

無限粒子系の確率解析学

古典的確率解析の新展開とランダム行列の力学的普遍性

長田 博文 (九州大学)*

概要

この論説では、 \mathbb{R}^d の中を動く無限粒子系の確率力学を論ずる。一つの粒子のランダムな挙動は古典的な確率解析で追究できる。それが無限個の粒子の集団となった時に、いかに古典的確率解析を拡張するかを解説する。ランダム行列から生じる粒子系の平衡分布は対数関数を干渉ポテンシャルとして持つ。これに代表される長距離で強い効果を持つ干渉ポテンシャルに適用できる理論を構築する。応用として、ランダム行列に関する点過程の普遍性が、確率力学のレベルで成立することを示す。

1. 干渉ブラウン運動の一般論の始まり

ユークリッド空間 \mathbb{R}^d の中を干渉ポテンシャル $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で相互作用しながら運動する無限個のブラウン粒子の運動を考える。粒子の時刻 t の位置 $\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は次の確率微分(積分)方程式で与えられる。

$$X_t^i - X_0^i = B_t^i - \frac{\beta}{2} \int_0^t \sum_{j \neq i} \nabla \Psi(X_u^i - X_u^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.1)$$

ここで β は逆温度と呼ばれる正定数、 $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値、 $\{\mathcal{F}_t\}$ -ブラウン運動、 \mathbf{X} はある四つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ で定義された連続なパスを持つ確率過程である。 \mathbf{X} は時刻 t と $\omega \in \Omega$ の関数であり、 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_t = \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_t(\omega) = \mathbf{X}(t, \omega)$ などとも表記する。確率論の習慣で、大抵 ω は省略し \mathbf{X} の中に書かない。

尚、 (Ω, \mathcal{F}, P) は完備確率空間、 $\{\mathcal{F}_t\}$ は右連続な σ 加法族の増大列で P 測度0の集合を含むとする。 $\{\mathcal{F}_t\}$ -ブラウン運動とはブラウン運動であって各 t に対して \mathbf{B}_t が \mathcal{F}_t -可測となることである。この性質を $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合というが、四つ組の上の確率過程は \mathbf{B} や \mathbf{X} も含め断らない限り $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合を仮定する。 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値のブラウン運動とは \mathbb{R}^d 値ブラウン運動の無限個の独立なコピーであり、ここでは原点を出発するものとする。

係数に無限和を含むので(1.1)の意味には注意が必要である。各 $i \in \mathbb{N}$ に対して無限和

$$\sum_{j \in \mathbb{N}, j \neq i} \nabla \Psi(s_i - s_j)$$

が意味を持つ空間 \mathbf{S} を考え、 \mathbf{X} がその中を動くという制約の下で方程式(1.1)を解かないといけなからである。如何に \mathbf{S} を捉えるか、自体が重要な問題となる。一つの方法は、確率微分方程式に自然に対応した測度 $\tilde{\mu}$ を $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ に導入し、その下で $\tilde{\mu}(\mathbf{S}^c) = 0$

本研究は科研費(課題番号:基盤研究(S):16H06338)の助成を受けたものである。

キーワード: 無限粒子系, ランダム行列, クーロンポテンシャル, 無限次元確率微分方程式

* 〒819-0395 福岡市西区元岡744 九州大学大学院数理学研究院

e-mail: osada@math.kyushu-u.ac.jp

web: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/kiban_s_HP/index.html

である集合として S を捉えることである．実際，粒子の個数が有限個ならば N 粒子系の確率微分方程式

$$X_t^i - X_0^i = B_t^i - \frac{\beta}{2} \int_0^t \sum_{j \neq i}^N \nabla \Psi(X_u^i - X_u^j) dt \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

を (Lipschitz 連続など自然な仮定の下で) 解くことができる．その解は

$$\check{\mu}^N(ds_1 \cdots ds_N) = \exp\{-\beta \sum_{i < j}^N \Psi(s_i - s_j)\} ds_1 \cdots ds_N. \quad (1.3)$$

に対して対称になり，更に $\check{\mu}^N$ -a.s. $(s_1, s_2, \dots, s_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ を出発点とする解を構成できる．従って，もし $\check{\mu}^N$ について $N \rightarrow \infty$ という極限で測度 $\check{\mu}^\infty$ が $(\mathbb{R}^d)^N$ に存在すれば，それに対して考えればよいが，そういう測度は存在しない．

有限次元での (1.2) と (1.3) の関係は $\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\nabla \log m \cdot \nabla$ から生成される半群の不変測度が $m dx$ となることに対応している．但し， $m = \exp\{-\beta \sum_{i < j}^N \Psi(s_i - s_j)\}$ ．同じことを無限粒子系で考えると，不変測度が Lebesgue 測度の無限直積を含むことになり，この対応関係がそのままでは意味をなさないのである．

この問題は Ψ が Ruelle クラスという良い性質を持つ干渉ポテンシャルならば，古典的な Gibbs 測度の理論によって解決される．実際，このとき $(\mathbb{R}^d)^N$ の代わりに，配置空間 (アンラベル粒子の空間) には $N \rightarrow \infty$ での極限に対応する測度を構成することができる．しかし，この論説の主要例は， Ψ が対数関数の場合を想定している．この場合，あるいはより一般に \mathbb{R}^d で d 次元クーロンポテンシャルを考察した場合，古典的な Gibbs 測度の理論が適用できず，その時点で大きな問題が生じる．

(1.1) は積分形で表示したが，通常，確率微分方程式 (1.4) で表す．

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^{\infty} \nabla \Psi(X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.4)$$

ただし (1.4) の意味は (1.1) である．確率微分方程式 (1.1) は，Lang [32, 33] によって $\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$ の場合に解かれた．また Fritz[10] では 4 次元以下の空間で非平衡解が構成された．種村 [59] によってハードコアブラウン運動の場合が解決された．

確率微分方程式を解く標準的な手段は，伊藤スキームを用いることである．つまり常微分方程式の場合と類似の Picard 近似による方法をとる．従って，少なくとも局所的な，係数の Lipschitz 連続性が必要となる．無限次元では，係数の Lipschitz 連続性は期待できないし，局所化も非常に複雑になる． N 粒子系の段階で方程式を解き，解の $N \rightarrow \infty$ の極限が収束することを示すのが可能な手段だが，これには $N \rightarrow \infty$ の極限に耐えうるロバストな評価が必要となる．

Lang は，ポテンシャル係数が $\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$ の場合に，これを Gibbs 測度の評価と組み合わせることにより実行した．しかし，たとえ Ruelle クラスという扱いやすい範疇でも Ψ が多項式減衰の場合は，Lang の方針で証明するのは無理だった．

無限次元確率微分方程式は、一般には無限個の係数 σ_i と b_i によって

$$dX_t^1 = \sigma_1(\mathbf{X}_t)dB_t^1 + b_1(\mathbf{X}_t)dt$$

$$dX_t^2 = \sigma_2(\mathbf{X}_t)dB_t^2 + b_2(\mathbf{X}_t)dt$$

$$dX_t^3 = \sigma_3(\mathbf{X}_t)dB_t^3 + b_3(\mathbf{X}_t)dt$$

...

という形で与えられる。もし、 (σ_i, b_i) が $i \rightarrow \infty$ で十分に速く $(0, 0)$ に収束すれば、(収束の速さ次第で) 通常の SDE と同様に解くことが出来る。今の場合、問題は (σ_i, b_i) が「対称性」を持ち、 $i \rightarrow \infty$ で $(0, 0)$ に収束しない点である。つまり、各係数が、1つの関数 $(\sigma, b): \mathbb{R}^d \times \mathbb{S} \rightarrow (\mathbb{R}^{d^2} \times \mathbb{R}^d) \cup \{\infty\}$ によって、次で与えられる。 $(X_t^{i\diamond} = \sum_{j \neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j})$

$$dX_t^1 = \sigma(X_t^1, X_t^{1\diamond})dB_t^1 + b(X_t^1, X_t^{1\diamond})dt$$

$$dX_t^2 = \sigma(X_t^2, X_t^{2\diamond})dB_t^2 + b(X_t^2, X_t^{2\diamond})dt$$

$$dX_t^3 = \sigma(X_t^3, X_t^{3\diamond})dB_t^3 + b(X_t^3, X_t^{3\diamond})dt$$

...

繰り返すが、ここで関数 $(\sigma, b)(x, s)$ が粒子の番号 i に依存しないことに注意する。このような対称性は、莫大な個数の同一もしくは有限種類の粒子の振る舞いを追究する統計物理的諸問題にとって自然な枠組みである。

対称性は従来の感覚の手法を使う障害となった。逆にそれにより、系全体を配置空間に値をとる対象と見做せ、アンラベル確率力学 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X^i}$ が有効になる。 \mathbf{X} は不変確率測度 (平衡分布) μ を持ち、幾何的な確率解析、Dirichlet 形式論が有効になる。

5章で説明する第一理論では Dirichlet 形式論を用いて、極めて広い範囲の μ に対して、それを平衡分布にする確率微分方程式の解を構成する。更に μ -a.s. $\mathbf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ に対して、 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ を出発する解を構成する。これらは \mathbf{X} とブラウン運動 \mathbf{B} の組 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) としての解でいわゆる弱解であり、また解の一意性は示されていない。粗く言って、弱解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) がブラウン運動 \mathbf{B} の関数となっているとき、つまりパス空間からパス空間への写像 F が存在し $\mathbf{X} = F(\mathbf{B})$ となっている時に強解という。6章で展開する第二理論では、強解の存在と一意性を証明する。

2. Set up と代表例

$S = \mathbb{R}^d$ とし $S_r = \{|s| \leq r\}$ とする。 \mathbb{R}^d の無限粒子系の空間は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ だが、広すぎるので、粒子を区別しない空間として、 \mathbb{R}^d 上の配置空間

$$S = \left\{ \mathbf{s} = \sum_i \delta_{s_i}; \mathbf{s}(S_r) < \infty \quad \text{for all } r \in \mathbb{N} \right\}$$

を考える。定義から S は、有限もしくは無限個の点測度の和からなるラドン測度の空間である。 S には、漠位相を入れ、Polish 空間 (完備可分距離空間と位相同型) と見做す。また $(S, \mathcal{B}(S))$ の確率測度 μ を S の上の点過程とよぶ。

無限次元確率微分方程式 (1.4) においては、アンラベル力学 \mathbf{X} の平衡分布 μ が重要な役割を果たす。以下この章では μ をまず与え、それからそれに付随する確率微分方程式を表示する。

2.1. Poisson 点過程

S のラドン測度 m に対して、強度測度 m をもつ S の Poisson 点過程 Poi^m とは、配置空間 S の確率測度であって、Borel 集合 A 内の粒子の個数が Poisson 分布で与えられ

$$\text{Poi}^m(\{s(A) = k\}) = e^{-m(A)} \frac{m(A)^k}{k!}$$

を満たし、更に任意の交わりを持たない Borel 集合 A と B に対して、確率変数 π_A と π_B が Poi^m の下で独立となることである。ただし $\pi_A: S \rightarrow S$ は、 $\pi_A(s) = s(\cdot \cap A)$ 。

