(t)dA(t)\Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t)dA(t)dA(t) \\ & + d\Phi(t) + d\Phi(t)^* + d\Psi(t). \end{aligned}$$

(\because) (2.7) より

$$\begin{aligned} & dA(t)^*\Lambda(t) + \Lambda(t)dA(t) + \frac{1}{2}dA(t)dA(t)\Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t)dA(t)dA(t) \\ & = \left(U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right)^* \Lambda(t) \\ & \quad + \Lambda(t) \left(U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2}dA(t)dA(t)\Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t)dA(t)dA(t) \\ & = dU(t)^*U(t)\Lambda(t) + \Lambda(t)U(t)^*dU(t) \\ & = dU(t)^*\Xi(t)U(t) + U(t)^*\Xi(t)dU(t), \end{aligned}$$

となる. 最後の等式では関係式 $\Lambda(t) = U(t)^*\Xi(t)U(t)$ を用いた. また

$$\begin{aligned} d\Phi(t) & = U(t)^*d\Xi(t)U(t)dA(t) \\ & = U(t)^*d\Xi(t)U(t) \left\{ U(t)^*dU(t) + \frac{1}{2}dU(t)^*dU(t) \right\} \\ & = U(t)^*d\Xi(t)dU(t), \\ d\Phi(t)^* & = dU(t)^*d\Xi(t)^*U(t) = dU(t)^*d\Xi(t)U(t), \\ d\Psi(t) & = dA(t)^*\Lambda(t)dA(t) = dU(t)^*U(t)\Lambda(t)U(t)^*dU(t) \\ & = dU(t)^*\Xi(t)dU(t), \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. 上の関係式を (2.6) に代入すると Claim 3 を得る.

【定理の証明】

$\frac{1}{2}dA(t)dA(t) = (d\gamma_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ とおく. $A(t)$ は歪エルミットであるので $a_{ii}(t) = 0$ であるので Claim 3 より

$$d\lambda_i(t) = \sum_{k,l} \overline{u_{ki}(t)} u_{li}(t) d\xi_{k,l}(t) + 2\lambda_i(t) d\gamma_{ii}(t) + d\phi_{ii}(t) + \overline{d\phi_{ii}(t)} + d\psi_{ii}(t).$$

$\langle A \rangle_t, \Phi(t), \Psi(t)$ が有界変動であることから

$$d\langle M_i \rangle_t = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\nu, \omega} \overline{u_{\alpha i}(t)} u_{\beta i}(t) \overline{u_{\nu i}(t)} u_{\omega i}(t) d\xi_{\alpha\beta}(t) d\xi_{\nu\omega}(t)$$

となる. したがって定理はつぎの補題から導かれる.

補題 2.2

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & 2\lambda_i(t) d\gamma_{ii}(t) + d\phi_{ii}(t) + \overline{d\phi_{ii}(t)} + d\psi_{ii}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} 1(\lambda_i(t) \neq \lambda_k(t)) \Gamma_{ik}(t) dt. \end{aligned}$$

【証明】

$\Lambda(t)$ は対角行列であるから, Claim 3 より $i \neq j$ であれば

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha, \beta} \overline{u_{\alpha i}(t)} u_{\beta j}(t) d\xi_{\alpha\beta}(t) + \lambda_j(t) \overline{da_{ji}(t)} + \lambda_i(t) da_{ij}(t) \\ &+ \lambda_j(t) d\gamma_{ij}(t) + \lambda_i(t) d\gamma_{ij}(t) + d\phi_{ij}(t) + \overline{d\phi_{ji}(t)} + d\psi_{ij}(t). \end{aligned}$$

$A(t)$ が歪エルミットであることから

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (\lambda_j(t) - \lambda_i(t)) da_{ij}(t) &= \sum_{\alpha, \beta} \overline{u_{\alpha i}(t)} u_{\beta j}(t) d\xi_{\alpha\beta}(t) \\ &+ (\lambda_i(t) + \lambda_j(t)) d\gamma_{ij}(t) + d\phi_{ij}(t) + \overline{d\phi_{ji}(t)} + d\psi_{ij}(t) \end{aligned}$$

となる. (2.9) と定義より

$$\begin{aligned} d\gamma_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq i, j} da_{ik}(t) da_{kj}(t), \\ d\phi_{ij}(t) &= \sum_{\alpha, \beta, k} \overline{u_{\alpha i}(t)} d\xi_{\alpha\beta}(t) u_{\beta k}(t) da_{kj}(t) = \sum_k (\lambda_k(t) - \lambda_i(t)) da_{ik}(t) da_{kj}(t), \\ \overline{d\phi_{ij}(t)} &= \sum_k (\lambda_k(t) - \lambda_i(t)) da_{ki}(t) da_{jk}(t), \\ d\psi_{ij}(t) &= \sum_{k \neq i, j} \overline{da_{ki}(t)} \lambda_k(t) da_{kj}(t) = - \sum_{k \neq i, j} da_{ik}(t) \lambda_k(t) da_{kj}(t). \end{aligned}$$

を得る. 従って (2.9) より $-(\lambda_k(t) - \lambda_i(t))^2 da_{ik} da_{ki} = \Gamma_{ik}(t) dt$ であるので

$$\begin{aligned}
& 2\lambda_i(t) d\gamma_{ii}(t) + d\phi_{ii}(t) + \overline{d\phi_{ii}(t)} + d\psi_{ii}(t) \\
&= \sum_{k \neq i} \{ \lambda_i(t) + 2(\lambda_k(t) - \lambda_i(t)) - \lambda_k(t) \} da_{ik}(t) da_{ki} \\
&= \sum_{k \neq i} (\lambda_k(t) - \lambda_i(t)) 1(\lambda_k(t) \neq \lambda_i(t)) da_{ik}(t) da_{ki}(t) \\
&= \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} 1(\lambda_k(t) \neq \lambda_i(t)) \Gamma_{ik}(t) dt
\end{aligned}$$

となり、定理が示された. ■

3 非衝突ブラウン運動とランダム行列

3.1 Karlin-McGregor の公式

非衝突拡散過程を解析するには、行列式を用いた密度関数の表示が有効である。この行列式表示は、確率論では Karlin-McGregor の公式 [13]、組み合わせ論的表現論では Lindström-Gessel-Viennot の公式 [28, 9, 38, 27] とよばれる。またこの公式は、量子力学で自由フェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版とみなすこともできる [39]。この節では、時間も空間も離散的である場合を例にしてこの行列式表示を説明し、公式の証明を与えることにする。

