

判別式

9大6本松数理 吉田 正章*

平成19年7月12日

概要

2次式の判別式は高等学校で学ぶ。3次式の判別式は大学の数学ではよく出てくる。4次式の判別式も分野によっては馴染み深い。5次以上のものは、少なくとも私は、実際に扱ったことがない；勿論存在はする。

1 2次式の判別式

t に関する2次式

$$F := t^2 + at + b$$

の判別式は

$$D := a^2 - 4b$$

と記憶している人は多いと思う。2次式や2次方程式に関する問題が出ると、何しろこの判別式が役に立つことは間違いない。今回は、受験技術としてでなく、数学としてこれを考えてみる。

判別式とは何であろうか。2次方程式 $F = 0$ の2根（最近は「解」と言うらしい、その内また変わるだろう）が等しいときに0になり、そうでないときは0にならない、係数 a, b に関する多項式（がもしあればそれ）を判別式と呼ぼう。判別式には、各数学者各々の思い入れがあるだろうが、今回はこれで行く。

1.1 2根の差

定義通りやってみよう。2次方程式 $F = 0$ の2根を α, β と置く。それらが等しいときに0になり、そうでないときは0にならないものが欲しいなら、差

$$\alpha - \beta$$

でいいではないか、と思われるかも知れないが、惜しいかな係数 a, b に関する多項式にならないのである；理由は直ぐ説明する。

*判別式/stlasadisc.tex, cusp.tex, toiletA.eps, toiletB.eps, fromAtoB.tex

そこで、一寸回り道をして、2次方程式 $F = 0$ の2根と F の係数の関係を調べる。
2根 α, β を持つ2次式は

$$(t - \alpha)(t - \beta) = t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta$$

だから、 $F = t^2 + at + b$ と係数比較して

$$G: \alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$$

を得る。これを根と係数の関係として記憶しておられる方も多いでしょう。2次方程式 $F = 0$ は、 $F(t) = 0$ を満すような t を2つ求めよということで、その2つを α, β と呼べばそれは、それらに関する「連立方程式」 G の解を求めよということと全く同値です。くだいですが、覚えておいてください：

$$t \text{ に関する2次方程式 } F = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta \text{ に関する連立方程式 } G.$$

根と係数の関係を使うと、 α と β をひっくり返しても、 a や b は変わらないことが分かる。一方勿論 $\alpha - \beta$ は符号が変わる。だから、 $\alpha - \beta$ が a や b を使って書ける筈が無いのである。さて、 $(\alpha - \beta)^2$ ならいいことが、次の変形で分かる：

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b = D.$$

この変形の仕方を思いつかないといけないところに、この方法の欠点がある。こんなこと誰でも思いつくではないかと言われるかも知れないが、そう簡単なことではないことは後から分かる。

1.2 平行移動あるいは平方完成

2根が等しいか否かは、変数変換 $t \rightarrow t + c$ をしても変わらないから、定数 c を巧く選んで式を簡単にしよう、と言うのが発想の元である。このことは $s = F(t)$ のグラフの軸を (t, s) -平面の s 軸（直線 $t = 0$ のこと）に重なるようにグラフを平行移動すると言っても同じことである。式変形ではそれは、平方完成として知られている：

$$t^2 + at + b = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}.$$

2根の平均（中点）が0になるように移動したと言うわけである。

1.3 近代兵器「微分」の活用

点 $t = c$ での F の微分係数 $F'(c)$ とは $s = F(t)$ のグラフ上の点 $(c, F(c))$ におけるグラフの接線の傾きであると習われたと思う。そのことを使うと「 c が $F = 0$ の重根である」と「点 $(c, 0)$ でそのグラフは t -軸に接する」と「 $F(c) = 0, F'(c) = 0$ 」は同値である。であるから、「 $F = 0$ に重根があるか否か」は「 c に関する連立方程式

$$R: \quad F(c) = 0, \quad F'(c) = 0$$

に解があるか否か」と同値である。この場合は連立方程式は

$$R: \quad c^2 + ac + b = 0, \quad 2c + a = 0$$

となる。もしこの連立方程式に解があれば、二番目の方程式の解 $c = -a/2$ が一番目も満たさなくてはならないので、

$$0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b = -\frac{D}{4}$$

でなくてはならない。このようにして D の形が求まる。手続きだけ要約すれば

$$2 \text{ 式 } \quad F(t) = 0, \quad F'(t) = 0 \quad \text{から } t \text{ を消去する}$$