例 2.1 (無限次元ブラウン運動). m を Lebesgue 測度と取った場合、 $\text{Poi}^m = \Lambda$ と表記する。 Λ は配置空間において Lebesgue 測度の役割を果たし、 $B_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{B_t^i}$ で定義する配置空間値ブラウン運動 $B = \{B_t\}$ の不変確率測度となっている。 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値ブラウン運動 $(B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ を構成することは、独立な無限個のブラウン運動 $\{B^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を考えればよいため自明であり、 B はそのアンラベル力学である。尚、一般の初期条件 $s = (s_i) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ を出発するブラウン運動 B^s は、単に、 $B_t^s = (B_t^i + s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と置くことで構成できる。

2.2. Gibbs 測度

点過程 μ の正則条件付き確率 $\mu_{r,\xi}^n$ を次式で定義する [54, 55]。 $A \in \mathcal{B}(S_r^n)$ に対して

$$\mu_{r,\xi}^n(A) = \mu(\pi_{S_r}(x) \in A | \pi_{S_r^c}(x) = \pi_{S_r^c}(\xi), x(S_r) = n). \quad (2.1)$$

ここで、 $\mu_{r,\xi}^n$ は S_r の外で $\xi \in S$ 、内部にちょうど n 個の粒子が存在するという μ の正則条件付き確率である。 $S_r^n = \{s \in S; s(S_r) = n\}$ に対して $\Lambda_r^n = \Lambda(\cdot \cap S_r^n)$ とおく。 μ が (Φ, Ψ) -カノニカル Gibbs 測度とは、次の関係式 (DLR 方程式) を満たすことである。

$$\mu_{r,\xi}^n(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}} \Lambda_r^n(dx). \quad (\text{DLR 方程式})$$

ここで Z は正規化定数、 $\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \mathcal{I}_{r,\xi}$ とする。ただし

$$\mathcal{H}_r(s) = \beta \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi(s_i) + \sum_{i < j, s_i, s_j \in S_r} \Psi(s_i - s_j) \right\}, \quad \mathcal{I}_{r,\xi} = \beta \sum_{s_i \in S_r, \xi_k \in S_r^c} \Psi(s_i - \xi_k). \quad (2.2)$$

\mathcal{H}_r は S_r 内のハミルトニアン、 $\mathcal{I}_{r,\xi}$ は内部と外部の干渉項である。 $\beta > 0$ は逆温度と呼ばれる定数である。一般に無限次元確率微分方程式は次の形になる。

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \nabla \Psi(X_t^i) dt - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \nabla \Psi(X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Gibbs 測度を平衡分布とする確率力学の例を 3 つ述べる。すべて $\Phi = 0$ の例である。次の 3 つの例では簡単のため Gibbs 測度は平行移動不変とする。

例 2.2 (Lennard-Jones 6-12 potential [45, 49]). $d = 3$, $\Psi_{6,12}(x) = \{|x|^{-12} - |x|^{-6}\}$,

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{12(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^{14}} - \frac{6(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^8} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

例 2.3 (Riesz potentials of Ruelle's class [45, 49]). $d < a$, $\Psi_a(x) = (\beta/a)|x|^{-a}$,

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^{a+2}} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.3)$$

一見するとこの無限次元確率微分方程式 (2.3) は後述の (2.5) や (2.9) と似ている. 実際 (2.3) は (2.5) と (2.9) で $a = 0$ の場合に対応している. しかし確率微分方程式のドリフト項は (2.5) や (2.9) と異なって絶対収束する.

例 2.4 (ハードコア・ブラウン運動粒子 [59]). $\Psi_R(x) = \infty \cdot 1_{S_R}(x)$,

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i} 1_{\{R\}}(|X_t^i - X_t^j|) dL_t^{ij}.$$

更に L_t^{ij} は非減少, $L_0^{ij} = 0$ である連続過程で $L_t^{ij} = L_t^{ji}$, かつ

$$L_t^{ij} = \int_0^t 1_{\{R\}}(|X_s^i - X_s^j|) dL_s^{ij}.$$

これは \mathbb{R}^d における, 直径 R の無限個のハードコア・ブラウン運動粒子の挙動を記述する. この確率力学に対応する格子気体は単純排他過程であり自然なモデルである.

2.3. 行列式点過程

S の点過程 μ に対して, 対称な関数 $\rho^n: S^n \rightarrow [0, \infty)$ は (2.4) を満たすとき ラドン測度 m に対する μ の n -点相関関数と呼ばれる:

$$\int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1, \dots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_n) = \int_S \prod_{i=1}^m \frac{s(A_i)!}{(s(A_i) - k_i)!} d\mu. \quad (2.4)$$

但し, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(S)$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_m = n$. $s(A_i) - k_i < 0$ の時は, $s(A_i)! / (s(A_i) - k_i)! = 0$ と解釈する. 点過程 μ が核関数 $K: S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ とラドン測度 m に付随する行列式点過程とは, μ の m に対する相関関数が次式で与えられることである.

$$\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n.$$

K から構成した $L(S, m)$ 上の作用素 $Kf(x) = \int K(x, y)f(y)m(dy)$ が Hermite 対称かつ局所 trace class, 更にスペクトルが $[0, 1]$ の範囲にあれば, (K, m) 行列式点過程が一意に存在することが知られている [34, 56, 57].

行列式点過程は, 意外な場所に出現する点過程であり, 例えば 10 章で平面 GAF と呼ばれる複素平面 \mathbb{C} の点過程を導入するが, この類似で与えられる複素単位円板 $\{|z| < 1\}$ の点過程は行列式点過程となる. これはガウス確率変数を係数に持つ下記の解析関数 F_{disk} の零点の分布からなる点過程である.

$$F_{\text{disk}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k.$$

ここで $\{\xi_k\}$ は独立同分布, ξ_k の分布は $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz$ である. この場合核関数は [53]:

$$K_{\text{disk}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x - \bar{y})^2}.$$

以下、ランダム行列に関する1次元の典型例を三つ、2次元の典型例を一つ述べる。下記で $\beta = 2$ の場合は、すべて行列式点過程である。1次元では $\beta = 1, 4$ の場合に Pfaffian と呼ばれる類似の行列式構造を持つ点過程となる。尚、以下の4つの例では、平衡分布に対応する確率微分方程式の形は、非自明である。前節の Gibbs 測度の場合にはポテンシャルが最初に与えられているため、係数はそれから自動的に定まる。(存在自体は無限和が収束するか否かによるので非自明ではあるが、それを保証される範囲で古典的な Gibbs 測度の話は展開される)。一方、以下の例は点過程を定義する核関数が最初に与えられているため、それに対してポテンシャルに対応するものが存在するか否かが非自明となる。第一理論では与えられた点過程に対する対数微分の概念を導入し、それから決まる無限次元確率微分方程式が解を持つことを示した。その際に、対数微分の存在および明示表現という問題が生じるのである。

例 2.5 (sine_β 干渉ブラウン運動 [58, 45, 62]). $d = 1, \Psi(x, y) = -\log|x - y|, \beta > 0,$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.5)$$

この確率微分方程式は、 $\beta = 2$ の時、特に無限次元 Dyson モデルと呼ばれる。アンラベル粒子の力学 $X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i}$ の定常分布 $\mu_{\text{sine}, \beta}$ は平行移動不変性を持ち、係数の和は、絶対収束はしない。 $\mu_{\text{sine}, \beta}$ は sine_β 点過程と呼ばれる。 $\beta = 2$ の時、行列式点過程となり、核関数 $K_{\text{sine}, 2}$ は次式で与えられる。

$$K_{\text{sine}, 2}(x - y) = \frac{\sin 2(x - y)}{\pi(x - y)}. \quad (2.6)$$

確率微分方程式 (2.5) は $\beta = 1, 2, 4$ の時、[45, 49], $\beta \geq 1$ の時、[62] で解かれた。

例 2.6 (Airy_β 干渉ブラウン運動 [50]). $d = 1, \Psi(x, y) = -\log|x - y|, \beta > 0,$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{\substack{j \neq i, \\ |X_t^j| < r}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.7)$$

$\beta = 2$ の時、定常分布 $\mu_{\text{Ai}, 2}$ は、行列式点過程であり、核関数は次式で与えられる。

$$K_{\text{Ai}, 2}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y} \quad (x \neq y).$$

ただし $\text{Ai}'(x) = d\text{Ai}(x)/dx$, また $\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk e^{i(zk + k^3/3)}$ ($z \in \mathbb{R}$) は Airy 関数。確率微分方程式 (2.7) の形は、[50] で初めて得られ、 $\beta = 1, 2, 4$ の時に解かれた。

例 2.7 ($\text{Bessel}_{\alpha, \beta}$ 干渉ブラウン運動 [18]). $d = 1, S = [0, \infty)$ とし $1 \leq \alpha < \infty, \beta > 0,$

$$dX_t^i = dB_t^i + \left\{ \frac{\alpha}{2X_t^i} + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{j \neq i, \\ X_t^j > X_t^i}} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.8)$$

定常分布 $\mu_{\text{Be}, \alpha, \beta}$ は行列式過程であり、 $\text{Bessel}_{\alpha, \beta}$ 点過程と呼ばれる。ただし、 $\beta = 1, 2, 4, \beta = 2$ の時、 $[0, \infty)$ の Lebesgue 測度に対する n -点相関関数 $\rho_{\text{Be}, \alpha, 2}^n$ は、

$$\rho_{\text{Be}, \alpha, 2}^n(\mathbf{x}^n) = \det[\mathbf{K}_{\text{Be}, \alpha, 2}(x_i, x_j)]_{i, j=1}^n$$

で与えられる。核関数 $K_{\text{Be},\alpha,2}$ は連続関数であって、

$$K_{\text{Be},\alpha,2}(x, y) = \frac{J_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\alpha(\sqrt{y}) - \sqrt{x}J'_\alpha(\sqrt{x})J_\alpha(\sqrt{y})}{2(x-y)} \quad (x \neq y)$$

である。確率微分方程式 (2.8) は、[18] で $\beta = 2$ の時に解かれた。

例 2.8 (Ginibre 干渉ブラウン運動 [45]). $d = 2$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$ とし、二つの無限次元確率微分方程式 (2.9) と (2.10) :

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^i - X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (2.9)$$

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|X_t^j| < r, \\ j \neq i}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.10)$$

を考える。定常分布は Ginibre 点過程 μ_{Gin} と呼ばれる行列式過程であり、その核関数は、 \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} と同一視して複素関数で表すと次式で与えられる。

$$K_{\text{Gin}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}|x|^2 + x\bar{y} - \frac{1}{2}|y|^2\right\}.$$

明らかに、(2.9) と (2.10) は異なる方程式だが、Ginibre 点過程 μ_{Gin} のサポートの上では、 μ_{Gin} -a.s. 出発点に対して同じ一意的強解を持つ。

3. ランダム行列と干渉ブラウン運動

2.3 章の例は N 次のランダム行列の固有値分布の $N \rightarrow \infty$ の極限として得られるという背景を持つ。ランダム行列は様々なものが知られているが、以下では、典型例であるガウス型ランダム行列について説明する。

N 次のガウス型ランダム行列 $M^N = [m_{ij}]_{i,j=1}^N$ とは、正方行列であって、その成分が対称性–実対称、Hermite 対称、quaternion 対称 (分布の直交, ユニタリ, シンプレクティック不変性)– からくる制約を除いて独立同分布な確率変数である。これらのランダム行列は GOE, GUE, GSE と呼ばれる [3, 9, 37]。分散と平均を標準的に選べば M^N の固有値の分布は

$$m_\beta^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \right\} \exp\left\{-\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N |x_k|^2\right\} d\mathbf{x}_N, \quad (3.1)$$

ここで GOE, GUE, GSE は $\beta = 1, 2, 4$ にそれぞれ対応している。

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間を \mathcal{P} とおく。 $m_\beta^N(d\mathbf{x}_N)$ の下で \mathcal{P} 値確率変数

$$\mathbb{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i/\sqrt{N}}$$

を考え、 μ_β^N をその分布とする。定義から μ_β^N は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間 \mathcal{P} の上の確率測度である。 \mathcal{P} の元 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を

$$\sigma_{\text{semi}}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{(-2,2)}(x) \quad (3.2)$$

で定義する. $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ は半円分布と呼ばれる. Wigner の半円則とは, $\{\mu_\beta^N\}$ がノンランダムな測度 $\delta_{\sigma_{\text{semi}}(x)dx}$ に弱収束することを主張する.