まず、 $1+1$ 次元の時空平面を表す正方格子に、頂点の集合 V と向き付けされた辺の集合 E を

$$V = \{(z, k) : z \text{ は整数, } k \text{ は非負整数, } z+k \text{ は偶数}\}$$

$$E = \left\{ \left((z, k) \rightarrow (z-1, k+1) \right), \left((z, k) \rightarrow (z+1, k+1) \right) : (z, k) \in V \right\}$$

と定義して、この二つを組とする有向グラフ $G = (V, E)$ を導入する。

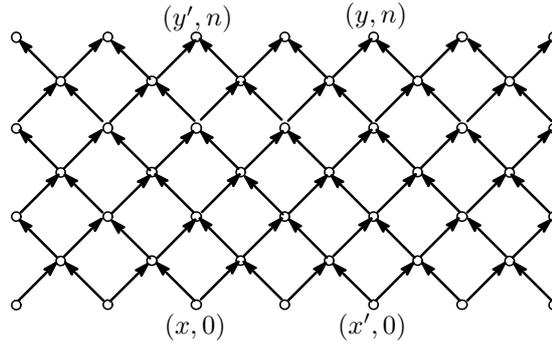


Figure 2: グラフ G の図

n を自然数とする。 $\mathbf{p} = \{v_k\}_{k=1}^n$ が道であるとは、 $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $(v_k \rightarrow v_{k+1}) \in E$ が満たされることをいう。 u から v への道があるとき $u \rightarrow v$ と書き、道 $u \rightarrow v$ 全体の集合を $\mathcal{P}(u, v)$ と書くことにする。 N 個の始点 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in V^N$ と N 個の終点 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in V^N$ が与えられたとき、 N 本の道の組 $\{u_i \rightarrow v_i\}_{i=1}^N$ 全体の集合を $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とおく：

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{p}^{(N)} = (p_1, p_2, \dots, p_N) : p_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

二つの道が同じ頂点をもつとき、それらは衝突するという。以上の定義から、有向グラフ $G = (V, E)$ 上の道が次の重要な性質をもつことは、図 2 を見ると明らかであろう。

性質 ① $x < x', y > y'$ のとき、
 任意の $\mathbf{p} \in \mathcal{P}((x, 0), (y, n))$ と $\mathbf{p}' \in \mathcal{P}((x', 0), (y', n))$ は衝突する。

N 本の非衝突な道全体の集合

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \left\{ \mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{p}^{(N)} \text{の道は互いに非衝突} \right\}$$

を考える. 重み関数 $w : E \rightarrow (0, 1)$ を導入し, 各々の道に対して重み $w(\mathbf{p}) = \prod_{e \in \mathbf{p}} w(e)$ を与え, u から v への道のグリーン関数を

$$G(u, v) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(u, v)} w(\mathbf{p})$$

で定義する. N 本の道 $\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ に対する重みは $w(\mathbf{p}^{(N)}) = \prod_{i=1}^N w(p_i)$ で与えることにすると, $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ のグリーン関数は

$$G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{p}^{(N)})$$

で与えられる. 例えば, 重み関数が

$$w\left((z, k) \rightarrow (z-1, k+1)\right) + w\left((z, k) \rightarrow (z+1, k+1)\right) = 1, (z, k) \in V$$

を満たすときは, 上で述べた道は, 時刻 k に z の状態にあったものが, 時刻 $k+1$ で状態 $z+1$ になる確率が $w((z, k) \rightarrow (z+1, k+1))$, 状態 $z-1$ になる確率が $w((z, k) \rightarrow (z-1, k+1))$ であるようなマルコフ連鎖を表すことになる. 一般に, グリーン関数 $G(u, v)$ は時刻 0 で u から出発したマルコフ連鎖が時刻 n で v に到達する推移確率を与え, グリーン関数 $G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は時刻 0 で $u_i, i = 1, 2, \dots, N$ から出発した N 個の独立なマルコフ連鎖が互いに衝突することなく $v_i, i = 1, 2, \dots, N$ に到達する確率を与えることになる.

以上の設定の下で次の定理が成り立つ. $N = 2$ の場合はこの定理は, 1次元ランダムウォークに対する反射原理と本質的に同じであることに注意すると, 反射原理の一般化とみなすことができる.

定理 3.1 [Karlin-McGregor の公式] ([13, 28, 9]) N 個の始点 $u_i = (x_i, 0), i = 1, 2, \dots, N$ と N 個の終点 $v_i = (y_i, n), i = 1, 2, \dots, N$ がそれぞれ $x_1 < x_2 < \dots < x_N, y_1 < y_2 < \dots < y_N$ を満たすとき, 次が成り立つ.

$$(3.1) \quad G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(u_i, v_j) \right)$$

【証明】 $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換全体の集合を \mathfrak{S}_N とする. 行列式の定義より,

$$(3.2) \quad \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(u_i, v_j) \right) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\pi) G(u_1, v_{\pi(1)}) \cdots G(u_N, v_{\pi(N)})$$

である. $\pi \in \mathfrak{S}_N$ に対して, これと N 本の道 $\mathbf{p}_i \in \mathcal{P}(u_i, v_{\pi(i)}), i = 1, 2, \dots, N$ とからなる組を $(\pi, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ と書くことにする. まず $(\pi, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ として, 少なくとも 1 箇所衝突している場合を表すものを考えることにする. 図 3 に示したように, 衝突が起こった最初の頂点を x とおく. もしも, 最初の衝突が同時に 2 箇所以上で起こった場合には最も左側のもの (位置の座標が最小のもの) を x とする. そして, この頂点 x で衝突する二つの道を $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ とする. ただし, x で三つ以上の道が一度に衝突している場合には (例えば $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}, \mathbf{p}_{i_3}, i_1 < i_2 < i_3$ とすると), 番号が小さい方から二つを選ぶことにする (\mathbf{p}_{i_1} と \mathbf{p}_{i_2} となる).