である。背後にある理屈を抜きにすれば、操作としては簡単である。

前の2つでは (F の係数が実数の時に) 判別式 D の正負で実根の数まで分かったのに、このやり方では分からない、 $\pm D$ しか求まらないのが欠点である。

2 3次式の判別式

t に関する3次式

$$F := t^3 + pt^2 + qt + r$$

の判別式を考えよう。3次方程式 $F = 0$ の3根のうちに重なりがあれば0になり、そうでないときは0にならない、係数 p, q, r に関する多項式 (がもしあればそれ) を判別式と呼ぼう。ここまでは前節と同様である。

2.1 3根間の差

定義通りやってみよう。3次方程式 $F = 0$ の3根を α, β, γ と置く。それらのうちの何れか2つが等しいときに0になり、そうでないときは0にならないものが欲しいなら、差の積

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

でいいではないか、と思われるかも知れないが、惜しいかな係数 p, q, r に関する多項式にならない; 理由は直ぐ述べる。

そこで、一寸回り道をして、3次方程式 $F = 0$ の3根と F の係数の関係を調べる。3根 α, β, γ を持つ3次式は

$$(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma) = t^3 - (\alpha + \beta + \gamma)t^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)t - \alpha\beta\gamma$$

だから、 $F = t^3 + pt^2 + qt + r$ と係数比較して

$$G: \quad \alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$$

を得る。これを根と係数の関係と言う。3次方程式 $F = 0$ は、 $F(t) = 0$ を満すような t を3つ求めよということで、その2つを α, β, γ と呼べばそれは、それらに関する「連立方程式」 G の解を求めよということと全く同値です。くだいですが、覚えておいてください：

$$t \text{ に関する3次方程式 } F = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma \text{ に関する連立方程式 } G.$$

根と係数の関係を使うと、3根の内の二つ例えば α と β をひっくり返しても、 p, q や r は変わらないことが分かる。一方 $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ は符号が変わる。だから、この3項の積が p, q や r を使って書ける筈が無いのである。しかし、実はその自乗

$$D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

ならいいことが分かる(理由は難しいので略)。この場合だけに通用する小賢しい方法は何通りも知られている。また「すべての対称式は基本対称式の多項式として書ける」という有名な定理の証明を追うという「正道」もある；しかし、何れにせよ、上の式は高が α, β, γ の6次式であるが、ちょこちょこっと計算して p, q, r の多項式と言う具合には行かない代物である。やり方が間違っているわけでない。後で続きをやる。

2.2 平行移動あるいは立方完成

3根に重なりがあるか否かは、変数変換 $t \rightarrow t + c$ をしても変わらないから、定数 c を巧く選んで式を簡単にしよう、と言うのが発想の元である。3根の平均が0になるように移動する。式変形ではそれは、立方完成として知られている：

$$t^3 + pt^2 + qt + r = \left(t + \frac{p}{3}\right)^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)t - \frac{p^3}{27} + r.$$

立方の残りの項に t が入っているから、これでは未だ判別式は求まっていないが、一歩前進である。以後、 F には既にこの変換がしてあるとして

$$F = t^3 + qt + r \quad \text{即ち} \quad p = 0$$

とする。

2.3 近代兵器「微分」の活用

理屈は前節で述べた。手続きは

$$2 \text{ 式 } F(t) = 0, \quad F'(t) = 0 \quad \text{から } t \text{ を消去する}$$

であった。この場合は

$$t^3 + qt + r = 0, \quad 3t^2 + q = 0$$

であるから、第二式より $t^2 = -q/3$ を第一式に (部分的に) 入れると

$$0 = -\frac{q}{3}t + qt + r = \frac{2}{3}qt + r \quad \text{だから} \quad t = \frac{3r}{2q}.$$

これを第二式に代入すると

$$4q^3 + 27r^2 = 0$$

となる。この式が (定数倍を除いて) 判別式の筈である。注意: 根号を使えば、第二式から t は解けるが、そういう気持ちの悪いことはしないほうがよい。

ここで、途中で止めた前々小節に戻る。何が難しかったかと言えば

$$D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

が p, q, r のどんな式になるか見当がつかなかったからである。今は状況が違う; D は $4q^3 + 27r^2$ の定数倍になるらしいのである。 q, r に

$$q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad r = -\alpha\beta\gamma$$