半円分布 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を考察した \mathbb{R} の各点をマクロな位置とよぶ. 各マクロな位置 $\theta \in \mathbb{R}$ において意味のある極限があるように, 適切に (3.2) をリスケールする. これは $|\theta| < 2$ と $\theta = \pm 2$ の場合に可能で前者を bulk, 後者を soft edge の位置と呼ぶことにする.

3.1. bulk 極限と小さな普遍性

bulk の位置 $\{|\theta| < 2\}$ のスケーリングを bulk 極限という. このとき (3.1) を

$$x_i \mapsto \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}}$$

とスケーリングする. すると $m_\beta^N(ds_N) = m_\beta^N(\mathbf{s}_N)ds_N$ の分布は

$$m_\beta^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j} |s_i - s_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| \frac{s_k + \theta N}{\sqrt{N}} \right|^2 \right\} ds_N.$$

対応する配置空間 S の分布を $\mu_{\beta,\theta}^N$ と表すと, 極限 $\mu_{\beta,\theta}$ は核関数

$$K_\theta(x, y) = \frac{\sin\{\sqrt{4 - \theta^2}(x - y)\}}{\pi(x - y)}$$

をもつ $\text{sine}_{\beta,\theta}$ 点過程になる. ここで $\theta = 0$ の場合が, (2.6) で現れた. 一般には, その密度を定数倍したものとなる. 行き先が, 常に sine 点過程 (密度のパラメーターがマクロな位置に依存するが) となるという意味で bulk 極限は小さな普遍性を持つ.

次に上述の普遍性の確率力学版を考える. まず, $m_\beta^N(ds_N) = m_\beta^N(\mathbf{s}_N)ds_N$ を平衡分布を持つ可逆な N 粒子系の確率力学を Dirichlet 形式を用いて導入する.

$$\mathcal{E}^{m_\beta^N}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial s_i} \frac{\partial g}{\partial s_i} m_\beta^N ds_N, \quad L^2(\mathbb{R}^N, m_\beta^N).$$

エネルギー型式の測度と L^2 空間の測度が共通だからこの形の Dirichlet 空間は distorted ブラウン運動と呼ばれる. Dirichlet 空間の生成作用素を部分積分によって求めると,

$$\mathcal{E}^{m_\beta^N}(f, g) = - \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \Delta f + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \log m_\beta^N}{\partial s_i} \frac{\partial f}{\partial s_i} \right\} g m_\beta^N ds_N. \quad (3.3)$$

ここで

$$\frac{\partial \log m_\beta^N(\mathbf{s}_N)}{\partial s_i} = \beta \sum_{j \neq i} \frac{1}{s_i - s_j} - \frac{\beta}{N} s_i - \beta \theta$$

より, N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の確率微分方程式は (3.3) から次式で与えられる.

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2N} X_t^{N,i} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt.$$

この確率微分方程式で N を形式的に無限大に飛ばした極限は

$$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j}} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt.$$

ところが、この方程式は $\theta = 0$ 以外では正しい極限を与えない。実際、極限は常に (2.5) である。河本氏と共に以下の現象–SDE gap–を証明した。

定理 3.1 (河本-O.[27]). $\beta = 2$ とする。アンラベル粒子の初期分布を $\mu_{2,\theta}^N$ で与え、初期のラベルを適切に設定すると、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の最初の m 個は $C([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ に於いて、(2.5) の解の最初の m 個に弱収束する。

定理 3.1 は [28] の結果の応用として [27] で得られている。論文 [28] では N 粒子系の確率微分方程式から無限粒子系の確率微分方程式への遷移・収束に関する一般論を構築した。必要な仮定は複雑であり、ここでは述べない。直感的には、有限粒子系の確率微分方程式の係数の末尾の部分が一樣にコントロールされるという仮定である。

[28] の結果は非対称な無限粒子系に対しても適用できる。更に Ruelle クラスという Gibbs 測度の理論に標準的に表れる干渉ポテンシャルであれば、簡単に適用できる。しかし定理 3.1 のように対数ポテンシャルに応用する場合は、精密な計算が必要になる。

後に別の収束定理 (定理 9.1) を紹介する。この定理は対称 Dirichlet 形式に適用範囲が限られているが、仮定は簡明であり様々な応用を持つ。それによって定理 3.1 の別証明を与えることができる。なお、 $\theta = 0$ の場合は、後で述べる時空間相関関数を用いた方法でもこの収束を証明できる [52]。1次元系で $\beta = 2$ かつ対数干渉ポテンシャルの場合は、3種類の相異なる証明が存在する。

尚、定理 3.1 の結果は一般の β アンサンブルでも成り立つと思われる。

3.2. Soft edge 極限, Airy 干渉ブラウン運動

半円分布の両端の点 $\theta = \pm 2$ でのスケーリングを soft edge 極限という。この時、

$$x \mapsto 2\sqrt{N} + \frac{s}{N^{1/6}}. \quad (3.4)$$

$N \rightarrow \infty$ の極限は、 $\mu_{\text{Ai},\beta}$ となる。 N 粒子系の分布 $m_{\text{Ai},\beta}^N(ds_N) = m_{\text{Ai},\beta}^N(\mathbf{s}_N) ds_N$ は、

$$m_{\text{Ai},\beta}^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j} |s_i - s_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| 2\sqrt{N} + \frac{s_k}{N^{1/6}} \right|^2 \right\} ds_N.$$

対数微分を計算すると、

$$\frac{\partial \log m_{\text{Ai},\beta}^N(\mathbf{s}_N)}{\partial s_i} = \beta \sum_{j \neq i} \frac{1}{s_i - s_j} - \beta \left\{ N^{1/3} + \frac{s_i}{2N^{1/3}} \right\}.$$

これから対応する N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X_t^{N,i})_{i=1}^N$ が満たす確率微分方程式は

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2} \left\{ N^{1/3} + \frac{X_t^{N,i}}{2N^{1/3}} \right\} dt. \quad (3.5)$$

ここで $N \rightarrow \infty$ の極限をとる難しさは、(3.5) の係数が $-\frac{\beta}{2}N^{1/3}dt$ という発散項を含む点である。種村氏との共同研究 [50] で無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \right\} dt \quad (3.6)$$

を解き、河本氏との共同研究 [28] で (3.5) の解が (3.6) の解に収束することを示した。

尚、確率微分方程式 (3.6) の形は半円分布 (3.2) とスケーリング (3.4) から直感的に導くことができる。実際極限の半円分布の密度関数を (3.4) で逆にスケーリングすると、 $\varsigma(x) = \frac{1}{\pi} 1_{(-\infty, 0)}(x) \sqrt{-x}$ となり、

$$\frac{2\sqrt{r}}{\pi} = \int_{-r}^0 \frac{\varsigma(x)}{-x} dx$$

であるからである。半円分布を一般の極限分布にしても成立し、極限分布に応じた補正関数が得られるはずで、この導出は普遍的だと思われる。

4. 時空間相関関数の方法

干渉ポテンシャルが対数関数の時、1次元系に於いて逆温度 $\beta = 2$ ならば、時空間相関関数を拡張核関数の行列式で具体的に与えることで確率力学を構成できる。香取-種村 [23, 24, 25, 26] に従い1次元の無限粒子系の代表例、sine, Airy, Bessel 点過程の場合に、この拡張核関数を明示する。

S 値過程 X_t の多重時間モーメント生成関数を以下で定義する。

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\mathbb{R}} f_m dX_{t_m} \right\} \right],$$

いま $\mathbb{K}(s, x; t, y)$ を拡張核関数とし、その Fredholm 行列式を用いて $\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}]$ を表示する:

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] = \text{Det}_{\substack{(s,t) \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}^2, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2}} \left[\delta_{st} \delta(x-y) + \mathbb{K}(s, x; t, y) \chi_t(y) \right],$$

ここで $M \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^M \in C_0(\mathbb{R})^M$, $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^M$ ($0 < t_1 < \dots < t_M$) である。また、 $\chi_{t_i} = e^{f_i} - 1$ ($1 \leq i \leq M$) [23, 26].

(i) 拡張 sine 核: $\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s < t, \\ K_{\text{sin}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s > t. \end{cases}$$

(ii) 拡張 Airy 核: $\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^\infty du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s < t, \\ K_{\text{Ai}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\int_{-\infty}^0 du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s > t. \end{cases}$$

(iii) 拡張 Bessel 核: $\mathbb{K}_{J_\nu}(s, x; t, y), s, t \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{K}_{J_\nu}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^1 du e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if } s < t, \\ K_{J_\nu}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\int_1^\infty du e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if } s > t. \end{cases}$$

これらの関数を使って S 値確率力学が定義できる. 有限粒子系でも対応する表示があり, このアンラベル力学はその極限である. [49, 50, 51, 52, 30] の結果を合わせると, 時空間相関関数で構成した確率力学と, 確率解析的に構成したものが一致することが分かる. 1次元で $\beta = 2$ かつ対数関数の場合は, 他の方法も知られている [17, 7].

5. Dirichlet form approach (第一理論)

この章の目的は, 次の無限次元確率微分方程式を解く一般論を展開することである.

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathbf{X}_t^{i\diamond}) dB_t^i + b(X_t^i, \mathbf{X}_t^{i\diamond}) dt \quad (i \in \mathbb{N}), \quad \mathbf{X} \in \mathbf{W}^{\text{sol}}. \quad (5.1)$$

方程式は時間区間 $[0, \infty)$ で解くこととし $W((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}) = C([0, \infty); (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ と置く. \mathbf{W}^{sol} は $W((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ の対称な部分集合で解の空間である. 係数を自然に $W((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ の部分集合で定義された関数と見なした時, \mathbf{W}^{sol} はその定義域に含まれているとする.