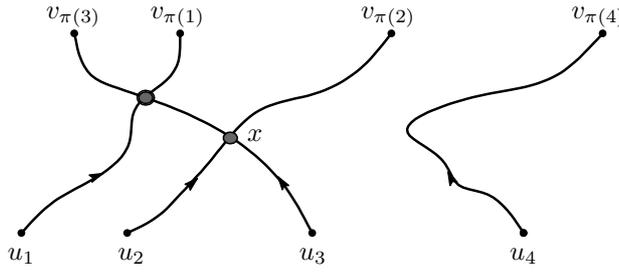


Figure 3: 衝突している道の例

道 p_i のうちの始点 u_i から x までの部分を $p_i(\rightarrow x)$, x から終点 $v_{\pi(i)}$ までの部分を $p_i(x \rightarrow)$ と書くことにする. 同様に, 道 p_j のうち始点 u_j から x までの部分を $p_j(\rightarrow x)$, x から終点 $v_{\pi(j)}$ までの部分を $p_j(x \rightarrow)$ と書く. そして, 図 4 に示したように, x でそれぞれの部分を入れ替えて

$$p'_i = p_i(\rightarrow x)p_j(x \rightarrow) \quad : \quad x \text{ までは } p_i, x \text{ からは } p_j \text{ を使った道}$$

$$p'_j = p_j(\rightarrow x)p_i(x \rightarrow) \quad : \quad x \text{ までは } p_j, x \text{ からは } p_i \text{ を使った道}$$

と定めることにする. また, $k \neq i, j$ に対しては, $p'_k = p_k$ と定める.

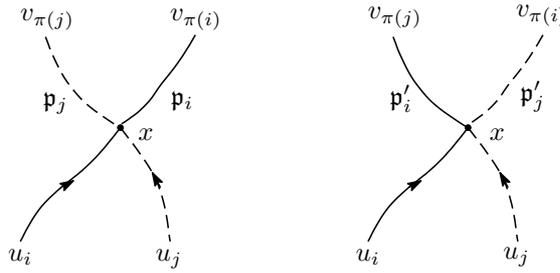


Figure 4: p_i, p_j と p'_i, p'_j の例

i と j の互換 (i, j) と置換 π との積置換を π' と書く. N 本の道の組

$$(\pi', p'_1, p'_2, \dots, p'_N) = p^{(N)'} \quad \text{と} \quad (\pi, p_1, p_2, \dots, p_N) = p^{(N)}$$

とは, 同じ重みをもち, また, $\text{sgn}(\pi) = -\text{sgn}(\pi')$ であることから,

$$\text{sgn}(\pi)w(p^{(N)}) = -\text{sgn}(\pi')w(p^{(N)'})$$

となることが分かる. $p^{(N)'}$ に対して再び同じ変換を施すと元の $p^{(N)}$ に戻ること注意到, $p^{(N)}$ と $p^{(N)'}$ とは 1 対 1 に対応していることが分かる. グリーン関数 $G(u, v)$ は, 始点 u から終点 v までの道の重み付きの和であったので, (3.2) は, N 本の道のさまざまな配置を適当な重みと符号を付けて足し合わせた和と見なせるが, 上の考察から, この和をとると衝突がある場合の寄与 $\text{sgn}(\pi)w(p^{(N)})$ はすべて相殺されてしまうことが結論される. ところが, 性質 ① より,

非衝突の場合には π は必ず恒等変換であるので

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\pi) G(u_1, v_{\pi(1)}) \cdots G(u_N, v_{\pi(N)}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \sum_{(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)} \text{sgn}(\pi) w(\mathbf{p}_1) \cdots w(\mathbf{p}_N) \\ &= \sum_{\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{p}^{(N)}) = G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、(3.2) より定理が証明された。■

定理の証明で使われている道の重みに関する重要な性質は「衝突した後の道の部分を互いに入れ替えても、二つの道の重みは同じ」というものである。互いに独立で同分布である N 本の拡散過程について考えてみると、それらを成分とする N 次元確率過程も拡散過程となり、異なる 2 本が最初に衝突する時刻はマルコフ時刻になる。このことから、この性質は強マルコフ性から導かれることになる。また重み関数を与えるときに、時間的にも空間的にも斉次性は仮定していないので、上の定理は時間的あるいは空間的に非斉次である拡散過程にも適用できることになる。

3.2 時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動

\mathbb{R}^N の部分集合 \mathbb{W}_N^A を

$$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}$$

と定義する。これは、 A_{N-1} 型の Weyl chamber と呼ばれているものである。 \mathbb{W}_N^A の点 \mathbf{x} から出発したブラウン運動が \mathbb{W}_N^A から出ることなく時刻 t で \mathbb{W}_N^A の点 \mathbf{y} へ到達する確率密度を $f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ とおく。Karlin-McGregor 公式 (Lindström-Gessel-Viennot の定理) より各成分が熱核 $G_t(x_j, y_i) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(y_i - x_j)^2/2t}$, ($G_0(x_j, y_i) = \delta_{x_j}(dy_i)$) である行列式を用いて

$$(3.3) \quad f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (G_t(x_j, y_i))$$

と表すことができる ([13])。そして、時刻 t まで \mathbf{x} から出発したブラウン運動が \mathbb{W}_N^A から出ない確率は、

$$(3.4) \quad \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{W}_N^A} d\mathbf{y} f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

で与えられる。 N 次元ブラウン運動が \mathbb{W}_N^A から出ないということが N 本の 1 次元ブラウン運動が互いに衝突しないことに対応することに注意すると有限区間 $(0, T]$ で互いに衝突しないという条件のもとでのブラウン運動 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $0 \leq s < t \leq T$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N^A$ は、

時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 (1)

$$(3.5) \quad g_N^T(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{f_N(t-s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s, \mathbf{x})}$$

となる。また非衝突ブラウン運動は、すべて原点から出発した場合にも推移確率密度を次のように与える事ができる。

時間的非斉次な非衝突ブラウン運動 (2)

$$(3.6) \quad g_N^T(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) = \frac{T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2}}{C_2(N)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y}),$$

$t > 0, \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N^A$.

(3.6) は次の補題から直ちに導かれる.