を代入して $\alpha + \beta + \gamma = 0$ を使って係数を比較すると、直ちに

$$D = -(4q^3 + 27r^2)$$

が分かる。 $D > 0$ なら実根が 3 個、 $D < 0$ なら実根が一つであることが「根を実際求めないで、係数だけで分かる」のである。

2.4 判別式の図

(q, r) -平面に曲線 $D = 4q^3 + 27r^2 = 0$ を描く。多分皆さんはこのような式の定義する曲線を描いた事はないのではないかと思います。一般に、曲線を表すのに、「曲線上の点が満たす式 (方程式と言う) を与える」やり方と「径数 (parameter) 表示を与える」やり方と 2 通りある。どちらも長所と短所がある。一方の表示から他方の表示を導くのは、多くの場合、実行困難である。この場合、径数表示は、

$$(t - \alpha)^2(t - \beta), \quad 2\alpha + \beta = 0$$

を展開して $F = t^3 + qt + r$ と係数比較して

$$q = -3\alpha^2, \quad r = -2\alpha^3$$

と得られるから、 α に数を何個か代入して行けば絵が描ける: それが図 1 である。 α は実数である。

これを機会に「実数係数の方程式 (何次でもいい) が実数ではない解 α を持てば、その複素共役 $\bar{\alpha}$ も解である」という重要なことを思い出そう。ここで、複素数 $z = x + iy$ の (複素) 共役とは $z = x - iy$ のことである。上のことは、二つの複素数 z, w に対して、

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

を繰り返し使えば出る。

記号の説明:

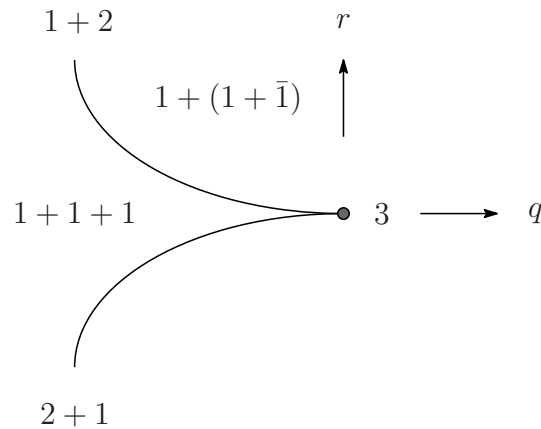
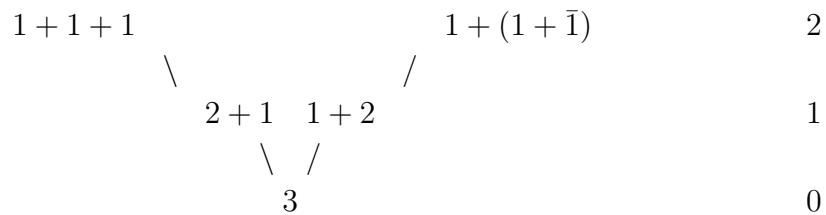


図 1: qr 平面内の曲線 $D = 0$

- $1 + 1 + 1$ は異なる 3 実根を持つ 3 次式、
- $1 + (1 + \bar{1})$ は 1 実根と共役複素数根を持つ 3 次式、
- $2 + 1$ は左に重根と右に単根を持つ 3 次式、
- $1 + 2$ は右に重根と左に単根を持つ 3 次式、
- 3 は 3 重根を持つ 3 次式

を表す。平面 (3 次式全体) は曲線 $D = 0$ により 2 つの領域に分けられていて、狭い方が $1 + 1 + 1$ 、広い方が $1 + (1 + \bar{1})$ に対応していて、境界曲線 $D = 0$ は原点 3 から伸びている二つの部分 $1 + 2, 2 + 1$ に分かれる。段々特殊になっていく様子を描いてみる :



(図表内の線は「上の或特殊化が下」を意味する。印刷の具合で全ては書けなかったので読者によって完成されることを期待している。) この図表だけからどの位の事が分かるであろうか。 1 行目の二つは「自由度」が 2、 2 行目は 1、 3 行目は 1 点だから 0 である。何も計算しないで、これだけから、 (q, r) -平面は、 3 で表される点を共有する 2 曲線 $2 + 1, 1 + 2$ で 2 分され、一方の面は $1 + 1 + 1$ で、他方の面は $1 + (1 + \bar{1})$ であることが分かる。 図 2 が図 1 と比べて欠けている情報は 2 曲線 $2 + 1, 1 + 2$ の交わり (接し) 方だけである。「物の繋がり方だけ」を問題にするなら、十分正確と言える。

