多重ゼータ値

金子 昌信 （九州大学数理学研究院）

1. 序

多重ゼータ値とは，与えられたいくつかの自然数 $k_1,\dots,k_r$ に対して無限級数

$$\zeta(k_1,\dots,k_r)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で定まる実数のことである．ただし収束のため $k_r\geq 2$ と仮定する．自然数の個数 r（「深さ」とよぶ）が 1 ならばこれはリーマンゼータ関数の正整数での値 $\zeta(k)$ に他ならない．k が偶数の場合の値を円周率とベルヌーイ数で表したオイラーによる公式はよく知られている．オイラーは $r=2$ の場合も扱っていて，1776 年の論文 [3] があるが，このような級数（$r=2$）を最初に考えたのはゴルトバッハのようである．それは遡ること 1742 年の 12 月，ゴルトバッハからオイラーに宛てた手紙に，何かの書き間違いからこのような級数を考えた云々とあって，オイラーが直ちにそれについていくつかの考察を書き送り，翌年 2 月まで，5 通のやりとりが残っている [4]．それを見ると，既にその時点で論文 [3] の内容はあらかた見つけられているようである．

時代下って，結び目理論や場の量子論などとの関係で多重ゼータ値が現れるようになった 1990 年代から活発な研究がなされるようになり，その勢いは今のところ留まるところを知らぬかのように見える．ほぼ四半世紀になるその進展の火付け役，あるいは牽引役となった論文の一つがザギエによる [19] である．そこで提出された次の「次元予想」は，その背後に奥深い数学が存在することが示唆されていたこともあり，活発な研究を促した．

いま記号 $\mathcal{Z}_k$ で，重さ（$=k_1+\cdots+k_r$）が k の多重ゼータ値全体が $\mathbf{Q}$ 上張るベクトル空間を表すとする．このときザギエの予想は，$\mathcal{Z}_k$ の次元が，漸化式 $d_k=d_{k-2}+d_{k-3}$（初期値 $d_0=1,\ d_{<0}=0$）で定まる数列 d_k で与えられるだろう，

$$\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k=d_k\,?$$

というものである． 10 年以上も前の寺杣 [17] やゴンチャロフ [2] らの仕事により，不等式

$$\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k\leq d_k$$

は知られている．逆向きの不等式については，$\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k>1$ となるようなただ一つの k すら未だ知られていない，というのが現状である．

もう一人，ホフマンも早くから独自に深さが一般の場合の多重ゼータ値の研究を行っていた（[5, 6]）．そのうち論文 [6] で提出されていた予想

$\mathcal{Z}_k$ は，成分が 2 と 3 だけからなる多重ゼータ値で $\mathbf{Q}$ 上張られるであろう

は，ザギエの予想のようには耳目を集めなかったと思われるが（確かに数は合うが，どれだけの理論的根拠があるのか疑わしい，というのが大方の見方ではなかったか），数年前にブラウン [1] がそれを解決した．その解決方法（ゴンチャロフが研究してきた「モチビッ

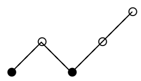
ク多重ゼータ値」，とくにそのホップ代数構造を用いる）が極めて広範な影響を持つものであったため，大いに注目された．たとえばそのひとつの帰結として，$\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の ℓ 進基本群へのガロア表現に関する「ドリーニュー伊原の予想」が解決された．

この四半世紀に多重ゼータ値に関連してなされてきた研究はもちろん様々なものがあるが，大きな結果として以上をざっと記すに留め，以下，講演で述べた私の最近の二つの共同研究について簡単に紹介したい．

2. 山本積分と多重ゼータ値の新しい関係式

山本修司氏は [18] において，一般の 2 色半順序集合に対してある積分を定義し，その特別な場合として「等号付き多重ゼータ値」の新しい積分表示を与えた．その後の彼との共同研究で，この積分を用いた新しい「積分 = 級数」型の等式を導き，さらにそれが「正規化複シャッフル関係式」と同値な関係式族を与えることを証明した [11]．本節ではこれについて簡単に説明する．

まず山本積分を実例により説明しよう．（有限）2 色半順序集合を



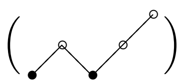
のような $\circ$ と $\bullet$ を線で結んだグラフで表す．線で結ばれた二つの頂点の順序は上が下より大きい，としておく．このグラフの各頂点に，区間 $(0,1)$ を動く変数を一つずつ対応させる．この例では左から $t_1, t_2, \ldots, t_5$ が対応しているものとしよう．そして，頂点の順序に対応した，変数の大小順序を入れる．たとえばこの場合は $t_1 < t_2$, $t_2 > t_3$ など．さらに，$\circ$ には $\frac{dt}{t}$, $\bullet$ には $\frac{dt}{1-t}$ が対応するとして，頂点の個数次元の積分

$$\int_D \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}\frac{dt_4}{t_4}\frac{dt_5}{t_5},$$