補題 3.2 $t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N^A$ に対して次の漸近式が成り立つ:

$$(3.7) \quad f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_1(N)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) h_N(\mathbf{y}) \times \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right)\right\},$$

$$(3.8) \quad \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) \times \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right)\right\}, \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$$

【証明】

行列式の性質を考えて $f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を計算してみると,

$$f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\pi t)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2)\right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} (e^{x_j y_i / t})$$

と書き直すことができる. そこで $\mathbf{a} = \mathbf{x}/\sqrt{t}, \mathbf{b} = \mathbf{y}/\sqrt{t}$ として, 行列式 $\det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}]$ を考えてみることにする. 長さ $\ell (\leq N)$ の分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$ すなわち $\mu_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq \ell, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell > 0$ に対して, $\mathbf{z} \in \mathbb{W}_N^A$ のシューア関数 (Schur function)

$$s_\mu(\mathbf{z}) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} [z_i^{\mu_j + N - j}]}{\det_{1 \leq i, j \leq N} [z_i^{N - j}]}$$

を定義する [8, 14, 21]. これは \mathbf{z} の $|\mu| = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i$ 次の対称多項式である (例えば [8] を参照). また, 差積で表される $N \times N$ の Vandermonde の行列式を

$$h_N(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_j - z_i) = \det_{1 \leq i, j \leq N} [z_j^{i-1}]$$

で表すことにする. Γ をガンマ関数として $\gamma_\mu = 1 / \prod_{i=1}^N \Gamma(\mu_i + N - i + 1)$ とすると,

$$\frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}]}{h_N(\mathbf{a}) h_N(\mathbf{b})} = \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \gamma_\mu s_\mu(\mathbf{a}) s_\mu(\mathbf{b})$$

という展開公式が成り立つことが示せる. この展開公式の証明は 3.4 節で与えることにする. ただし和は, 分割 μ のうち長さ $\ell = \ell(\mu)$ が N 以下のものについてとるものとする. 条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える「条件 ω の指示関数」を $1_{\{\omega\}}$ と書くことにして, また $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ とすると, $s_\mu(\mathbf{0}) = 1_{\{\mu=\mathbf{0}\}}$ であることから,

$$\det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}] = \frac{h_N(\mathbf{a}) h_N(\mathbf{b})}{\prod_{i=1}^N \Gamma(i)} \times \left\{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{a}|)\right\}, \quad |\mathbf{a}| \rightarrow 0$$

であることが分かる．この結果から，漸近評価 (3.7) が得られることになる．Selberg 積分の変形 ([30] の p.321 (17.6.7) 式)

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|\mathbf{u}|^2} |h_N(\mathbf{u})|^{2\gamma} d\mathbf{u} = (2\pi)^{N/2} (2a)^{-N(\gamma(N-1)+1)/2} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$$

で $\gamma = 1/2, a = 1/2t$ とした場合を用いると，漸近評価 (3.8) が (3.7) より導かれる．■

非衝突条件 T を無限大にすると (時間的非斉次) 非衝突ブラウン運動は推移確率密度関数が

時間的斉次な非衝突ブラウン運動

$$(3.9) \quad p_N(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y})^2$$

$$(3.10) \quad p_N(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{1}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t-s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) h_N(\mathbf{y}),$$

$$0 \leq s < t < \infty, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_<^N.$$

で与えられる時間的斉次な拡散過程 $\mathbf{Y}(t)$ に収束する． $\mathbf{Y}(t)$ は次の $\beta = 2$ の場合の Dyson's Brownian motion model

$$(3.11) \quad Y_i(t) = B_i(t) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{1}{Y_i(s) - Y_j(s)} ds, \quad t \in (0, \infty), i = 1, 2, \dots, N.$$

を満足することがわかる．

密度関数の形 (3.6), (3.5), (3.9), (3.10) により $\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{Y}(t)$ の分布には次の関係があることがわかる．

一般化された Imhof 関係．初期値 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}$ であるとき

$$(3.12) \quad P(\mathbf{X}(\cdot) \in dw) = \frac{C_1(N)T^{N(N-1)/4}}{C_2(N)} P(\mathbf{Y}(\cdot) \in dw) \frac{1}{h_N(w(T))}$$

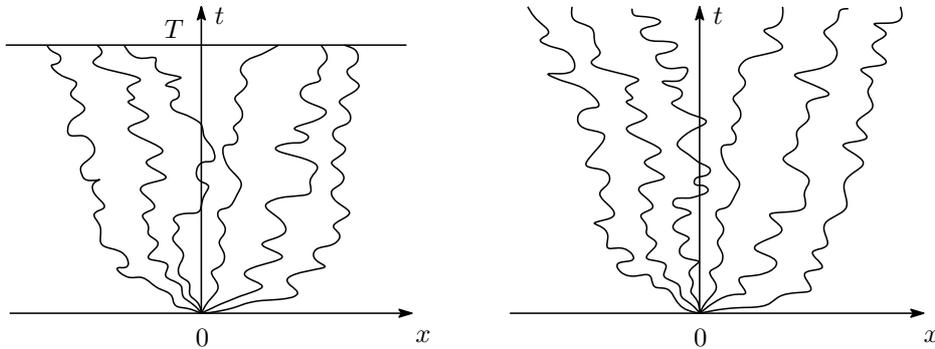


Figure 5: 時間的に非斉次な過程 $\mathbf{X}(t)$ と 斉次な過程 $\mathbf{Y}(t)$

3.3 非衝突ブラウン運動に対応するランダム行列

$\beta_{ij}(t), t \in [0, T], 1 \leq i < j \leq N$ を独立な 1 次元ブラウンブリッジでブラウン運動 $B_{ij}^R(t), 1 \leq i < j \leq N$ と独立なものとする. そして

$$b_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ij}(t), & \text{if } i < j, \\ 0, & \text{if } i = j, \end{cases}$$

とおき, $i > j$ のときは $b_{ij}(t) = -b_{ji}(t)$ で定める. $\mathcal{H}(N)$ -値確率過程 $\Xi^T(t), t \in [0, T]$ を

$$\Xi^T(t) = (s_{ij}(t) + \sqrt{-1}b_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$$

で定義し, $\lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ を $\Xi^T(t)$ の固有値で $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ を満たすものとする. このとき次の定理を得る.