5.1. アンラベル拡散過程の構成

この章では, 与えられた点過程 μ に付随する Dirichlet 形式からアンラベル拡散過程を構成するための一般的定理を紹介する. まず準 Gibbs 測度の導入から始める.

定義 5.1 (準 Gibbs 測度). Φ, Ψ をそれぞれ自由および干渉ポテンシャルとする. μ が (Φ, Ψ) -準 Gibbs 測度とは (2.1) の $\mu_{r, \xi}^n$ が, (r, ξ, n) に依存する正定数 $C = C(r, \xi, n)$ に対して次の不等式を満たすことである. μ -a.s. ξ とすべての $r, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C(r, \xi, n)^{-1} e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n \leq \mu_{r, \xi}^n(ds) \leq C(r, \xi, n) e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n. \quad (5.2)$$

ここで二つの測度 μ と ν が $\mu \leq \nu$ とは, すべての A に対して $\mu(A) \leq \nu(A)$ が成り立つことを表す. $\mathcal{H}_r(s)$ は (2.2) で定義された S_r 内部だけのハミルトニアンである.

注意 5.1. (5.2) において定数 $C(r, \xi, n)$ が ξ にも依存していることに注意する. この概念は自由ポテンシャルの変動に対してロバストで μ が (Φ, Ψ) -準 Gibbs 測度ならば, 任意の局所有界な Φ_0 に対して μ は $(\Phi + \Phi_0, \Psi)$ -準 Gibbs 測度となる. 典型例で挙げた対数関数で干渉しあう点過程 (sine, Airy, Bessel, Ginibre 点過程) はすべて $(0, -\beta \log |x - y|)$ -準 Gibbs 測度である. 特に Bessel 点過程も $(0, -\beta \log |x - y|)$ -準 Gibbs 測度とみなせる.

(5.1) の係数 σ を用いて $a(x, s) = \sigma(x, s)^t \sigma(x, s)$ と置く. 以下を仮定する.

(A1) a は一様楕円かつ有界, s を固定するごとに $a(\cdot, s)$ は滑らか. μ は (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度, 上半連続なポテンシャル (Φ_0, Ψ_0) と正定数 c_1 と c_2 によって,

$$c_1(\Phi_0, \Psi_0) \leq (\Phi, \Psi) \leq c_2(\Phi_0, \Psi_0).$$

(A2) すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(S_r^k) < \infty$, ただし $S_r^k = \{s(S_r) = k\}$.
これらの, μ と a に対して以下のように Dirichlet 形式を定義する.

$$\mathcal{E}^{a,\mu}(f, g) = \int_{\mathcal{S}} \mathbb{D}^a[f, g] d\mu, \quad \mathbb{D}^a[f, g] = \frac{1}{2} \sum_i a(s_i, s^{i\heartsuit}) \frac{\partial f}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial s_i}.$$

但し $s = \sum_i \delta_{s_i}$ に対して $s^{i\heartsuit} = \sum_{j \neq i} \delta_{s_j}$ と置く. \mathcal{D}_\circ を \mathcal{S} 上の局所的かつ滑らかな関数空間とする. ここで関数 f が局所的とは, f がある $r \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma[\pi_{S_r}]$ 可測であることである. また滑らかとは, \mathcal{S} の上の関数 $f(s)$ は $S^{\mathbb{N}} \cup \sum_i S^i$ の対称な部分集合上の変数について対称な関数 $\check{f}(s_1, \dots)$ と見做せるのでそれが滑らかという意味である. より厳密な定義は [41, 5] を参照. 今, $\mathcal{D}_\circ^{a,\mu} = \{f \in \mathcal{D}_\circ \cap L^2(\mathcal{S}, \mu); \mathcal{E}^{a,\mu}(f, f) < \infty\}$ と置く.

定理 5.1 ([41, 42, 46, 49]). (A1)–(A2) を仮定する. このとき $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}_\circ^{a,\mu})$ は $L^2(\mathcal{S}, \mu)$ 上, 可閉となる. その閉包 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ に付随する拡散過程 $(X, \{P_s\}_{s \in \mathcal{S}})$ が存在する.

[2, 63] は, Dirichlet 形式の定義域として, 「 \mathcal{S} の多項式」を基にする空間を核にした. これら二つの Dirichlet 形式が一致することは, [51] で示された.

5.2. ラベル力学と Dirichlet 空間のカップリング

$S_{s,i} = \{s; s(\{x\}) = 0 \text{ or } 1 \text{ for } \forall x \in \mathbb{R}^d, s(\mathbb{R}^d) = \infty\}$ と置き, 次の二つを仮定する.

(A3) 各粒子 $\{X^i\}$ は非衝突かつ無限系: $P_\mu(X_t \in S_{s,i} \text{ for } \forall t \in [0, \infty)) = 1$.

(A4) 各粒子 $\{X^i\}$ は非爆発: $P_\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u^i| < \infty \text{ for } \forall t \in [0, \infty)\}) = 1$.

(A3) の非衝突については [43], 他の条件は [49] に十分条件がある. 非爆発は例えば 1 点相関関数が $|x| \rightarrow \infty$ で $\exp(|x|^c)$ ($c < 2$) の増大度ならば満たされる.

以上二つの仮定の下でアンラベルパス X_t に時刻 $t = 0$ でラベル $l(X_0) = \mathbf{X}_0$ をつけるとそれはずっと保存される. このパス空間からパス空間への対応を l_{path} と表す. 定義から, l_{path} は $C([0, \infty); S_{s,i})$ から $C([0, \infty); (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ への写像である. 尚, 一般に $l_{\text{path}}(X)_t \neq l(X_t)$ である.

定理 5.2 ([44]). (A1)–(A4) を仮定する. 定理 5.1 で構成したアンラベル力学 X に対して $\mathbf{X} = l_{\text{path}}(X)$ によってラベル力学 \mathbf{X} を構成できる. \mathbf{X} は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値拡散過程となる.

一旦ラベル力学 $\mathbf{X} = l_{\text{path}}(X)$ が構成できると, それから, 最初の m 個だけラベルを付けた m ラベル力学を構成できる:

$$(X^1, \dots, X^m, \sum_{i=m+1}^{\infty} \delta_{X^i}).$$

次に m ラベル力学の Dirichlet 空間を導入する. μ の m -縮約 Campbell 測度とは

$$\mu^{[m]}(d\mathbf{x}ds) = \rho^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \mu_{\mathbf{x}}(ds).$$

ただし ρ^m は μ の m 点相関関数, $\mu_{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^d)^m$ で条件づけられた縮約 Palm 測度である. 縮約とは条件つけた分の粒子を差し引くという意味であり, $\mu_{\mathbf{x}}$ は形式的には次式で与えられる:

$$\mu_{\mathbf{x}}(ds) = \mu(ds - \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} | s(x_i) \geq 1 \text{ for all } i).$$

$\mu^{[m]}$ に対して m -ラベル力学に対する定理 5.1 の類似が成立する．そこで $\mu^{[m]}$ に対応する $(\mathbb{R}^d)^m \times \mathcal{S}$ の上の Dirichlet 空間を $\Xi^{[m]}(\mu)$ と置く ($m \in \mathbb{N}$)．また $\Xi^{[0]}(\mu)$ を定理 5.1 で与えられた Dirichlet 空間とする．

定理 5.3 ([44]). (A1)–(A4) を仮定する． $\Xi^{[m]}(\mu)$ に付随する $\mathbf{X}^{[m]}$ は次を満たす．

$$\mathbf{X}^{[m]} = (X^1, \dots, X^m, \sum_{i=m+1}^{\infty} \delta_{X^i}) \quad (\text{法則同等}). \quad (5.3)$$

ここで右辺の X^i は定理 5.2 で構成されたラベル力学 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ の各成分である．

(5.3) の右辺は m に依らない同一の Dirichlet 空間 $\Xi^{[0]}(\mu)$ で構成された拡散過程の汎関数である．この意味で定理 5.3 は Dirichlet 空間の列 $\{\Xi^{[m]}(\mu)\}_m$ の間のカップリングの存在を示している．

5.3. 無限次元確率微分方程式

つぎに確率微分方程式 (5.1) を解く．(5.1) の解 \mathbf{X} で，そのアンラベル力学 \mathbf{X} の平衡分布が μ となるものを構成したい．そのため，対数微分 d^μ の概念を導入する．

定義 5.2. d^μ が μ の対数微分とはすべての $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}} d^\mu f d\mu^{[1]} = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}} \nabla_x f d\mu^{[1]}.$$

定義 5.2 から，対数微分を $d^\mu(x, \mathbf{s}) = \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, \mathbf{s})$ と表す．

(A5) μ は対数微分 d^μ をもち，次の微分方程式を満たす．

$$2b(x, \mathbf{s}) = \nabla_x a(x, \mathbf{s}) + a(x, \mathbf{s}) \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, \mathbf{s}). \quad (5.4)$$

今， a は単位行列とする．与えられた干渉ポテンシャル Ψ に対して，

$$b(x, \mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_i \nabla_x \Psi(x, s_i)$$

という係数を考える．この場合， Ψ が Ruelle クラスのポテンシャルであれば，DLR 方程式を満たす点過程 μ が存在するから，それが (5.4) の解の一つとなる．

行列式点過程の場合は，核関数によって点過程の方が先に与えられていて，(5.4) を満たす係数を求めることになり，逆問題になっている．[45, 47] に於いては， μ の対数微分を計算するための一般論を用意した．それを用いて，この論説の例はすべて計算できる．やはり準 Gibbs 性と同様に， μ に応じた幾何的剛性を証明することが鍵になる．この部分の計算は対数ポテンシャルの場合は自由ポテンシャルに応じて異なる精密な評価を必要とする．[45, 50, 18, 5]

一旦，対数微分が得られれば，それが (5.4) を満たすとき (5.1) を解くことができる．次の定理はこの論説のすべての例に適用できる汎用性の高い定理である．

定理 5.4 ([45]). (A1)–(A5) を仮定する．このとき与えられたラベル \mathbf{l} に対して確率微分方程式 (5.1) は $\mu \circ \Gamma^{-1}$ -a.s. \mathbf{s} の出発点に対して解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) をもつ． \mathbf{X} は， $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値拡散過程になる．また対応するアンラベル確率力学 \mathbf{X} は μ 可逆拡散過程である．

定理 5.4 の証明の鍵は定理 5.3 である。実際、 $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ において、各座標関数 x_i は Dirichlet 形式 $\Xi^{[m]}$ ($i \leq m$) の定義域に局所的に入る。そこでそれに対して伊藤の公式（福島分解と Revuz 対応）を使えば、これらが確率微分方程式 (5.1) を満たすことが分かる。この段階では、最初の m 個の粒子を確率微分方程式で記述したに過ぎないが、これがすべての m に対して成立するから、定理 5.3 で示したカップリングの存在を用いると、 m まででなく、すべての $i \in \mathbb{N}$ で (5.1) が解けたことになる。