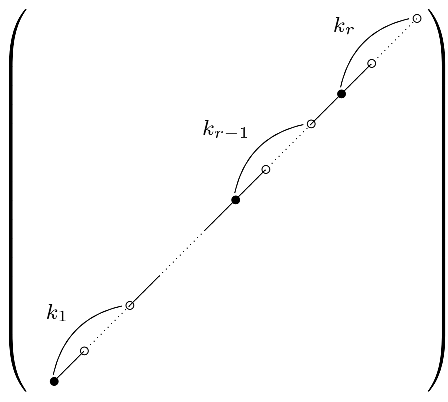
ただし D は頂点順序に対応する不等式

$$\begin{array}{rl} 0 < t_1 < t_2 < 1 & \\ \vee & \\ & 0 < t_3 < t_4 < t_5 < 1 \end{array}$$

で定まる領域，を考え，これを記号

I 

で表すことにする．この記号のもとで，多重ゼータ値のよく知られた積分表示は

$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = I$ 

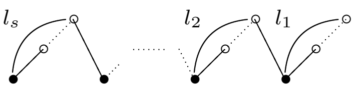
である．

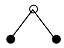
今 $\zeta^\star(l_1,\dots,l_s)$ で等号付き多重ゼータ値

$$\zeta^\star(l_1,\dots,l_s)=\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_s}\frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

を表すものとするとき（$l_1,\dots,l_s$ は自然数で $l_s\ge 2$），山本氏による積分表示は

$$\zeta^\star(l_1,\dots,l_s)\;=\;I\left(\quad\right)$$



と書かれる．一番簡単な例が $I\,(\quad)$  で，定義からこれは積分

$$\int_{0<t_1<t_2>t_3<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}$$

に等しいが（変数はすべて $(0,1)$ 内を動く），これを左から級数展開し逐次積分を行っていくと，

$$\begin{aligned}
\int_{0<t_1<t_2>t_3<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}&=\int_{0<t_2>t_3<1}\int_0^{t_2}\sum_{n=1}^{\infty}t_1^{n-1}dt_1\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}\\
&=\int_{0<t_2>t_3<1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_2^{n-1}}{n}dt_2\frac{dt_3}{1-t_3}\\
&=\int_0^1\int_{t_3}^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_2^{n-1}}{n}dt_2\frac{dt_3}{1-t_3}\\
&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t_3^n}{n^2}\frac{dt_3}{1-t_3}\\
&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}t_3^{m-1}dt_3\\
&=\sum_{1\le m\le n}\frac{1}{mn^2}
\end{aligned}$$

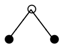
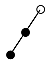
となって $\zeta^\star(1,2)$ が得られる．$\frac{dt_3}{1-t_3}$ が現れる手前の t_2 に関する積分が t_3 から 1 までとなっていて，和 $\sum_{m=1}^{n}t_3^{m-1}$ （$=\frac{1-t_3^n}{1-t_3}$）が現れるのがミソである．一般の場合も同様に左から順に積分していけば確かめることが出来て，証明自体は至極簡単なのであるが，やはり最初にこれを発見するのはえらいと思う．さらに重要なことは，この 2 色半順序集合に対応した積分（収束条件「極大点はすべて $\circ$ で極小点はすべて $\bullet$」は満たしているとして）はすべて，多重ゼータ値の和で書ける，ということである．これは，全順序集合に対応するのが多重ゼータ値であることと，積分領域を分割して，全順序集合に対応する積分の和に書き直せることから従う．例えば上の例で，領域

$$\left\{\begin{array}{c}0<t_1<t_2<1\\ \vee\\ 0<t_3\end{array}\right\}$$

は，測度零の集合を無視（積分には影響ないので）すれば，全順序集合の合併

$$\{0<t_1<t_3<t_2<1\}\cup\{0<t_3<t_1<t_2<1\}$$

に等しい．これは，順序がついていない t_1 と t_3（に対応する頂点）の一方が他方より大きいという順序を新たに付加することによって元の半順序集合を全順序集合に埋め込んでいて，対応する積分はそのすべての埋め込みかたに渡る和となるのである．今の例では