定理 3.3 固有値 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ は時間的に非斉次な拡散過程であり, 非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t)$ と一致する.

Yor [40] はブラウンミアンダーが独立な 2 つのブラウン運動 $B_1(t), B_2(t)$ と 1 つのブラウンブリッジ $\beta_3(t)$ を用いて $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \beta_3(t)^2)^{1/2}$ で定義された拡散過程と一致することを示している. $N = 2$ のとき時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動の間隔 $X_2(t) - X_1(t)$ はブラウンミアンダーであるので, 定理 3.3 は Yor の結果を一般の N へ拡張したものとみなすことができる.

【定理 3.3 の証明】

任意の $y \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq N, \sharp = \mathbb{R}, \mathbb{I}$ に対して $\beta_{ij}^\sharp(t) = \beta_{ij}^\sharp(t; y), t \in [0, T]$, を時刻 0 で原点から出発し, 時刻 T で y に達するブラウンブリッジであり, 方程式

$$(3.13) \quad \beta_{ij}^\sharp(t) = B_{ij}^\sharp(t) - \int_0^t \frac{\beta_{ij}^\sharp(s) - y}{T - s} ds, \quad t \in [0, T].$$

をみたすものとする. $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\xi_{ij}^R(t; y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ij}^R(t; \sqrt{2}y), & \text{if } i < j, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ji}^R(t; \sqrt{2}y), & \text{if } i > j, \\ \beta_{ii}^R(t; y), & \text{if } i = j, \end{cases} \quad \xi_{ij}^I(t; y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ij}^I(t; \sqrt{2}y), & \text{if } i < j, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ji}^I(t; \sqrt{2}y), & \text{if } i > j, \\ 0, & \text{if } i = j, \end{cases}$$

とおき, エルミット行列 $H = (y_{ij}^R + \sqrt{-1}y_{ij}^I)_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathcal{H}(N)$ にたいしてエルミット値過程 $\Xi^T(t; H)$ を

$$\Xi^T(t; H) = (\xi_{ij}^R(t; y_{ij}^R) + \sqrt{-1}\xi_{ij}^I(t; y_{ij}^I))_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, T]$$

で定める. (3.13) 式より

$$(3.14) \quad \Xi^T(t; H) = \Xi^{\text{GUE}}(t) - \int_0^t \frac{\Xi^T(s; H) - H}{T - s} ds, \quad t \in [0, T],$$

が成り立つことがわかる. H_U を $\mu^{\text{GUE}}(\cdot, T)$ に従うエルミット行列値確率変数, A_O を $\mu^{\text{GOE}}(\cdot, T)$ に従う直交行列値確率変数とする. $\beta_{ij}^\sharp(t: Y)$, $t \in [0, T]$ は Y が平均 0, 分散 T の正規分布に従う $B_{ij}^\sharp(t)$, $t \in [0, t]$ と独立な確率変数であるときブラウン運動であることに注意すると, H_U と A_O が $\Xi^{\text{GUE}}(t)$, $t \in [0, T]$ と独立であれば

$$(3.15) \quad \Xi^T(t: H_U) = \Xi^{\text{GUE}}(t), \quad t \in [0, T],$$

$$(3.16) \quad \Xi^T(t: A_O) = \Xi^T(t), \quad t \in [0, T],$$

が分布の意味で成り立つ. $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の分布がユニタリ変換で不変であることに注意すると (3.14) 式よりつぎの性質が導かれる.

補題 3.4 任意のユニタリ行列 $U \in \mathbf{U}(N)$ に対して

$$(3.17) \quad U^* \Xi^T(t: H) U = \Xi^T(t: U^* H U), \quad t \in [0, T],$$

が分布の意味で成り立つ.

上の補題から $H^{(1)}$ と $H^{(2)}$ が同じ固有値をもつ $N \times N$ エルミット行列であるとき, 行列値過程 $\Xi^T(t: H^{(1)})$, $t \in [0, T]$ と $\Xi^T(t: H^{(2)})$, $t \in [0, T]$ も分布の意味で同じ固有値をもつことがわかる. $\{a_i\}_{1 \leq i \leq N}$ を固有値にもつ $N \times N$ エルミット行列 H を与えたとき $\Xi^T(t: H)$, $t \in [0, T]$ の固有値の分布を $Q_{0, \mathbf{a}}^T(\cdot)$, $t \in [0, T]$ と書くことにする. また $\Xi^{\text{GUE}}(t)$, $t \in [0, T]$ の固有値の分布を $Q^{\text{GUE}}(\cdot)$, $\Xi^T(t)$, $t \in [0, T]$ の固有値の分布を $Q^T(\cdot)$ と書くことにする. 等式 (3.15), (3.16) から

$$(3.18) \quad Q^{\text{GUE}}(\cdot) = \int_{\mathbf{R}_>^N} Q_{0, \mathbf{a}}^T(\cdot) g^{\text{GUE}}(\mathbf{a}, T) d\mathbf{a},$$

$$(3.19) \quad Q^T(\cdot) = \int_{\mathbf{R}_>^N} Q_{0, \mathbf{a}}^T(\cdot) g^{\text{GOE}}(\mathbf{a}, T) d\mathbf{a}.$$

が成り立つことがわかる. $Q^{\text{GUE}}(\cdot)$ 時間的斉次な非衝突ブラウン運動の分布であるので一般化された Imhof 関係 (3.12) より $Q^T(\cdot)$ が時間的非斉次な非衝突ブラウン運動の分布と一致することがわかる. ■

Pandey and Mehta [31, 34] は GUE から GOE への転移を記述する行列モデル (two-matrix model) を GUE と GOE の合成積を用いて構成している. ブラウンブリッジの直交分解を用いると任意の時刻 t で $\Xi^T(t)$ を独立な GUE と GOE の和で表すことができ, Pandey-Mehata 行列モデルと同値のモデルであることがわかる. この同値性に着目することから定理 3.3 の系として Harish-Chandra の積分公式 [11] を導くことができる.