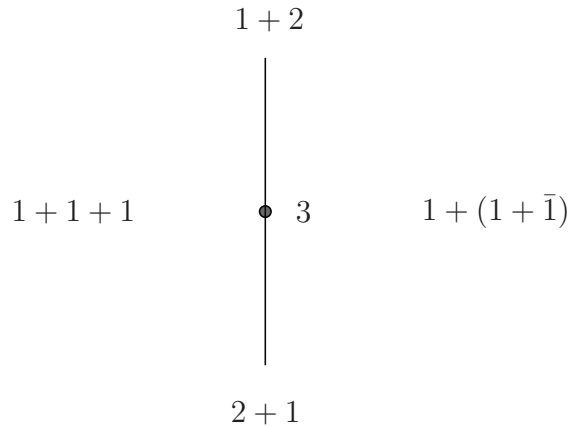


図 2: qr 平面内の曲線 $D = 0$ の簡略化したもの

2.5 発展学習

多項式 $F = t^3 + qt + r$ の係数 q, r と根 $\alpha, \beta, \gamma = -\alpha - \beta$ の関係は

$$\begin{aligned} q &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta - (\alpha + \beta)^2, \\ r &= -\alpha\beta\gamma = \alpha\beta(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

となる。ここで $t = \alpha + \beta$, $s = \alpha\beta$ と置くと

$$q = s - t^2, \quad r = st$$

となる。

$$4q^3 + 27r^2 = (s + 2t^2)^2(4s - t^2)$$

となることを参考にして、写像

$$(s, t) \mapsto (q, r) = (s - t^2, st)$$

を調べよ。 (s, t) 空間の原点中心の円周の像は図 3 のようになる; 図は完成していないから読者が完成させよ。

3 4 次式の判別式

t に関する 4 次式 F の判別式を考えよう。4 次方程式 $F = 0$ の 4 根のうちに重なりがあれば 0 になり、そうでないときは 0 にならない、係数に関する多項式 (がもしあればそれ) を判別式と呼ぼう。ここまでは前節や前々節と同様である。4 根に重なりがあるか否かは、変数変換 $t \rightarrow t + c$ をしても変わらないから、定数 c を巧く選んで式を簡単にしよう; 4 根の平均が 0 になるように平行移動する。以後、 F には既にこの変換がしてあるとして

$$F = t^4 + xt^2 + yt + z$$

とする。

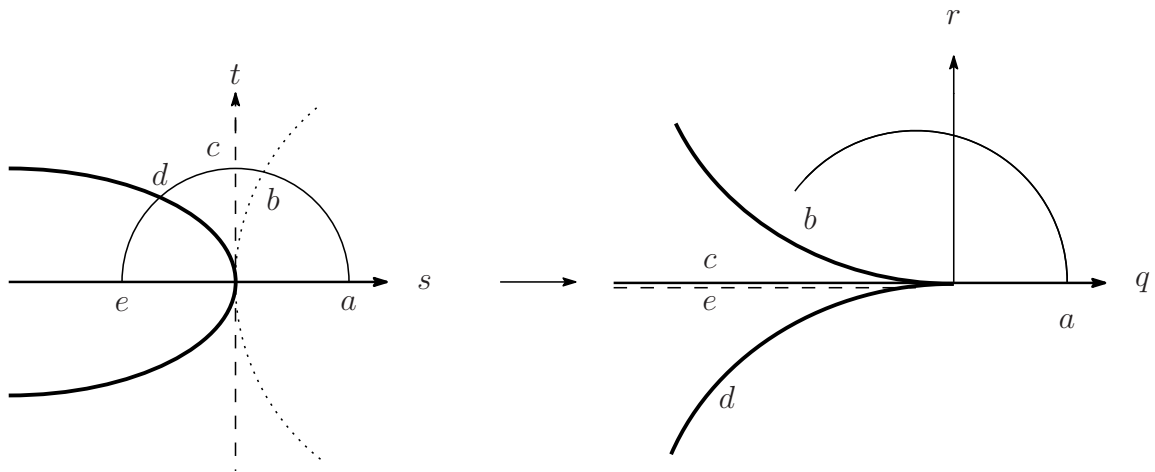


図 3: 写像 $(s, t) \mapsto (q, r) = (s - t^2, st)$ とその像

3.1 判別式の導出

4 次方程式 $F = 0$ の 4 根を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と置く。それらのうちの何れか 2 つが等しいときに 0 になり、そうでないときに 0 にならないものが欲しいのだから、差の積

$$\Delta = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma)(\beta - \delta) \cdot (\gamma - \delta)$$