6. 強解の存在とパスイズ一意性：第二理論

この章では、種村秀紀氏と開発した第二理論を紹介し、それによって無限次元確率微分方程式の解の一意性と強解の存在を示す [49]。

第一理論の解は、 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値過程 \mathbf{X} とブラウン運動 \mathbf{B} の対 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) として得られる弱解である。一般に \mathbf{X} がブラウン運動 \mathbf{B} の関数として構成される場合、強解と呼ぶが、それではない。また、与えられた Dirichlet 空間に付随する解は一意だが、確率微分方程式 (5.1) に付随する Dirichlet 空間の一意性が示されておらず、故に第一理論では解の一意性は証明されていない。

この章では大きな無限次元空間 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の代わりに小さな無限次元空間の列 $(\mathbb{R}^d)^m \times S$ を考える。 $(\mathbb{R}^d)^m \times S$ において S はランダム環境、 $(\mathbb{R}^d)^m$ を強解の存在や一意性が成立する有限次元空間の列と捉え直し、その上の有限次元確率微分方程式の列を考える。そして、 $(\mathbb{R}^d)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) 上の確率微分方程式 (6.1) の間に、カップリングを導入する。つまり、一つの無限次元確率微分方程式を無限個の両立性を持つ有限次元確率微分方程式の列 (IFC) と解釈する。そのために、第一理論で構成した弱解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) を用いる。尚、IFC とは infinite system of finite-dimensional stochastic differential equations with consistency の略である。

6.1. 無限次元確率微分方程式の強解の存在とパスイズ一意性

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ で定義された (5.1) の弱解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) が与えられているとする。 Γ をラベル、 μ を点過程とし \mathbf{X}_0 の分布は $\mu \circ \Gamma^{-1}$ で与えられるとする。 \mathbf{s} を出発する解は (\mathbf{X}, \mathbf{B}) を条件付確率 $P_{\mathbf{s}} = P(\cdot | \mathbf{X}_0 = \mathbf{s})$ の下で考えるとえられる。つぎに (\mathbf{X}, \mathbf{B}) をもちいて、 $(\mathbb{R}^d)^m$ 値確率微分方程式の族を考える。各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ についての方程式

$$dY_t^{m,i} = \sigma(Y_t^{m,i}, Y_t^{m,i\Diamond} + \mathbf{X}_t^{m*}) dB_t^i + b(Y_t^{m,i}, Y_t^{m,i\Diamond} + \mathbf{X}_t^{m*}) dt, \quad \mathbf{Y}_0^m = \mathbf{s}^m. \quad (6.1)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対して $\mathbf{s}^m = (s_1, \dots, s_m)$ 、また、次のように置く。

$$Y^{m,i\Diamond} = \sum_{j \neq i}^m \delta_{Y^{m,j}}, \quad \mathbf{X}^{m*} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{X^k}, \quad \mathbf{X}^{m*} = (X^k)_{k=m+1}^{\infty}.$$

各 \mathbf{X} を固定するごとに、(6.1) は、時間非一様な dm 次元の確率微分方程式になる。従って、 \mathbf{X} の振る舞いが良ければ、有限次元確率微分方程式 (6.1) は、各 m に対してパスイズ一意の強解をもつ。そこで次を仮定する。

(IFC) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、(6.1) はパスイズ一意の強解を持つ。

(6.1) の解 \mathbf{Y}^m は、 $(\mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*})$ と初期条件 \mathbf{s}^m の関数なので

$$\mathbf{Y}^m = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}^m, \mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*}) = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*})$$

とあらわす. \mathbf{Y}^m は $\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}]$ 可測である. (\mathbf{X}, \mathbf{B}) が無限次元確率微分方程式の解という仮定と方程式 (6.1) の解のパスワイズ一意性から

$$\mathbf{X}^m = \mathbf{Y}^m \quad (6.2)$$

となり, 極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}^m$ が自明に存在する. つまり次式が成立する.

$$\mathbf{X} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}). \quad (6.3)$$

尚, (6.2) より解 \mathbf{X} が「不動点」となるが, 次節ではより一般の場合も考えている.

$\mathcal{T}(\mathbf{S}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_{S_r^c}]$ を \mathbb{R}^d の配置空間 \mathbf{S} の末尾 σ 加法族とする. ここで集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して, $\pi_A: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ は射影 $\pi_A(\mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot (\cap A)$, $S_r^c = \{s \in \mathbb{R}^d; |s| > r\}$ である.

次の確率変数をコントロールすることが, アンラベル力学 \mathbf{X} の性質をラベル力学 \mathbf{X} に移行するための鍵となる. $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ と $T, r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$m_{T,r}(\mathbf{X}) = \inf\{m \in \mathbb{N}; X^i \in C([0, T]; S_r^c) \text{ for } m < \forall i \in \mathbb{N}\}$$

(\mathbf{X}, \mathbf{B}) について次の条件を導入する. $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X^i}$ である. また \mathbf{X}_0 の分布が $\mu \circ \Gamma^{-1}$ であることを思い出す. すると \mathbf{X}_0 の分布は μ となる.

(TT) $\mu(A) \in \{0, 1\}$ for all $A \in \mathcal{T}(\mathbf{S})$ (末尾自明条件).

(AC) $P \circ X_t^{-1} \prec \mu$ for all $0 < t < \infty$ (絶対連続条件).

(NBJ) $P(m_{T,r}(\mathbf{X}) < \infty) = 1$ for all $T, r \in \mathbb{N}$ (no big jump 条件).

(IFC) を満たす弱解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) を IFC 解と呼ぶ.

定理 6.1 ([49]). μ が (TT) を満たすとする. (\mathbf{X}, \mathbf{B}) が (AC), (NBJ) を満たす IFC 解とする. すると, $\mu \circ \Gamma^{-1}$ -a.s. \mathbf{s} に対して (AC), (NBJ), (IFC) という制約の下で (5.1) は一意的強解 $F_{\mathbf{s}}$ を持つ.

ここで $F_{\mathbf{s}}$ が (AC), (NBJ), (IFC) という制約の下での一意的強解であるとは, 任意の弱解 $(\mathbf{X}', \mathbf{B}')$ で (AC), (NBJ), (IFC) を満たすものに対して $\mathbf{X}' = F_{\mathbf{s}}(\mathbf{B}')$ を満たし, かつ任意の $\{\mathcal{F}_t\}$ ブラウン運動 $\hat{\mathbf{B}}$ に対して $F_{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{B}})$ が (AC), (NBJ), (IFC) を満たす強解になることである.

第一理論で構成した弱解は (AC) と (NBJ) を満たす. (IFC) を確認するための一般的定理は [49] で与えられている. この結果は弱解が準正則 Dirichlet 形式と対応していることを用いているが, 準正則性によらない精密化を準備中である.

6.2. IFC 解と一意的強解

この章では (IFC) を仮定する. (6.2) の両立性を漸近的なものに一般化して, IFC 解を拡張した AIFC 解の概念を導入する. \mathbf{W}^{sol} を無限次元確率微分方程式 (5.1) で考えた解の空間とする. 更に

$$\mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{W}^{\text{sol}}; \mathbf{X}_0 = \mathbf{s}\}, \quad \mathbf{W}_0 = \{\mathbf{X} \in W((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}); \mathbf{X}_0 = \mathbf{0}\}$$

と置く. 写像 $F_{\mathbf{s}}^m: \mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}} \times \mathbf{W}_0 \rightarrow \mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}}$ を次式で定義する.

$$F_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \{(Y_t^{m,1}, \dots, Y_t^{m,m}, X_t^{m+1}, X_t^{m+2}, \dots)\}_{0 \leq t \leq T}.$$

ここで $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ は仮定 (IFC) から得られる (6.1) の一意解である。

各 (\mathbf{s}, \mathbf{B}) を固定すると, $F_s^m(\cdot, \mathbf{B})$ は $\mathbf{W}_s^{\text{sol}}$ から $\mathbf{W}_s^{\text{sol}}$ への写像 $F_s^m = (F_s^{m,i})_{i=1}^m$ を定める. $\mathbf{W}_s^{\text{sol}} \times \mathbf{W}_0$ 上の確率測度 \bar{P}_s が与えられたとする. この時,

$$F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_s^m(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \text{ in } \mathbf{W}_s^{\text{sol}} \text{ under } \bar{P}_s \quad (6.4)$$

とは, 下記の条件が満たされることとする. $F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \in \mathbf{W}_s^{\text{sol}}$ かつ, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して, $W(\mathbf{S})$ に於ける極限 (6.5)–(6.7) が \bar{P}_s -a.s. (\mathbf{X}, \mathbf{B}) に対して存在する.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_s^{m,i}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = F_s^{\infty,i}(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \quad (6.5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\cdot \sigma^i(F_s^m(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) dB_u^i = \int_0^\cdot \sigma^i(F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) dB_u^i, \quad (6.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\cdot b^i(F_s^m(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) du = \int_0^\cdot b^i(F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) du. \quad (6.7)$$

ここで $\sigma^i(\mathbf{Z}_t) = \sigma(Z_t^i, Z_t^{i,\diamond})$, また b^i も同様に定義する.

定義 6.1. \bar{P}_s は (6.4) と $\bar{P}_s(\mathbf{B} \in \cdot) = P_{\text{Br}}^\infty$ を満たすとき, (5.1) の AIFC 解と呼ぶ.

(5.1) の弱解を AIFC 解から構成する.

補題 6.2 (O.-種村 [49]). 初期条件 \mathbf{s} を固定する. (IFC) を仮定する. \bar{P}_s は (5.1) の AIFC 解とする. この時 \bar{P}_s の下で $(F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$ は (5.1) の弱解である.

ラベルパス空間のラベルについての末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})$ を次式で定義する.

$$\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma[\mathbf{X}^{m*}]$$

\mathbf{B} の分布を P_{Br}^∞ とおく. 初期条件 \mathbf{X}_0 とブラウン運動 \mathbf{B} について条件付けた正則条件付き確率を $\bar{P}_{\mathbf{s}, \mathbf{b}}(\cdot) = P((\mathbf{X}, \mathbf{B}) \in \cdot | (\mathbf{X}_0, \mathbf{B}_0) = (\mathbf{s}, \mathbf{b}))$ と表す. \mathbf{s} を固定する.

(PT1) P_{Br}^∞ -a.s. \mathbf{b} に対して, $\bar{P}_{\mathbf{s}, \mathbf{b}}|_{\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})}$ は自明.

(PT2) P_{Br}^∞ -a.s. \mathbf{b} に対して, $\bar{P}_{\mathbf{s}, \mathbf{b}}|_{\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})}$ は一意.

ここで一意とは, \mathbf{s} を出発する任意の IFC 解 (\mathbf{X}, \mathbf{B}) と $(\mathbf{X}', \mathbf{B}')$ に対して

$$\bar{P}_{\mathbf{s}, \mathbf{b}}|_{\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})} = \bar{P}'_{\mathbf{s}, \mathbf{b}}|_{\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})}$$

が成立することである.

定理 6.3 (O.-種村 [49]). 初期条件 \mathbf{s} を固定する. (\mathbf{X}, \mathbf{B}) を (5.1) の IFC 解とする.