$I($  $) = 2I\Big($  $\Big) = 2\zeta(1,2)$

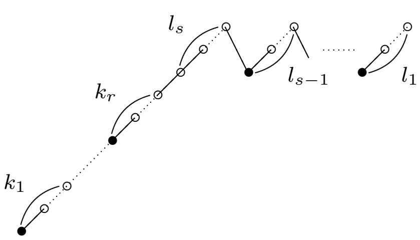
となる．面白いのは，これが級数による定義における和の範囲 $0<m\le n$ を $0<m<n$ と $0<m=n$ に分けて得られる式

$$\zeta^\star(1,2)=\zeta(1,2)+\zeta(3)$$

と異なることで，この二つが等しいことからオイラーによる $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ が得られる．

この一般化として，山本氏と共同で次の結果を得た．これは $\zeta(k_1,\dots,k_r)$ や $\zeta^\star(l_1,\dots,l_s)$ の積分表示を特別な場合として含む（前者は $s=1$, 後者は $r=1$ の場合），ハイブリッド型の「積分＝級数」定理である．

定理　任意の自然数 $k_1,\dots,k_r,l_1,\dots,l_s$ に対し（$r,s\ge1$），

$I\Bigg($  $\Bigg) = \displaystyle\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ \| \\ 0<n_1\le\cdots\le n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}.$　(1)

たとえ k_r や l_s が 1 であっても積分，級数ともに収束することに注意する．左辺，および右辺はそれぞれ先の例と同様のやり方で多重ゼータ値の和として書ける．その際，左辺から出てくる多重ゼータ値はすべて深さ $r+s-1$ を持ち（深さは "$\bullet$" の個数），他方右辺からは，$s\ge2$ であれば深さが $r+s-1$ より小さい項が混ざる（等号がある部分で深さが落ちる）ので，そのとき二通りの表示は必ず見かけが異なる．つまり多重ゼータ値の自明でない線形関係式が得られる．

当初驚いたことに，計算機で実験してみると，この関係式だけを用いて $\mathcal{Z}_k$ の次元を上限の d_k にまで落とせるのである．このことを重さ 17 まで確かめた．予想としては，

予想　多重ゼータ値のすべての線形関係式は (1) から導くことが出来るであろう．

ということになるが，この予想の根拠となりうる結果として，我々は次を示した．

定理　適当な意味で，関係式族 (1) は「正規化複シャッフル関係式」と同値である．

「適当な意味」を説明するには代数的な準備が必要なので，詳細は論文 [11] に譲るとするが，もう少しだけ説明しておこう．

我々は，通常の「調和積」（stuffle product）および「シャッフル積」（$\mathbf{k}, \mathbf{l}$ は「収束インデックス」とする）

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \tag{2}$$

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) \tag{3}$$

のもとで（右辺はそれぞれ，級数の積，積分の積を和に直すことから生じる多重ゼータ値の線形和を表す），関係式族 (1) が，「正規化の基本定理」

$$\zeta_ш(\mathbf{k}; T) = \rho\big(\zeta_*(\mathbf{k}; T)\big) \tag{4}$$

と同値であることを示した．ここで $\mathbf{k}$ は任意の（最後の成分が 2 以上とは限らない）インデックスで，$\zeta_ш(\mathbf{k}; T)$ と $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$ はそれぞれ，積分と級数による正規化多項式と呼ばれる，$\mathbf{R}[T]$ の多項式である．その係数は多重ゼータ値の一次結合で書かれる．これらは，多重ゼータ値の積分，および級数による表示を考えたとき，インデックスの最後の成分が 1 であると発散するのだが，その発散の度合いを計るような多項式である．それらが，ガンマ関数のテイラー展開級数を用いて定義されるある $\mathbf{R}$ 線形写像 $\rho : \mathbf{R}[T] \to \mathbf{R}[T]$ によって (4) のようにきれいに関係している，というのが正規化の基本定理である [8],[15]．そして，多重ゼータ値のすべての関係式（$\mathbf{Q}$ 上の代数関係式や線形関係式）は，(2), (3), (4)（両辺の係数を比べたもの）から出てくるであろう，と予想されている．また [11] では，等式 (1) のもと，(2) と (3) が同値になる，という少し意外な結果も証明されている．これらが，先ほどの予想「(1) がすべての線形関係式を導く？」の根拠である．論文では「〜のもとで〜が同値」の意味をはっきりさせるため，ζ を，インデックスの形式和がなす空間から $\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}[T]$ への写像で置き換えて，代数的に議論する．副産物として，基本定理 (4) のほぼ純代数的な証明が得られる．実数の性質を使うのは唯一 (1) の初等的な積分の計算だけである．

