局在パターンの粒子的ダイナミクス

栄 伸一郎
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

反応拡散方程式系はさまざまな現象に見られる時・空間パターンの形成に関する問題を研究するために, これまで広く扱われてきたモデル方程式の一つである.

本講演では空間次元が 2 次元の問題を考え, 図 1 のような, スポット状に局在したパターンを持つ解のさまざまな運動を考える. このようにスポット状に局在したパターンは, さま

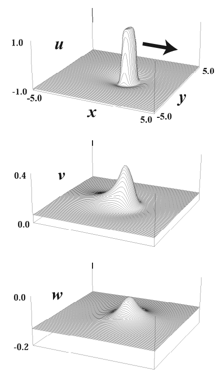

図 1: スポット状に局在したパターン.

ざまな現象において現れることが知られており, たとえば, 放電現象 [1] や水面に浮かべた樟脳片の運動 ([2], [3]) などが対応すると考えられている. 講演では, そうしたスポットパターンを有するいくつかの現象とモデル方程式を紹介した上で, それを含む形でスポットパターンの運動を解析するための一般理論を紹介する予定である. 結果のみを記すと以下のようになる:

一般的な反応拡散方程式系

$$\boldsymbol{u}_t = D\Delta \boldsymbol{u} + F(\boldsymbol{u}),\ t > 0,\ x \in \boldsymbol{R}^2$$

が安定なスポット解 $S(x)$ を持つとする. 適当な条件の下で 2 つのスポット解, $S(x - P_1(t))$,

$S(x-P_2(t))$ の相互作用を含む運動は, $P_j, \zeta_j \in \boldsymbol{R}^2$ として

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \zeta_1 - \dfrac{M_0}{\sqrt{h}} e^{-\alpha h} \boldsymbol{e}, \\ \dot{\zeta}_1 &= -\nabla W(\zeta_1) - \dfrac{\overline{M}_0}{\sqrt{h}} e^{-\alpha h} \boldsymbol{e}, \\ \dot{P}_2 &= \zeta_2 + \dfrac{M_0}{\sqrt{h}} e^{-\alpha h} \boldsymbol{e}, \\ \dot{\zeta}_2 &= -\nabla W(\zeta_2) + \dfrac{\overline{M}_0}{\sqrt{h}} e^{-\alpha h} \boldsymbol{e} \end{cases}$$

で与えられる．ここで M_0, $\overline{M}_0$, α は正定数, $h := |P_2 - P_1|$, $\boldsymbol{e} = \frac{1}{h}(P_2 - P_1)$ である．また $\zeta \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $W(\zeta) := \frac{1}{4}M_1|\zeta|^4 + \frac{1}{2}M_2\eta|\zeta|^2$, M_1, M_2 は正定数である．この帰着された常微分方程式系を解析することにより, たとえば図 2 のようなスポット解の反射的相互作用を理論的に扱うことができる．詳しい解析はたとえば [4] に書かれている．

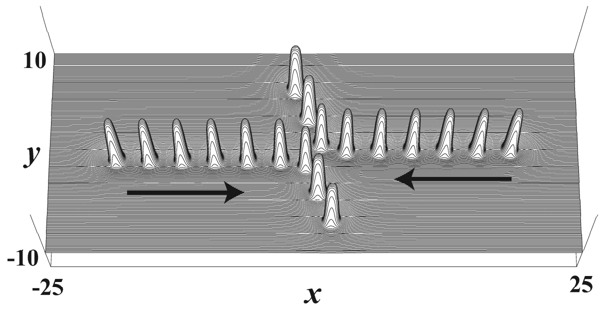

図 2: スポットパターンの相互作用

参考文献

[1] Y. Astrov and H.-G. Purwins, Plasma spots in a gas discharge system: Birth, scattering and formation of molecules, Phys. Lett. A 283 (2001), 349 - 354.

[2] Xinfu Chen, S.-I. Ei and M. Mimura, Self–motion of camphor discs -model and analysis-, networks and heterogeneous media Volume 4, Number 1 (2009), 1-18.

[3] M. Nagayama, S. Nakata, Y. Doi and Y. Hayashima, A theoretical and experimental study on the unidirectional motion of a camphor disk, Physica D, 194 (2004), 151 - 165.

[4] 三村, 上山, 西浦, 長山, 栄, パターン形成とダイナミクス, 東大出版会, 2006, 149p.