(1) (\mathbf{X}, \mathbf{B}) が強解になることと, (PT1) は同値である.

(2) (\mathbf{X}, \mathbf{B}) が一意的強解になることと, (PT1)–(PT2) を満たすことは同値である.

この理論ではパス空間のラベルについての末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})$ を確率微分方程式の境界条件と見做している. $\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})$ が自明であり, 更に解の分布の $\mathcal{T}_{\text{path}}((\mathbb{R}^d)^\mathbb{N})$ への制限が一意であることが, もとの無限次元確率微分方程式の解の一意性を示しているのである. ここで上述の結果が必要十分条件になっていることを注意する.

定理 6.3 は, 無限粒子系のタイプの無限次元確率微分方程式を超えて, 対称性を持たない無限次元確率微分方程式でも成立する. 必要なことは IFC 条件によって, 無限

次元方程式が有限次元方程式のスキームに読み替えられるという事実である。(PT1)–(PT2)は無有限次元空間のなかでも特に巨大な空間の末尾事象を扱っており、確認するのがむづかしいと思われる条件だが、次節で説明するように、これを配置空間の確率測度 μ の空間についての末尾自明性から導出できる。

6.3. (PT1)–(PT2) の十分条件

前節に現れたパス空間の末尾自明性について十分条件を述べる。

定理 6.4 (O.-種村 [49]). (TT), (IFC), (AC), (NBJ) を仮定する。この時、 $\mu \circ \Gamma^{-1}$ -a.s. s に対して (PT1)–(PT2) が成立する。

このようにラベルパス空間の確率微分方程式の解の分布に関するラベルについての末尾自明性は、配置空間の分布 μ の空間の無限遠方に関する末尾自明性から従う。小さな無限次元空間 S の末尾自明性から大きな無限次元空間の末尾自明性を導出している。

行列式点過程は (TT) を満たす [48, 35, 6]。また、準 Gibbs 測度は、常に末尾自明な測度に分解できる。その上で、定理 6.1 を適用できる。実際、準 Gibbs 測度 μ に対して末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}(S)$ についての正則条件付き確率 $\mu(\cdot | \mathcal{T}(S))(s)$ についての分解

$$\mu(\cdot) = \int_S \mu(\cdot | \mathcal{T}(S))(s) \mu(ds) \quad (6.8)$$

を考えると、 $\mu(\cdot | \mathcal{T}(S))(s)$ は、 μ について殆どいたるところの s に対して、末尾自明となる [49]。 $\mathcal{T}(S)$ が可算決定でないから、この事実は非自明である。

条件 (A1)–(A5) に関しては、(A4) 以外は、 μ から (6.8) の分解で得た $\mu(\cdot | \mathcal{T}(S))(s)$ に遺伝する。(A4) のための現実的な十分条件は、1-相関関数の遠方での増大度で与えられるが、この条件も、Fubini の定理を介して $\mu(\cdot | \mathcal{T}(S))(s)$ に遺伝する。

以上から (TT) を満たさないときは、対応するアンラベル力学が末尾事象を時間発展に関して不変にする解が存在し、また、末尾事象が不変という条件の下で、一意解となる。この結果は末尾事象を変化させる解の存在を否定しないが、緩やかな条件の下で、末尾事象は不変となると予想する。また一般には、末尾事象が不変とならないアンラベル力学をもつ解が存在すると予想する。

(5.1) の解として、付随するアンラベル力学 X が μ -可逆なもの考えるので、この場合、(AC) は自明に成立する。(NBJ) はこの可逆性によって、解を Lyons-Zheng 分解の形のマルティンゲール分解をすることで得られる。この解が準正則 Dirichlet 形式に付随することは仮定しないが、無限次元確率微分方程式の表示 (5.1) と解のアンラベル力学が μ に対して可逆な Markov 半群となっていればマルティンゲール分解を実行できる。

7. 古典的確率解析と無限粒子系

前2章の結果を古典的確率解析の無限粒子系の確率解析への展開という視点から解説する。確率解析は1942年の伊藤清博士の仕事で創始され、ブラウン運動に基づく確率積分、確率微分方程式さらにブラウン運動の関数の変換法則である伊藤の公式など、今日欠くことができない確率解析の理論の原型が生まれた。その後、暫く停滞期があったが、1967年に国田-渡辺両氏によるマルティンゲールへの拡張が成されたことで息を吹き返し、山田-渡辺理論や田中洋氏の局所時間に対する伊藤-田中公式など確率微分方程式に関する諸結果、Stroock-Varadhan のマルティンゲール問題としての定式化、福島正俊氏が創始した対称マルコフ過程に対する Dirichlet 形式理論、Malliavin 解析、stochastic

flow など 60 年代から 80 年代にかけて華々しく発展した。その成果は 1975 年に出版された渡辺信三氏による「確率微分方程式」で日本に、更にそれに Malliavin 解析、多様体上の確率解析、stochastic flow など当時の最先端の話題を加えた形で、1981 年と 1989 年に出版された Ikeda-Watanabe 両氏による「Stochastic differential equations and diffusion processes」で日本から世界に広まった [20, 21]。確率解析は 90 年代の数理ファイナンスへの応用を契機に社会的にも広がり多種多様な教科書が現れたが、Ikeda-Watanabe の著作は世界に数多く出現した確率解析の専門書の原型となっている。また Dirichlet 形式論も 1975 年の「ディリクレ形式とマルコフ過程」で日本に、更に、それを拡張した 1980 年の「Dirichlet forms and Markov processes」で世界へ進出した [11, 12]。その後、福島-大島-竹田 3 氏の著作が生まれ [13, 14]、著しく発展している。この論説の古典的確率解析とはこれら 80 年代までの約 50 年間に得られた成果を指す。

古典理論を無限粒子系の確率解析学の文脈で如何に展開するか、山田-渡辺理論を例に説明する。これは前章の (IFC) を証明するために使われている方法である。

確率微分方程式の山田-渡辺理論とは、粗くいって確率微分方程式の強解の存在と一意性、および弱解の一意性を、弱解の存在とパスワイズ一意性から導くというものである。通常、確率微分方程式の強解の存在を証明するときには、(局所的にせよ) 係数の Lipschitz 連続性と有界性が必要になる。一方、解のパスワイズ一意性を示すだけならば、係数の Lipschitz 連続性だけで済むという利点がある。従って、弱解の存在の下で、山田-渡辺理論によって通常よりも緩やかな条件で強解の存在が得られる。

山田-渡辺理論の細部は難解である。しかし弱解とパスワイズ一意性から強解を導出するアイデアのポイントは簡明で、次のようなものである。

今、Polish 空間で定義された二つの確率変数が、(1) 独立、(2) $X = Y$ a.s. を満たすとする。この時 X と Y は殆ど至る所定数になる。これを念頭に、与えられた二つの弱解の分布を P と Q と置く。それぞれを初期条件 x とブラウン運動 B で条件つけたものを $P_{x,B}$ と $Q_{x,B}$ とおく。 $P_{x,B}$ と $Q_{x,B}$ の直積測度の下で、直積空間の成分 (X, Y) のそれぞれを B と組み合わせ (X, B) と (Y, B) を考えれば、それぞれ確率微分方程式の x を出発する弱解になる。従ってパスワイズ一意性から X と Y が殆ど至る所等しくなる。つまり、初期条件 x とブラウン運動 B のみの関数となり、強解である、というものである。但し、 (x, B) やその他に関する可測性は非自明でそのために繊細な議論が必要だが、本質はこのアイデアで尽きている。

6.1 章の有限次元確率微分方程式は、係数に \mathbf{X}^{m*} を含む。 \mathbf{X}^{m*} をランダム環境と思うと、ランダム環境の下での確率微分方程式となり、通常のものとは異なる。強解の概念を (\mathbf{s}, \mathbf{B}) の関数から $(\mathbf{x}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*})$ の関数へと一般化し、適宜主張を変更しても、山田-渡辺の結果の一部は依然成立する。一方、 \mathbf{X}^{m*} の挙動はアンラベル力学の Dirichlet 形式でコントロールできるため、干渉ポテンシャルが Ruelle クラスや対数関数の場合、(6.1) の係数が局所的に Lipschitz 連続であることがわかる。従って、この場合に強解の存在と一意性、つまり (IFC) が成立するというものである。

「対称性を持つ一つの無限次元は、両立性を持つ無限個の有限次元である」

というのが理論の基本思想であり

「たとえランダム環境でも、有限次元ならば古典的確率解析を実行できる」

というのがそこに込めた信念である。つまり、問題に応じた有限次元のスキームを考え、古典的確率解析の結果の拡張をランダム環境を持つ対象（確率微分方程式）まで拡張すれば、両立性によって無限粒子系の確率微分方程式まで到達できる。これが理論の骨子である。

第一理論の弱解の構成定理（定理 5.4）では、 m ラベル力学を記述する Dirichlet 空間のスキームを考えた。第二理論の強解の存在とパスワイズ一意性定理（定理 6.3）では、ランダム環境を持つ有限次元確率微分方程式のスキームを考えている。このように、両立性を持つ無限個の有限次元（もしくは良い無限次元）のスキームは、問題によって異なる。

この方針によって、一つの粒子に対する古典的確率解析、つまり有限次元で実行した確率解析の対応物を、無限粒子系の世界でも実行できると考えている。実際、以上の二つの問題以外にも、例えば無限粒子系の空間における stochastic flow の構成、非平衡解、確率力学の確率分布の初期条件に関する「滑らかさ」、アンラベル力学のエルゴード性や空間のエルゴード分解などへの応用が考えられる。

8. Dirichlet 形式の二つの近似列と一意性

$S_R = \{s \in S; |s| \leq R\}$ とおく。 S_R 内の粒子のエネルギーのみ拾う 2 次形式を考える。

$$\mathbb{D}_R^a[f, g] = \frac{1}{2} \sum_{s_i \in S_R} a(s_i, s^{i\heartsuit}) \frac{\partial \check{f}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \check{g}}{\partial s_i}.$$

これから双線形形式を

$$\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}(f, g) = \int_S \mathbb{D}_R^a[f, g] d\mu$$

と与える。(A1) より $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ は $L^2(S, \mu)$ の上で可閉なので、その閉包を $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ とおく。 $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ は単調増大であり、その極限の閉形式を $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ とおく。 $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ は $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ へリゾルベント収束する。

次に $\pi_R^c(s) = s(\cdot \cap S_R^c)$ とする。定理 5.1 の直前で与えた関数空間 $\mathcal{D}_\circ^{a,\mu}$ に対して、

$$\mathcal{D}_{\circ,R}^{a,\mu} = \{f \in \mathcal{D}_\circ^{a,\mu}; f \text{ は } \sigma[\pi_R^c]\text{-可測}\}$$

とおく。 $f \in \mathcal{D}_\circ^{a,\mu}$ なので、定義から f が S 上の連続関数になることを考慮すると、 $\sigma[\pi_R^c]$ -可測から S_R 内の配置 $\pi_R(s) = \sum_{s_i \in S_R} \delta_{s_i}$ の中の（一般には複数の）粒子 s_j が境界 ∂S に近づく時、 $f(s)$ の極限值は外の配置 $s' = \sum_{s_i \notin S_R} \delta_{s_i}$ のみによる定数に収束する。