の (はっきりした理由はあるのだけど、ここでは上の 2 回の経験で) 自乗 Δ^2 が判別式 D である。根と係数の関係

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = x,$$

$$\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma = -y, \quad \alpha\beta\gamma\delta = z$$

を使って D を x, y, z の多項式で書けるのだけど、このまま実行しようとする人はいないだろう。

近代兵器「微分」の活用をする。理屈は前々節で述べた。手続きは

$$2 \text{ 式 } F(t) = 0, \quad F'(t) = 0 \quad \text{から } t \text{ を消去する}$$

であった。この場合は

$$t^4 + xt^2 + yt + z = 0, \quad 4t^3 + 2xt + y = 0$$

である。 t に関する 2 つの多項式が与えられたときにそれから t を消去する「終結式の理論」があるのだけど、そんな一般論を使わずに手作業でやるには以下のように順に t に関する次数が低い多項式を作って行く：先ず第 2 式より t^3 は t の 1 次式で書ける、それを第一式の $t^4 = t \cdot t^3$ に代入すると、 t に関する 2 次式になる。故に t^2

は t の 1 次式で書ける。それを第二式の $t^3 = t \cdot t^2$ に代入すると t の 2 次式になる。 t の 2 次式が 2 つ出てきたから、 t^2 が消せて、 t が x, y, z で表わせる。その式をどちらでもいいから 2 次式に代入して、分母を払うと遂に t が消える。実行してみると

$$256z^3 - 128x^2z^2 + (144y^2x + 16x^4)z - 4y^2x^3 - 27y^4$$

となる。また、根と係数の関係を使って確かめてみると、これが丁度、判別式 D になっていることも分かる。

上の式は係数が 3 桁にもなり汚いので z を $z/4$ で置き換えておく：

$$F = t^4 + xt^2 + yt + \frac{z}{4},$$

$$D := 4z^3 - 8x^2z^2 + (36y^2x + 4x^4)z - (27y^2 + 4x^3)y^2.$$

色々変数変換してもこれ以上たいして簡単にはならないようである。求まりはしたが、はたしてこんな複雑な式が役に立つのであろうか。

3.2 4 次方程式の解の様子

3 次元空間の図形は平面に作図出来ないから理解が難しいが、 xyz -空間内の $D = 0$ で定義される曲面 (S と呼ぼう) は空間を何個かに分けるであろう、ある部分では 4 次方程式 $t^4 + xt^2 + yt + z/4 = 0$ の (異なる) 実根が 4 個、ある部分では実根が 2 個と複素共役根が 1 組等となっているに違いない。それらを視覚的に訴えるように書くと

| | | | |
|---------------|--------------------------|-------------------------------------|----------------------|
| 1 + 1 + 1 + 1 | 1 + 1 + (1 + $\bar{1}$) | (1 + $\bar{1}$) + (1 + $\bar{1}$) | 3 |
| 1 + 1 + 2 | 1 + 2 + 1 | 2 + 1 + 1 | 2 + (1 + $\bar{1}$) |
| 1 + 3 | 3 + 1 | 2 + 2 | 2(1 + $\bar{1}$) |
| | 4 | | 0 |

となろうか。(図表内の「上の或特殊化が下」を意味する線は印刷の具合で書けなかったので読者によって完成されることを期待している。) 右端の数字は「自由度」で、3 は部屋、2 は曲面、1 は柱、0 は点である；4 重根を持つ多項式は t^4 だけなので、これに対応するのは原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ であることは明らかである。4 根の和を 0 にしてあることに注意。記号の説明：

- 1 + 1 + 1 + 1 は異なる 4 実根を持つ 4 次式、
- 1 + 1 + (1 + $\bar{1}$) は 2 実根と共役複素数根を持つ 4 次式、