いずれにせよ，ここで強調したいことは，等式 (1) は，発散の正規化であるとかいうことは一切出てこない，収束する積分と収束する級数の間の，大学初年次の微積分で習う範囲の計算で簡単に証明できる全く初等的な等式であると言うことである．これが多重ゼータ値のすべての線形関係式を導くであろうというのは，なかなか愉快なことではないか．ただしまだ不十分な点もある．それは，左辺や右辺を多重ゼータ値の和として書く明示的な公式がないことである．

3. 有限多重ゼータ値

次にドン・ザギエ氏と共同で行っている「有限多重ゼータ値」について手短に紹介する．これは多重ゼータ値の二通りの，全く異なる「有限類似」に関するもので，両者の関係を発見したことが一番の目玉である．

まず第一のものは，各素数 p ごとの素朴な有限類似

$$\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<p} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \mod p \tag{5}$$

を，全素数まとめて，ただし有限個の素数でのずれはあっても無視し（ここがポイント），商環

$$\mathcal{A} := \frac{\prod_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}{\bigoplus_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} = \{(a_p)_p \,|\, a_p \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\}/\sim$$

において考える．ここで，p はすべての素数をわたり，$(a_p)_p \sim (b_p)_p$ は高々有限個の例外を除き $a_p = b_p$ となることを意味する．$\mathcal{A}$ は成分ごとの和，積から来る演算によって環であり，$\mathbf{Q}$ を対角的に埋め込む（有限個の成分はどうでもよいことに注意）ことにより，$\mathbf{Q}$ 代数と見ることが出来る．そこで，この $\mathbf{Q}$ 代数 $\mathcal{A}$ において,「$\mathcal{A}$-多重ゼータ値」$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r) \in \mathcal{A}$ を，その p 成分が (5) であるような $\prod_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の元で代表される $\mathcal{A}$ の元として定義する． ザギエは２０１０年に台湾を訪れた際に聞いた，スンのある予想に触発され，このような枠組みで (5) や類似の和の合同式を考えることを始めたそうである．

古典的な場合と同じように，重さが k のインデックス $(k_1,\ldots,k_r)$ すべて（ただし k_i は正整数とする）に対する $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ たちが $\mathbf{Q}$ 上生成する $\mathcal{A}$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ で表す．またそれらのすべての k についての和を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ とする：

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \quad (\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbf{Q}).$$

今は収束発散の問題がないから k_i は 0 でも負でも構わないわけであるが，そのような $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ を考えてもやはり $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の元となることが容易に示される（ただし一般には重さが混ざった和になる）．

さて，調和積 (2) の計算は有限で切った和 (5) でも成り立つから，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ が $\mathbf{Q}$ 代数になることが分かる．この代数について，我々は次を予想した．$\mathcal{Z}$ で通常の多重ゼータ値のなす $\mathbf{Q}$ 代数

$$\mathcal{Z} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k \quad (\mathcal{Z}_0 = \mathbf{Q},\, \mathcal{Z}_1 = \{0\})$$

を表すとする．

予想　$\mathbf{Q}$ 代数の同型

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \tag{6}$$

が存在する．右辺の $\zeta(2)\mathcal{Z}$ は $\zeta(2)$ が生成する $\mathcal{Z}$ の単項イデアルである．

さらに精密に，$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ を以下で具体的に定義する $\zeta^{S}(k_1,\ldots,k_r)$ に移すような同型写像が存在する．従って $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ たちが満たす関係式は全く同じ形で $\zeta^{S}(k_1,\ldots,k_r)$ で成り立つし，逆も然りである．

もし $\mathcal{Z}$ が重さによって次数付き環になっているとし，ザギエの次元予想が正しいとすると，商環 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の重さが k の部分の次元は $d_k - d_{k-2}$, すなわち d_{k-3} に等しいはずである．これが，ザギエが数値計算（！）により予想した $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の次元である．

ザギエは２０１１年の１１月から，コレージュドフランスにおいて５回にわたって多重ゼータ値の講義をした．その最終回（１２月５日）に $\mathcal{A}$-多重ゼータ値についてもふれ，次元の予想を述べている．私は翌年５月に彼が九大を訪れたときにこの話しを聞いた．あとで書くように，以前に (5) の和の合同をいろいろ計算したことがあったので，$\mathcal{A}$ という環の中で考える枠組みに大変興味をひかれ，責任重い役職仕事からの格好の逃避場所（？）