定義から、 $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu}) \leq (\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}_{\circ,R}^{a,\mu})$ だが、特に $\mathcal{D}_\circ^{a,\mu} \supset \mathcal{D}_{\circ,R}^{a,\mu}$ かつすべての $f \in \mathcal{D}_{\circ,R}^{a,\mu}$ に対して $\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}(f, f) = \mathcal{E}^{a,\mu}(f, f)$ となる。従って、 $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ の可閉性から、 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}_{\circ,R}^{a,\mu})$ の $L^2(S, \mu)$ 上での可閉性が従う。そこで、その閉包を $(\mathcal{E}_R^{a,\mu}, \mathcal{D}_R^{a,\mu})$ とおく。 $(\mathcal{E}_R^{a,\mu}, \mathcal{D}_R^{a,\mu})$ は R に対して単調減少で、 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ へリゾルベント収束する。

構成から、 $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu}) \leq (\mathcal{E}_R^{a,\mu}, \mathcal{D}_R^{a,\mu})$ である。その結果、次が成立する。

$$(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu}) \leq (\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu}).$$

これがいつ等式

$$(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu}) = (\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu}) \tag{8.1}$$

となるかを考えたい。尚、この等式は9章で重要な働きをする。

(8.1)の十分条件は[30]で与えられた。この条件はこの論説のGAFを除くすべての例を含む広い範囲で成り立つ。以下、[30]に従い(8.1)の証明のアイデアを説明する。

$L^2(S, \mu)$ 上のDirichlet形式とは、Markov性を持つ閉双線形式だが、その定義域が正則、より一般に準正則という性質を満たせばDirichlet形式に付随するMarkov過程が存在する[14, 36]。このMarkov過程は空間の各点を出発する確率測度の族である。定常分布 μ から出発するMarkov過程の構成は、Markov半群の存在から自明だが、更に各点を出発する確率過程の存在は非自明で(準)正則性はそれを保証する。一旦、準正則Dirichlet形式であることがわかると、福島分解を始めとする確率解析を適用できる。定理5.1の証明の中で $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ が準正則Dirichlet形式となることが示されており、それによって確率解析を適用することが定理5.4で無限次元確率微分方程式(5.1)を解く鍵となっている。

一方、 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ はDirichlet形式だが、準正則か否かはそのままではわからない。従って $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ の時の手法で、 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ が(5.1)の解を与えるかは不明である。

半面、 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ にはMarkov半群が対応しており定常Markov過程を構成できる。[30]では、係数に対する緩やかな仮定の下で、上述の $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ の $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ への収束を利用して、この定常Markov過程が無限次元確率微分方程式(5.1)の解となっていることを、まず証明した。

ここで $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ は正則Dirichlet形式であり、粒子は境界 ∂S_R で反射壁境界条件を満たす。そのことから、有限系で確率微分方程式を満たすことが分かる。更に極限移行を先述のリゾルベント収束から実行することで(5.1)の解であることがわかる。

このように、Dirichlet形式 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ と $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ に付随したMarkov半群に、(5.1)の解となる確率過程がそれぞれ付随している。従って、殆ど至る所の点を出発する(5.1)の解の一意性から、これら二つの半群の一致、更にはDirichlet形式の一致(8.1)を導出できる。

無限次元確率微分方程式の解の一意性から、Dirichlet形式の一意性(8.1)を導くというアイデアは、種村氏による[60]。本来、(8.1)は確率微分方程式の問題ではなく、Dirichlet形式の問題なのだが直接的な証明を筆者は知らない。

有界領域 S_R の粒子の挙動についてさらに解説を加える。

上述のように $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ は S_R で反射壁境界条件を課したDirichlet形式となっている。 S_R の外の粒子は動かない。更に外部の粒子は干渉ポテンシャルによって内部の粒子の挙動に影響を与える。内部の粒子にとってはこれは自由ポテンシャルによる効果となっている。また、境界では反射する。したがって確率微分方程式には、反射条件からくる境界の局所時間が現れる。

一方、 $(\mathcal{E}_R^{a,\mu}, \mathcal{D}_R^{a,\mu})$ は正則Dirichlet形式ではない。従ってそのままでは、それに付随したMarkov過程を構成できない。配置空間としての境界に同値関係を入れることで、拡散過程を構成できる。しかしともかく、そのままではMarkov過程を対応させることができない。話はうまくできていて、 $(\mathcal{E}_R^{a,\mu}, \mathcal{D}_R^{a,\mu})$ の極限 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ は直接的に、準正則性が証明され、付随する拡散過程を構成できる。更に準正則性から確率解析を適用できて、福島分解を用いることでこの拡散過程が無限次元確率微分方程式(5.1)を満たすことを示せるのである。

以上のように、一般に二つの自然なDirichlet形式 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ と $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ が存在し、相異なる有限粒子系の極限となっている。

尚, Lang[32] が初めて無限次元確率微分方程式 (5.1) を解いた時, そのために彼が採用した有限粒子系は $(\underline{\mathcal{E}}_R^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}_R^{a,\mu})$ に付随するものである. したがって, Lang の解は, $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ に付随している. $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ は最も自然な Dirichlet 形式と思われるが, 無限次元確率微分方程式 (5.1) との絡みでは [41] で初めて導入され, $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu})$ と $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ の違いが峻別された.

9. ランダム行列の力学的普遍性

3章でガウス型ランダム行列の固有値からなる点過程の $N \rightarrow \infty$ での極限を述べたが, これに関して2000年以降ランダム行列の普遍性が盛んに研究されてきた. これには大別して二つの定式化があり, 一つは行列の成分をガウス分布以外に一般化にすること, もう一つは対数ガスにおいて自由ポテンシャルを x^2 から一般化することである. 数多くの成果があり, 非常に一般的に証明されている [61, 4]. 前者の定式化は古典的な中心極限定理を, 独立な成分を持つランダム行列の固有値を通じて強い相関がある場合に拡張したものである. また, 後者も相互作用ポテンシャルである対数関数の強い長距離相互作用のため, 例え自由ポテンシャルの変形といえども非自明で新奇な現象を生み出している.

Wigner の半円則に現れるノンランダムな確率測度は, ちょうど大数の法則における平均値の対応物であり, モデルごとに様々なものが現れる. 一方, それをリスケールした点過程のレベルでの収束先は, マクロなポジション, つまり, bulk, soft edge, hard edge などに依じて, 1次元ならば, sine, Airy, Bessel 点過程, 2次元ならば, bulk で Ginibre 点過程が出現するもので, モデルの詳細によらないという普遍性が出現する.

上述の結果は, 相関関数の弱収束を証明している. 古典的な中心極限定理と同等のレベルの収束概念である. 一方, より強く相関関数の強収束 (局所一様収束) を示した結果もいろいろと知られている. これは, 古典的中心極限定理において, 「局所中心極限定理」に対応するレベルである. 次に確率力学版について述べる. (8.1) で述べた等式 $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu}) = (\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ が緩やかな条件の下で得られることを思い出す.

定理 9.1 (河本-O.[29]). $(\underline{\mathcal{E}}^{a,\mu}, \underline{\mathcal{D}}^{a,\mu}) = (\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ とする. さらに, μ^N の相関関数が μ の相関関数に局所一様収束し, かつ, 極限の相関関数の零点の容量がゼロとする. このとき N 粒子系の確率力学は極限の確率力学にパス空間で弱収束する.

定理 9.1 の証明のアイデアは, [41] で構成した Dirichlet 形式の二つの近似列 (その一部は既に8章に現れたが) に対して, 桑江-塩谷 [31] による一般化された Mosco 収束の概念を使用する, というものである.

定理 9.1 はランダム行列に限ったものではなく, 複雑な有限粒子系近似 μ^N の例に広範囲に適用できる. 特に, 3章の2つの収束定理は, この結果から直ちに導出できる.

応用例を2つあげる. 定理 9.1 に必要な, 相関関数の強収束はこれらの例では知られている. また極限の相関関数に関する容量の条件は, [43, 22] の結果から従う.

9.1. Airy 干渉ブラウン運動の普遍性

$l \in \mathbb{N}$, $\kappa_{2l} > 0$, $V(x) = \sum_{i=0}^{2l} \kappa_i x^i$ とする. 点過程 $\mu_{\text{Ai},V}^N$ を次のように定義する.

$$\mu_{\text{Ai},V}^N(ds^N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-NV(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N \left(1 + \frac{s_k}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}\right) + d_N))) ds^N.$$

ここで α_N, c_N, d_N は V と N のみによる定数である [8]. N 次元確率微分方程式は,

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2i}} c_N}{2\alpha_N} V' \left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2i}}} \left\{ c_N \left(1 + \frac{X_t^{N,i}}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}} \right) + d_N \right\} \right) dt.$$

この解は Airy 干渉ブラウン運動 (2.7) に $N \rightarrow \infty$ で収束する.

9.2. Ginibre 干渉ブラウン運動の普遍性 (「強非 Hermite」モデル)

定数 $\gamma \geq 0, K_p \in \mathbb{R}, \tau \in [0, 1)$ に対し N 次正規行列の空間 $\mathcal{J}(N)$ 上の確率測度

$$\sigma(J) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{N}{1-\tau^2} \text{Tr}(JJ^* - \frac{\tau}{2}(J^2 + J^{*2})) - \gamma(\text{Tr}JJ^* - NK_p)^2 \right\}$$

を考える. この時, 固有値の分布密度は次の関数の定数倍となる.

$$\prod_{i < j}^N |z_i - z_j|^2 \times \exp \left\{ -\frac{N}{1-\tau^2} \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^N (z_i^2 + \bar{z}_i^2) \right) - \gamma \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 - NK_p \right)^2 \right\}.$$

$c_1, c_2, c_3 > 0$ は K_p, γ, τ に依存する定数, $E = \{z \in \mathbb{C}; c_1(\Re z)^2 + c_2(\Im z)^2 < 1\}$ とする.

補題 9.2 ([1, Theorem 1]). $\zeta \in E, k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N^1(\zeta) &= \frac{c_3}{\pi} 1_E(\zeta), \\ \frac{1}{(c_3 N)^k} \rho_N^k \left(\zeta + \frac{z_1}{\sqrt{c_3 N}}, \dots, \zeta + \frac{z_k}{\sqrt{c_3 N}} \right) &= \rho_{\text{gin}}^k(z_1, \dots, z_k) + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

N 粒子系の確率微分方程式を計算すると, $i = 1, \dots, N$ に対して

$$\begin{aligned} dX_t^{N,i} &= dB_t^i + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{j \neq i}^N \frac{2(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2} \right) - \frac{\tau N}{1-\tau^2} \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right) \frac{1}{\sqrt{c_3 N}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau N}{1-\tau^2} \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right)^\dagger \frac{1}{\sqrt{c_3 N}} - \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right) \frac{2\gamma}{\sqrt{c_3 N}} \left\{ \sum_{k=1}^N \left| \zeta + \frac{X_t^{N,k}}{\sqrt{c_3 N}} \right|^2 - NK_p \right\} \right\} dt. \end{aligned}$$

ここで $(x, y)^\dagger = (x, -y) \in \mathbb{R}^2$. $N \rightarrow \infty$ で Ginibre 干渉ブラウン運動 (2.9) に収束する.