- $(1 + \bar{1}) + (1 + \bar{1})$ は 2 組の共役複素数根を持つ 4 次式、
- $1 + 1 + 2$ は右に重根と右に 2 単根を持つ 4 次式、
- $1 + 2 + 1$ は真ん中に重根と左右に単根を持つ 4 次式、
- $2 + 1 + 1$ は左に重根と右に 2 単根を持つ 4 次式、
- $2 + (1 + \bar{1})$ は重根と共役複素数根を持つ 4 次式、
- $1 + 3$ は右に 3 重根と左に単根を持つ 4 次式、
- $3 + 1$ は左に 3 重根と右に単根を持つ 4 次式、
- $2 + 2$ は 2 組の重根を持つ 4 次式、
- $2(1 + \bar{1})$ は 2 重共役複素数根を持つ 4 次式、
- 4 は 4 重根を持つ 4 次式。

「物の繋がりだけを問題にする」なら、この情報のみを用いて、 (x, y, z) -空間内の曲面 S の様子が分かる。 $2(1 + \bar{1})$ は面に入っていないので、部屋 $(1 + \bar{1}) + (1 + \bar{1})$ 内の髭みたいなものだろう。これ以外に柱が 3 本ある；髭も柱も原点 4 から発している。 S を構成する 4 つの面の内、3 つの面: $1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 2$ は無限に広がった扇みたいなもので、両端が 2 本の柱である。それらの柱の具合を観察すると、3 つの扇は原点を頂点とする三角錐面の 3 面をなすであろう。今ひとつの面 $2 + (1 + \bar{1})$ はそれを仕切る両端が同じ柱なので、朝顔のような形であろう。これら 4 曲面のなす S で、空間は 3 つの部分に分かれ、三角錐の中が $1 + 1 + 1 + 1$ 、朝顔の中が $(1 + \bar{1}) + (1 + \bar{1})$ でそれらの外側が $1 + 1 + (1 + \bar{1})$ である。これらの情報を元に描いたのが図 4 である。

3.3 柱と髭

曲面 S は 3 次元空間内の曲面なので、正確に図示することは難しいので、先ず柱（や髭）を調べる。3 次元空間内とは言え、曲線なので想像することが比較的容易であろうから。

3.3.1 柱 $2 + 2$

2 重根 2 個 ($\gamma = \alpha, \delta = \beta$ と考える) を持つ多項式は一行前の注意より、

$$(t - \alpha)^2(t - \beta)^2, \quad 2\alpha + 2\beta = 0$$

となっていないから、展開した $t^4 - 2\alpha^2 t^2 + \alpha^4$ と $F = t^4 + xt^2 + yt + z/4 = 0$ とを係数比較して、

$$P_- : (x, y, z) = (x, 0, x^2), \quad x < 0$$

なる曲線（放物線の片割れ）が対応することが分かる。

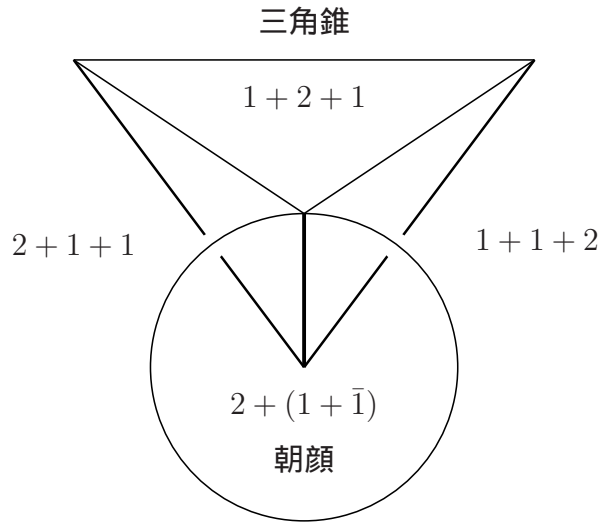


図 4: xyz 空間内の曲面 $S: D = 0$ の「物の繋がりだけ」の図

3.3.2 柱 $1+3, 3+1$

3重根と単根1個 ($\gamma = \delta = \alpha$ と考える) を持つ多項式は

$$(t - \alpha)^3(t - \beta), \quad 3\alpha + \beta = 0$$

となっていないから、展開して F と係数比較すると、

$$C: (x, y, z) = (-6\alpha^2, 8\alpha^3, -12\alpha^4)$$

となる。この曲線は原点で鋭く尖っている。この曲線を xy -平面に射影すると、3次方程式の判別曲線の様な曲線であり、それが z の負の方向に少しだけ起き上がっている。