系 3.5 dU を $\mathbf{U}(N)$ 上の Haar 測度で $\int_{\mathbf{U}(N)} dU = 1$ と正規化したものとする. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{W}_N^A$ に対して

$$\int_{\mathbf{U}(N)} dU \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr}(\Lambda \mathbf{x} - U^* \Lambda \mathbf{y} U)^2\right) = \frac{C_1(N) \sigma^{N^2}}{h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y})} \det_{1 \leq i, j \leq N} [G_{\sigma^2}(x_i, y_j)]$$

が成り立つ. ここで $\Lambda \mathbf{y}$ は対角行列 $\text{diag}\{y_1, \dots, y_N\}$ を表すものとする.

【証明】

式 (3.6) を変形していくと

$$\begin{aligned}
g_N^T(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) &= \frac{1}{C_2(N)} T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2} \exp \left[-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right] h_N(\mathbf{y}) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{W}_N^{\Lambda}} dz \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{(y_j - z_i)^2}{2(T-t)} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{C_2(N)} T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2} (2\pi(T-t))^{-N/2} h_N(\mathbf{y}) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{W}_N^{\Lambda}} dz \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\exp \left\{ -\frac{y_j^2}{2t} - \frac{(y_j - z_i)^2}{2(T-t)} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{C_2(N)} T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2} (2\pi(T-t))^{-N/2} h_N(\mathbf{y}) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{W}_N^{\Lambda}} dz \exp \left\{ -\frac{|z|^2}{2T} \right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\exp \left\{ -\frac{T}{2t(T-t)} \left(y_j - \frac{t}{T} z_i \right)^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

となる. $(t/T)z_i = a_i, i = 1, 2, \dots, N, \frac{t(T-t)}{T} = \sigma^2, \frac{T}{t^2} = \alpha$ とおき代入すると

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad g_N^T(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) &= \frac{(2\pi)^{-N/2}}{C_2(N)} \sigma^{-N} \alpha^{N(N+1)/4} h_N(\mathbf{y}) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{W}_N^{\Lambda}} d\mathbf{a} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} |\mathbf{a}|^2 \right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_j - a_i)^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

となる. 行列値過程 $\Xi^T(t)$ の推移確率密度関数を $q_N^T(s, H_1, t, H_2), 0 \leq s < t \leq T, H_1, H_2 \in \mathcal{H}(N)$ とおく. 定理 3.3 と $\mathcal{U}(dH) = C_U(N) h_N(\mathbf{y})^2 dU d\mathbf{y}, C_U(N) = c_1(N)/C_1(N)$, から

$$(3.21) \quad g_N^T(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) = C_U(N) h_N(\mathbf{y})^2 \int_{\mathbf{U}(N)} dU q_N^T(0, O, t, U^* \Lambda \mathbf{y} U),$$

がなりたつ. ここで O は零行列である.

エルミット行列値過程 $\Theta^{(1)}(t) = (\theta_{ij}^{(1)}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ と直交行列値過程 $\Theta^{(2)}(t) = (\theta_{ij}^{(2)}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ を次で定義する.

$$\theta_{ij}^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ B_{ij}^R(t) - \frac{t}{T} B_{ij}^R(T) \right\} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \beta_{ij}(t), & \text{if } i < j, \\ B_{ij}^R(t) - \frac{t}{T} B_{ii}^R(T), & \text{if } i = j, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ B_{ji}^R(t) - \frac{t}{T} B_{ji}^R(T) \right\} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \beta_{ji}(t), & \text{if } i > j, \end{cases}$$

$$\theta_{ij}^{(2)}(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{2T}} B_{ij}^R(T), & \text{if } i < j, \\ \frac{t}{T} B_{ii}^R(T), & \text{if } i = j, \\ \frac{t}{\sqrt{2T}} B_{ji}^R(T), & \text{if } i > j. \end{cases}$$

明らかに $\Xi^T(t) = \Theta^{(1)}(t) + \Theta^{(2)}(t)$ が成り立つ. $B_{ij}^R(t) - \frac{t}{T}B_{ij}^R(T)$ が $\frac{t}{T}B_{ij}^R(T)$ と独立なブラウンブリッジであることに注意すると $\Theta^{(1)}(t)$ が GUE であり, $\Theta^{(2)}(t)$ が $\Theta^{(1)}(t)$ と独立である GOE であることがわかる. $E[\theta_{ii}^{(1)}(t)^2] = \sigma^2$ であり $E[\theta_{ii}^{(2)}(t)^2] = \frac{1}{\alpha}$ であるので推移確率密度関数 $q_N^T(0, O, t, H)$ は

$$(3.22) \quad q_N^T(0, O, t, H) = \int_{S(N)} \mathcal{V}(dS) \mu^{\text{GOE}}\left(A, \frac{1}{\alpha}\right) \mu^{\text{GUE}}(H - A, \sigma^2) \\ = \frac{C_O(N)\sigma^{-N^2}\alpha^{N(N+1)/4}}{c_1(N)c_2(N)} \int_{\mathbb{W}_N^A} d\mathbf{a} \int_{\mathbf{O}(N)} dV h_N(\mathbf{a}) \exp\left\{-\frac{\alpha|\mathbf{a}|^2}{2} - \frac{\text{Tr}(H - {}^tV\Lambda\mathbf{a}V)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

と書き換えることができる. ここで $\int_{\mathbf{O}(N)} dV = 1$ と正規化された $\mathbf{O}(N)$ 上の Haar measure dV を用いて

$$\mathcal{V}(dS) = C_O(N)h_N(\mathbf{a})dVd\mathbf{a}, \quad C_O(N) = c_2(N)/C_2(N),$$

となることを用いた. (3.20), (3.21) (3.22) より

$$(3.23) \quad \frac{C_1(N)\sigma^{N^2-N}}{(2\pi)^{N/2}h_N(\mathbf{y})} \int_{\mathbb{W}_N^A} d\mathbf{a} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}|\mathbf{a}|^2\right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_j - a_i)^2\right\}\right) \\ = \int_{\mathbb{W}_N^A} d\mathbf{a} h_N(\mathbf{a}) \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}|\mathbf{a}|^2\right\} \int_{\mathbf{U}(N)} dU \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\text{Tr}(U^*\Lambda\mathbf{y}U - \Lambda\mathbf{a})^2\right\},$$