10. Ginibre と GAF と渦の方程式

10.1. GAF (Gaussian analytic function)

平面 GAF というガウス確率変数を係数に持つ解析関数 F_{plane} を考える [19, 16, 15].

$$F_{\text{plane}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k!}} z^k.$$

ここで $\{\xi_k\}$ は独立同分布, ξ_k の分布は $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz$ である.

μ_{GAF} を F_{plane} の零点からなる \mathbb{C} の点過程とする. μ_{GAF} は, 平行移動不変かつ回転不変で, Ginibre 点過程に大変よく似ているが, より剛性が強いことが知られている. 実際, $S_r = \{|x| \leq r\}$ の外側を条件つけると, 中の粒子の平均が決定される. μ_{GAF} は準 Gibbs 測度ではないが, 点過程の条件付き分布の 1 粒子分退化した密度の存在が知られ

ている [15]. そこで第一理論を拡張することで, Dirichlet 形式の可閉性がいえ拡散過程を構成できる. しかし, μ_{GAF} の「対数微分」は存在は言えるが「よい表現」はない. 少なくとも, 2体の干渉ポテンシャルでは簡単に記述できないと思われる.

ランダムな解析関数は様々な状況で考えられる. その零点や極として構成した点過程の確率力学を本論説の手法を用いて構成し研究することは興味深いと思われる.

10.2. 渦の方程式

最後にまだ解けていない無限次元確率微分方程式を紹介する. 粘性のある平面に無限個の渦が運動しているとする. Ginibre に合わせるため, すべて同じ強さの同じ向きの渦とする. $\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ と書く. 定数 (粘性と渦度) を適当に選べば,

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i} \frac{(X_t^i - X_t^j)^\dagger}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

「†」以外は Ginibre 干渉ブラウン運動と同じである. しかし背後にある幾何学は非常に異なり, また, 力学的にも, これは歪対称な運動を記述する.

渦の個数が有限個の場合は, どんな種類の渦度を持つ場合でも, 対応する熱方程式を解くことで拡散過程を構成し, さらにそれを用いて確率微分方程式を解ける. これには一般化された発散形式を用いる [38, 39, 40].

参考文献

- [1] Akemann, G., Cikovic, M., Vender, M., *Universality at weak and strong non-Hermiticity beyond the elliptic Ginibre ensemble*, available on arXiv.
- [2] Albeverio, S., Kondratiev, Yu. G., Röckner, M., *Analysis and geometry on configuration space: the Gibbsian case.*, J. Funct. Anal. **157**, 242-291 (1998).
- [3] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 118, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR 2760897
- [4] P. Bourgade, L. Erdős, and H.-T. Yau, *Universality of general β -ensembles*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 6, 1127–1190. MR 3192527
- [5] A.I. Bufetov, A. Dymov, and H. Osada, *The logarithmic derivative for point processes with equivalent palm*, J. Math. Soc. Japan (to appear).
- [6] A.I. Bufetov, Y. Qiu, and A. Shamov, *Kernels of conditional measures and the proof of the Lyons-Peres conjecture* (preprint)
- [7] I. Corwin and A. Hammond, *Brownian Gibbs property for Airy line ensembles*, Invent. Math. **195** (2014), no. 2, 441–508. MR 3152753
- [8] Deift, P., Gioev, D., *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 867-910.
- [9] P. J. Forrester, *Log-gases and random matrices*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 34, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010. MR 2641363
- [10] J. Fritz, *Gradient dynamics of infinite point systems*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 2, 478–514. MR 885128
- [11] 福島正俊, ディリクレ形式とマルコフ過程, 紀伊國屋, 1975.
- [12] M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, vol. 23, North-Holland/Kodansha, 1980.
- [13] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, extended ed., De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 19, 1st ed. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994. MR 2778606

- [14] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, extended ed., De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 19, 2nd ed. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011. MR 2778606
- [15] S. Ghosh, *Rigidity and tolerance in gaussian zeroes and ginibre eigenvalues: quantitative estimates*, (preprint) arXiv:1211.3506 [math.PR].
- [16] S. Ghosh and Y. Peres, *Rigidity and tolerance in point processes: Gaussian zeros and Ginibre eigenvalues*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 10, 1789–1858. MR 3679882
- [17] J. Hägg, *Local Gaussian fluctuations in the Airy and discrete PNG processes*, Ann. Probab. **36** (2008), no. 3, 1059–1092. MR 2408583
- [18] R. Honda and H. Osada, *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to Bessel random point fields*, Stochastic Process. Appl. **125** (2015), no. 10, 3801–3822. MR 3373304
- [19] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virág, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, University Lecture Series, vol. 51, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. MR 2552864
- [20] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, second ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 24, 1st ed. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1981. MR 1011252
- [21] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, second ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 24, 2nd ed. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989. MR 1011252
- [22] K. Inukai, *Collision or non-collision problem for interacting Brownian particles*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82** (2006), no. 4, 66–70. MR 2222214
- [23] M. Katori and H. Tanemura, *Noncolliding Brownian motion and determinantal processes*, J. Stat. Phys. **129** (2007), no. 5-6, 1233–1277. MR 2363394
- [24] M. Katori and H. Tanemura, *Zeros of Airy function and relaxation process*, J. Stat. Phys. **136** (2009), no. 6, 1177–1204. MR 2550400
- [25] M. Katori and H. Tanemura, *Non-equilibrium dynamics of Dyson’s model with an infinite number of particles*, Comm. Math. Phys. **293** (2010), no. 2, 469–497. MR 2563791
- [26] M. Katori and H. Tanemura, *Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels*, Markov Process. Related Fields **17** (2011), no. 4, 541–580. MR 2918121
- [27] Y. Kawamoto and H. Osada, *Dynamical bulk scaling limit of Gaussian unitary ensembles and stochastic differential equation gaps*, J Theor Probab (2018). <https://doi.org/10.1007/s10959-018-0816-2>
- [28] Y. Kawamoto and H. Osada, *Finite-particle approximations for interacting brownian particles with logarithmic potentials*, J. Math. Soc. Japan, **70-3** (2018), 921-952.
- [29] Y. Kawamoto and H. Osada, *Dynamical universality for random matrices*, (preprint).
- [30] Y. Kawamoto, H. Osada and H. Tanemura, *Uniqueness of Dirichlet forms related to infinite systems of interacting Brownian motions*, (preprint) arXiv:1711.07796v2.
- [31] Kuwae, K., Shioya, T., *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11**, (2003), no. 4, 599–673.
- [32] R. Lang, *Unendlich-dimensionale wienerprocesse mit wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977), 55–72.
- [33] R.Lang, *Unendlich-dimensionale wienerprocesse mit wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978), 277–299.
- [34] R. Lyons, *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 167–212. MR 2031202

- [35] R. Lyons, *A note on tail triviality for determinantal point processes*, Electron. Commun. Probab. **23** (2018), paper no. 72, 3 pp
- [36] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992. MR 1214375
- [37] M. L. Mehta, *Random matrices*, third ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. MR 2129906
- [38] H. Osada, *Diffusion processes with generators of generalized divergence form* Journal of Mathematics of Kyoto University, 1987, 27(4), 597–619, DOI:10.1215/kjm/1250520601.
- [39] H. Osada, *A stochastic differential equation arising from the vortex problem* Proceedings of the Japan Academy Series A: Mathematical Sciences, 1985, 61(10), 333–336. DOI:10.3792/pjaa.61.333
- [40] H. Osada, *Propagation of chaos for the two-dimensional Navier-Stokes equation* Probabilistic methods in mathematical physics (Katata/Kyoto, 1985), 1987, 303–334.
- [41] H. Osada, *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Comm. Math. Phys. **176** (1996), no. 1, 117–131. MR 1372820
- [42] H. Osada, *Interacting Brownian motions with measurable potentials*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **74** (1998), no. 1, 10–12. MR 1617695
- [43] H. Osada, *Non-collision and collision properties of Dyson’s model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields*, Stochastic analysis on large scale interacting systems, Adv. Stud. Pure Math., vol. 39, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 325–343. MR 2073339
- [44] H. Osada, *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), no. 3, 867–894. MR 2648065
- [45] H. Osada, *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probab. Theory Related Fields **153** (2012), no. 3-4, 471–509. MR 2948684
- [46] H. Osada, *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 1, 1–49. MR 3059192
- [47] H. Osada, *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Process. Appl. **123** (2013), no. 3, 813–838. MR 3005007
- [48] H. Osada and S. Osada, *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and tail triviality*, J. Stat. Phys. **170** (2018), 421–435. MR 3744393
- [49] H. Osada and H. Tanemura, *Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ -fields*, (preprint) [arXiv:1412.8674 \[math.PR\]](https://arxiv.org/abs/1412.8674).
- [50] H. Osada and H. Tanemura, *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from airy random point fields*, (preprint) [arXiv:1408.0632 \[math.PR\]](https://arxiv.org/abs/1408.0632).
- [51] H. Osada and H. Tanemura, *Cores of Dirichlet forms related to random matrix theory*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **90** (2014), no. 10, 145–150. MR 3290438
- [52] H. Osada and H. Tanemura, *Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels*, Stochastic Process. Appl. **126** (2016), no. 1, 186–208. MR 3426516
- [53] Y. Peres, B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process* Acta Math. **194** (2005), 1–35.
- [54] D. Ruelle, *Statistical Mechanics. Rigorous results*, New York: Benjamin, 1969.
- [55] D. Ruelle, *Superstable interactions in classical statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **18** (1970), 127–159. MR 0266565
- [56] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinants. I. Fermion, Poisson and boson point processes*, J. Funct. Anal. **205** (2003),

- no. 2, 414–463. MR 2018415
- [57] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5(335), 107–160. MR 1799012
- [58] H. Spohn, *Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model*, Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986), IMA Vol. Math. Appl., vol. 9, Springer, New York, 1987, pp. 151–179. MR 914993
- [59] H. Tanemura, *A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in \mathbf{R}^d* , Probab. Theory Related Fields **104** (1996), no. 3, 399–426. MR 1376344
- [60] H. Tanemura, *Uniqueness of Dirichlet forms associated with systems of infinitely many Brownian balls in \mathbf{R}^d* , Probab. Theory Related Fields **109** (1997), no. 2, 275–299. MR 1477652
- [61] T. Tao and V. Vu, *Random matrices: universality of local eigenvalue statistics*, Acta Math. **206** (2011), no. 1, 127–204. MR 2784665
- [62] L.-C. Tsai, *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Related Fields **166** (2016), no. 3-4, 801–850. MR 3568040
- [63] Yoshida, M., *Construction of infinite-dimensional diffusion processes through Dirichlet forms*, Probability Theory and Related Fields, **106**, 265-297 (1996).