3.3.3 髭 $2(1 + \bar{1})$

2重複素根 ($\alpha = \beta = i\eta, \gamma = \delta = -i\eta$ と考える) を持つ多項式は

$$(t - i\eta)^2(t + i\eta)^2 = (t^2 + |\eta|^2)^2 = t^4 + 2|\eta|^2 t^2 + \frac{4|\eta|^4}{4}$$

となっていないから、展開して F と係数比較すると、

$$P_+: (x, y, z) = (x, 0, x^2), \quad x > 0$$

なる曲線 (放物線の片割れ) が対応することが分かる。

3.4 曲面 $S : D = 0$ の径数表示

方程式 $D = 0$ はややこしいから、前小節のように、径数表示をするが、 S は曲面 (2次元) なので径数が二つ要る。 $\delta = \gamma$ と考えて、前節のように

$$(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)^2, \quad \alpha + \beta + 2\gamma = 0$$

を展開して $F = t^4 + xt^2 + yt + z/4$ と係数比較すると

$$x = -\frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{3}{4}\beta^2, \quad y = -\frac{1}{4}(\alpha + \beta)(-\beta + \alpha)^2, \quad z = (\alpha + \beta)^2\alpha\beta$$

となる。今度は α, β は実数とは限らないで、4通りある。

- α, β 共に実数、 $\alpha < \beta < \gamma$ のとき 1 + 1 + 2 に対応、
- α, β 共に実数、 $\alpha < \gamma < \beta$ のとき 1 + 2 + 1 に対応、
- α, β 共に実数、 $\gamma < \alpha < \beta$ のとき 2 + 1 + 1 に対応、
- α, β は互いに共役な複素数、 $2 + (1 + \bar{1})$ に対応。

これらを一枚の紙の上に描くことができる：上の x, y, z の α, β による表示は、 α と β をひっくり返しても変わらないことに着目して、 $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$ と置くと a, b は共に実数で

$$x = -\frac{3}{4}a^2 + b, \quad y = -\frac{1}{4}a(a^2 - 4b), \quad z = 4a^2b$$

となる。 ab -平面で上の4通りの根のあり方を図示する (図5)。このとき

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a^2 - 4b = 0, \quad \alpha = \gamma \Leftrightarrow 3a^2 + 4b = 0$$

に注意。2.5節発展学習と比較検討してみよ。

以上の考察で前々小節で行った「物の繋がりだけ」に注目した考えが、正しかったことが確認出来た。この表示を使って a, b に数を入れて様子を見ることは、機械には有効で、然るべきものを使えば綺麗な絵を描いてくれる (図6：向かい合った朝顔と三角錐) が、人間にはどう役に立つかを考える。

3次式の時、「物の繋がりだけ」で判別曲線を描くと、原点での2曲線の交わり (接し) 方の情報が抜けた、その他は殆ど失ったものは無かった。今の場合、知りたいのは4枚の曲面の交わり (接し) 方である。それには再び「微分」を使う：

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{3}{2}a, & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= 1, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{4}(3a^2 - 4b), & \frac{\partial y}{\partial \beta} &= a, \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} &= 2ab, & \frac{\partial z}{\partial \beta} &= a^2. \end{aligned}$$