が成り立つ. 任意の $\sigma > 0$ に対して (3.23) が任意の $\alpha > 0$ に対して成り立つので

$$(3.24) \quad \frac{C_1(N)\sigma^{N^2}}{h_N(\mathbf{y})h_N(\mathbf{a})} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_j - a_i)^2\right\}\right) \\ = \int_{\mathbf{U}(N)} dU \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\text{Tr}(U^*\Lambda\mathbf{y}U - \Lambda\mathbf{a})^2\right\}.$$

が導かれ、系が証明された. ■

3.4 シューア関数による展開

補題 3.6 次の展開式が成り立つ:

$$(3.25) \quad \frac{\det_{1 \leq i < j \leq N} \left[e^{x_i y_j / t}\right]}{h_N(\mathbf{x})h_N(\mathbf{y})} = \sum_{\mu: \mu_1^T \leq N} \gamma_\mu(t) s_\mu(\mathbf{x}) s_\mu(\mathbf{y}),$$

ここで μ^T は分割 μ の転置であり, $\mu_1^T \leq N$ は μ が N 個以下の分割であることを意味している. そして

$$(3.26) \quad \gamma_\mu(t) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{t^{\mu_i + N - i} \Gamma(\mu_i + N - i + 1)}.$$

である.

【証明】

$$(3.27) \quad a_i^{(k)} = \frac{x_i^k}{k!t^k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, k = 0, 1, 2, \dots$$

と置いた時

$$\begin{aligned} D &\equiv \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[e^{x_i y_j / t} \right] = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{x_i^k y_j^k}{t^k} \right] \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_i^{(k)} y_j^k \right]. \end{aligned}$$

と書き直すことができるが、これを行列式の定義に戻って展開してみると

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\ell=1}^N \left[\sum_{k_\ell=0}^{\infty} a_\ell^{(k_\ell)} y_{\sigma(\ell)}^{k_\ell} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}=(k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}_+^N} \prod_{\ell=0}^{\infty} a_\ell^{(k_\ell)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\ell=1}^N y_{\sigma(\ell)}^{k_\ell} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^N} \prod_{\ell=1}^N a_\ell^{(k_\ell)} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_i} \right]. \end{aligned}$$

となる. 異なる i, j で $k_i = k_j$ となる $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ に対しては $\det_{1 \leq i, j \leq N} [y_j^{k_i}] = 0$ となることに注意すると \mathbf{k} についての和は $\mathbb{N}_{+\neq}^N = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_+^N : k_i \neq k_j, 1 \leq i \neq j \leq N\}$ でとれば十分である. さらに $\mathbb{N}_{+>}^N = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_+^N : k_1 > k_2 > \dots > k_N\}$ とおき, $\pi \mathbf{k} = (k_{\pi(1)}, k_{\pi(2)}, \dots, k_{\pi(N)})$ と定義すると

$$\mathbb{N}_{+\neq}^N = \{\pi \mathbf{k} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N, \pi \in \mathfrak{S}_N\},$$

が成り立つので

$$D = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(N)_N} \prod_{\ell=1}^N a_\ell^{(k_{\pi(\ell)})} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_{\pi(i)}} \right]$$

が導かれる. 行列の性質

$$\det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_{\pi(i)}} \right] = \operatorname{sgn}(\pi) \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_i} \right],$$

を用いると

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_i} \right] \sum_{\pi \in \mathcal{S}(N)_N} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{\ell=1}^N a_\ell^{(k_{\pi(\ell)})} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_i} \right] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} \left[a_\ell^{k_m} \right] \end{aligned}$$

となるので (3.27) 代入すると

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[y_j^{k_i} \right] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} \left[\frac{x_\ell^{k_m}}{k_m! t^{k_m}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N} \prod_{n=1}^N \frac{1}{t^{k_n} k_n!} \det_{1 \leq i, j \leq N} [y_j^{k_i}] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} [x_\ell^{k_m}] \end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{+>}^N$ から $\mu \in \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N \geq 0\}$ への写像

$$\mu_i = k_i - N + i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

を用いると求める結果が導かれる. ■

4 一般化について

一般化された Bru の定理を、より高い対称性の条件を加えた $\mathcal{H}(N)$ -値過程に適用することにより、固有値過程が $\beta = 4$ の Dyson モデルで与えられるガウス型シンプレクティック集団 (GSE) の他、Altland と Zirnbauer [1] によって導入された class C および class D とよばれるランダム行列集団に関連する行列値過程を導くこともできる [20].

Yor [40] はブラウン彷徨過程を特別な場合として含む拡散過程の族を導入し、generalized meanders と名付けた. ここではこれらを彷徨過程と総称することにする. 彷徨過程は二つのパラメータ $\nu \in (-1, \infty)$ と $\kappa \in [0, 2(\nu + 1))$ をもち、ブラウン彷徨過程は $\nu = 1/2, \kappa = 1$ の場合に対応している. また κ の範囲の境界にあたる $\kappa = 0$ の場合はベッセル過程, $\kappa = 2(\nu + 1)$ の場合はベッセル橋 (時刻 T で原点に到達するという条件の下でのベッセル過程) に対応している. 本稿では主に非衝突条件を課した 1 次元ブラウン運動を考えたが、ブラウン運動の代わりに彷徨過程を考えることもできる. この場合の状態空間は A_{N-1} 型の Weyl 領域ではなく、 $\nu \geq 0$ のときには C_N 型, $\nu \in (-1, 0)$ のときには D_N 型の Weyl 領域となる. 本稿では非衝突ブラウン運動が GUE と GOE のランダム行列と関係することを詳しく述べたが、非衝突彷徨過程は自然な形で、カイラル型ランダム行列、あるいは Altland と Zirnbauer により研究された Bogoliubov-de Gennes 型ランダム行列と関連することが示せる [20, 25].

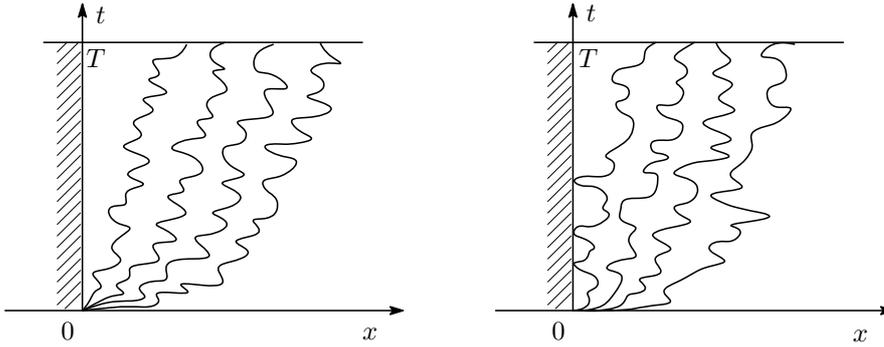


Figure 6: 非衝突彷徨過程 (左図 $\nu \geq 0$, 右図 $\nu \in (-1, 0)$ の場合)

本講義では議論しなかったが、拡散過程の本数 (または行列の大きさ) N を無限大にしたときの系の漸近挙動を調べる問題がある [30, 32]. これは、ランダム行列理論を応用して無限粒子系を構成するという重要な課題に関するものであり、[33, 16, 24] およびそれらに引用されている文献を参考にいただきたい. また、vicious walk とよばれる離散的な非衝突過程については、[14, 18] および [39] を参照していただきたい.

参考文献

- [1] A. Altland and M. R. Zirnbauer : Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structure, *Phys. Rev. B* **55** 1142-1161 (1997).
- [2] Bru, M. F. : Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.* **29**, 127-136 (1989)
- [3] Bru, M. F. : Wishart process, *J. Theoret. Probab.* **4**, 725-751 (1991).
- [4] de Bruijn, N. G.: On some multiple integrals involving determinants. *J. Indian Math. Soc.*, **19**, 133-151 (1955)
- [5] Doob, J. L. : *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, (1984), Springer.
- [6] Dyson, F. J.: A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.* **3** (1962), 1191-1198.
- [7] Dyson, F. J.: Correlation between the eigenvalues of a random matrix, *Commun. Math. Phys.* **19** (1970), 235-250.
- [8] W. Fulton, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).
- [9] I. Gessel and G. Viennot : Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math.* **58** 300-321 (1985).
- [10] Grabiner, D. J. : Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **35** (1999), 177-204.
- [11] Harish-Chandra : Differential operators on a semisimple Lie algebra, *Am. J. Math.* **79**, (1957), 87-120.
- [12] J. P. Imhof : Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel processes, and applications, *J. Appl. Prob.* **21** 500-510 (1984).
- [13] S. Karlin and J. McGregor : Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.* **9** 1141-1164 (1959).
- [14] 香取眞理 : 非衝突乱歩系・シュア関数・ランダム行列 『応用数理』 **13** (No.4) 16-27 ([296]-[307]) (2003).
- [15] M. Katori, Non-colliding systems of Brownian particles as pfaffian process, 「可積分係数理の展望と応用」京大数理解析研究所講究録 1422 12-25 (2005); arXiv:math.PR/0506186.
- [16] Katori, M, Nagao, T. and Tanemura, H. : Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, 283-306 (2004), (Mathematical Society of Japan, Tokyo); arXiv:math.PR/0301143.
- [17] Katori, M. and Tanemura, H. : Scaling limit of vicious walkers and two-matrix model, *Phys. Rev. E* **66**, 011105/1-12 (2002).
- [18] Katori, M. and Tanemura, H. : Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.* **75**, 369-390 (2003); arXiv:math.PR/0203286.
- [19] Katori, M. and Tanemura, H. : Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.* **8**, 112-121 (2003).
- [20] Katori, M. and Tanemura, H. : Symmetry of matrix valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math Phys.* **45**, 3058-3085 (2004) ; arXiv:math-ph/0402061.

- [21] M. Katori and H. Tanemura : Nonintersecting paths, Noncolliding diffusion processes and representation theory, 「表現論における組み合わせ論的手法とその応用」京大数理解析研究所講究録 1438 83-102 (2005); arXiv:math.PR/0501218.
- [22] 香取眞理, 種村秀紀 : 時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動, 立教大学 SFR 自由プロジェクト研究講究録 No.5 『ゲージ理論・行列模型と非平衡統計物理学』, pp. 36-76 (2005).
- [23] 香取眞理, 種村秀紀 : ランダム行列と非衝突過程, 『数理物理への誘い 6』, 遊星社 (2006年出版予定).
- [24] M. Katori and H. Tanemura : Infinite systems of non-colliding generalized meanders and Riemann-Liouville differintegrals, arXiv:math.PR/0506187, to appear in Probability Theory and Related Fields.
- [25] Katori, M., Tanemura, T., Nagao, T. and Komatsuda, N. : “Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices,” Phys. Rev. E **68**, 021112/1-16 (2003).
- [26] König, W. and O’connell, N. : Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel process, Electronic Journal in Probability **6**, 107-114 (2001).
- [27] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot : Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II. With a wall, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 8835-8866 (2000).
- [28] B. Lindström : On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.* **5** 85-90 (1973).
- [29] Mehta, M. L. : *Matrix Theory*, Editions de Physique, (1989), Orsay.
- [30] Mehta, M. L. : (1991). *Random Matrices*, Academic Press, London (2nd ed.).
- [31] Mehta, M. L. and Pandey, A. : (1983). On some Gaussian ensemble of Hermitian matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 2655-2684.
- [32] 永尾太郎 : 『ランダム行列の基礎』, 東京大学出版会, 2005.
- [33] Nagao, T., Katori, M. and Tanemura, H. : Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett.* **A307** (2003), 29-35.
- [34] Pandey, A. and Mehta, M. L. : (1983). Gaussian ensembles of random Hermitian matrices intermediate between orthogonal and unitary ones, *Commun. Math. Phys.* **87**, 449-468.
- [35] Prähofer, M. and Spohn H.: Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, *J. Stat. Phys.* **108** (2002), 1071-1106.
- [36] D. Revuz and M. Yor : *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed. (Springer, New York, 1998).
- [37] Selberg, A. : Bemerkninger om et multipelt integral, *Norske Mat. Tidsskr.* **26**, 71-78, (1944).
- [38] J. R. Stembridge : Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.* **83** 96-131 (1990).
- [39] 鈴木淳史 : 『現代物理数学への招待, ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理』, サイエンス社, 2006.
- [40] Yor, M. : (1992). *Some Aspects of Brownian Motion, Part I: Some Special Functionals*, Birkhäuser, Basel.