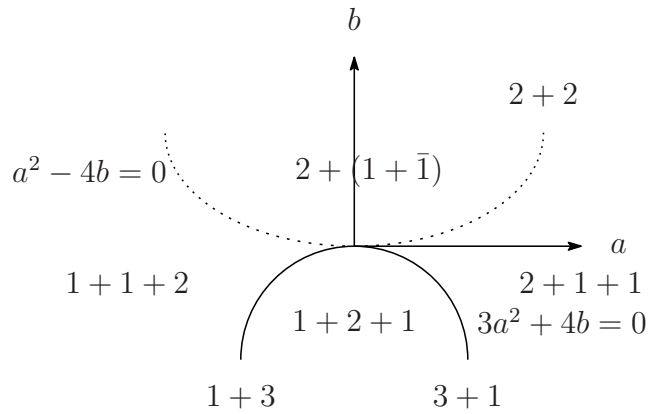


図 5: 曲面 S の (a, b) による径数表示

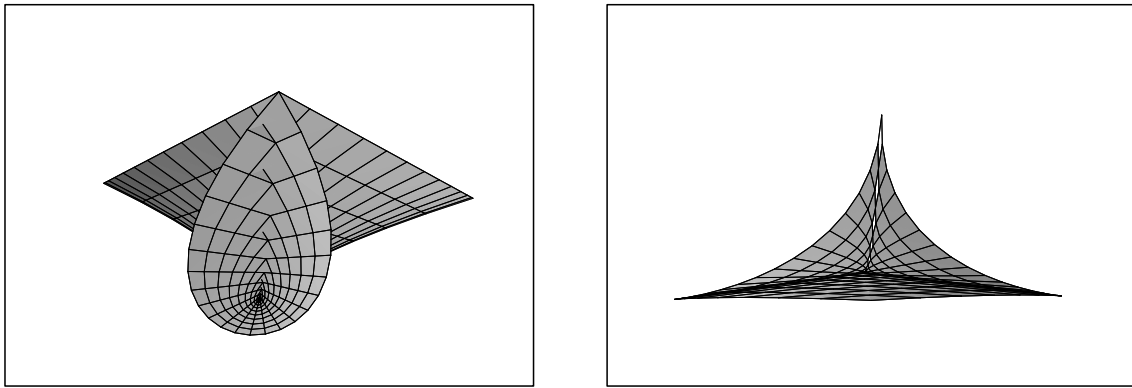


図 6: 朝顔と三角錐

このことから、多少の作業(省略)をすると、以下のことが分かる：柱 $1+3$ に沿って曲面 $1+1+2$ と曲面 $1+2+1$ は接しているというか、尖っている、同様に柱 $3+1$ に沿って曲面 $2+1+1$ と曲面 $1+2+1$ は接しているというか、尖っている。しかし、柱 $2+2$ に沿っては曲面 $1+1+2$ と曲面 $2+1+1$ は角度を持って交わっている。曲面 $1+1+2$ と曲面 $2+(1+\bar{1})$ は滑らかに繋がっている、同様に曲面 $2+1+1$ と曲面 $2+(1+\bar{1})$ は滑らかに繋がっている。

以上の曲面の接し方を考慮して絵を描くと図 7 のようになるだろう。そうそう、言い忘れたが、この形は燕尾(英語で swallowtail)と呼ばれている。私は今回は朝顔と三角錐として紹介したが、見方によっては烏賊の頭のようにも見える。

注：話は変わるが、ここに向かい合った二つの男性用小便器 – 朝顔と三角錐 – がある。二つとも狙って小便をかける場所は、立ち上がった曲線 P_- であり、小便が吸い込まれていくところは底の原点である。朝顔は曲線 P_- に沿っては角度を持っているが後は丸っこい、穏やかな形である。それと向かい合っている三角錐は曲線 P_- では角度を持っているだけでなく、吸い込み口から立ち上がっている曲線 C に沿って尖っている；一昔前によくあった、薄緑色の(磁器でなく)陶器で出来た朝顔が

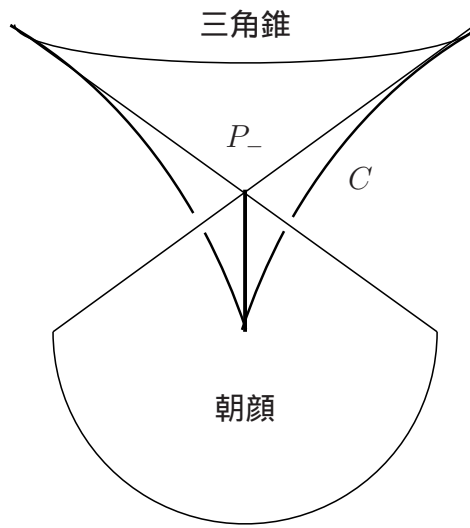


図 7: 朝顔から三角錐を見た

これに似た形をしていた。

4 高次式の判別式

以上やってきた通りのことを 5 次式についてやれば、5 次式の判別式が求まり、それによって係数のなす 4 次元空間がいくつかの領域に分かれるだろう。6 次式についても同じようなことが出来るだろう、どんどん複雑になるだろう。このように、同じ考えでやれば同様に出来るがどんどん複雑になるという物を続けてやるのは余り面白いことではないので、これで止めよう。