のように，時間を見つけては研究を続けた．そして１３年の３月末から公務の合間を縫ってイギリスのニュートン研究所を訪れたとき，二日余りだけ彼と集中的に議論することが出来，上記の予想にたどり着いた．私は肝心の多重ゼータ値の研究集会まではニュートン研に滞在できなかったのであるが（入学式に出席せねばならなかった），かつてない実りある，印象に残る外国出張となった．次元の予想値を見ればそれが $\pi^2 = 0$ とおいて得られるもの，又は「p 進多重ゼータ値」（そこでの π^2 の類似は 0 である）の次元予想値に等しいことはすぐに気がつくが，まさか実数世界にこのようにはっきり対応物があるとは，見つけるまでは，二人とも思いもしなかった．

さてもう一つの有限類似とも言うべき $\zeta^S(k_1,\ldots,k_r)$ の定義は次の通り．まず $\mathcal{Z}$ の元 $\zeta^{S,*}(k_1,\ldots,k_r)$ を，

$$\zeta^{S,*}(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta_*(k_1,\ldots,k_i;T)\zeta_*(k_r,\ldots,k_{i+1};T) \qquad (7)$$

で定義する．k_i たちは自然数であり，どこに 1 があってもよい．右辺に現れているのは，先に登場した級数による正規化多項式である（$\zeta_*(\emptyset;T)=1$, $(-1)^{\text{空和}}=1$ とする）．インデックス $(k_1,\ldots,k_r)$ を途中で二つに分けて後半の順序を逆転させ掛け，それらの符号つきの和をとるのである．この定義からは右辺は T の多項式になるとしか見えないが，実は T によらない定数，実際は重さが $k_1+\cdots+k_r$ の多重ゼータ値の和となることが示される．そこで $\zeta^S(k_1,\ldots,k_r)$ を

$$\zeta^S(k_1,\ldots,k_r) := \zeta^{S,*}(k_1,\ldots,k_r) \bmod \zeta(2) \in \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$$

として定義する．(7) の右辺の和をいきなり見せられても余り自然なものとは思えないであろうが，より自然に見える，級数としての表示もある．一応書いておくと，

$$\zeta^{S,*}(k_1,\ldots,k_r) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{m_1\prec\cdots\prec m_r \\ m_i\in\mathbf{Z},\,|m_i|<N}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}.$$

ここで，0 以外の整数に順序 $\prec$ を

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec (\infty = -\infty) \prec \cdots - 3 \prec -2 \prec -1$$

で入れている．

また，(7) の ζ_* を $\zeta_ш$ に置き換えて同様の量 $\zeta^{S,ш}(k_1,\ldots,k_r)$ を定義することも出来る．これも $\mathcal{Z}$ の元となり，両者は一般には異なる値をとるが，実は常に

$$\zeta^{S,*}(k_1,\ldots,k_r) \equiv \zeta^{S,ш}(k_1,\ldots,k_r) \bmod \zeta(2)$$

が成り立つ．従って $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ における剰余類を考えるということが自然なこととなる．そうして $\zeta(2)=0$ としていろいろと計算をしてみると，$\zeta^{\mathcal{A}}$ と全く同じ関係式が成り立つ！ということをイギリスで発見したのであった．

今では $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ たちや，$\zeta^S(k_1,\ldots,k_r)$ たちが満たすいろいろな関係式が証明されていて，今のところ，一方で成り立っている式は $\zeta^{\mathcal{A}}$ と ζ^S を入れ替えるだけで全く同じ関係式が他方で成り立つ．そういう意味で上の予想のエビデンスは沢山ある．また，すべての関係式を生み出すであろうと予想される，「複シャッフル関係式」の類似物と思える関係

式族も双方で証明されていて，これも全く同じ形をとる．しかしながら，現時点では $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ が $\mathbf{Q}$ より真に大きいか，また $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \neq 0$ か，も証明されていない！（従って一切が全て蜃気楼，証明した等式は皆，実は $0=0$，と言う可能性もある．何と．）

本稿では定義と主な予想だけを述べて，関係式など具体的なことは一切省略することにしてしまった．より詳しくは，近く出るであろう日本語の概説 [10]，論文としては（いい加減に公表しないとちょっとマズイ）[12], また既に出ているジャオの本 [20] などを参照して頂きたい．

最後に一つだけ，当初より大変面白く思っていることを述べて本稿を終えたい．

多重ゼータ値の関係式の中でおそらく最もよく引き合いに出され，証明も多数知られているものに「和公式」というものがある．これは重さと深さが一定の多重ゼータ値すべての和がリーマンゼータ値になるというエレガントな等式

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_i\geq 1, k_r\geq 2}} \zeta(k_1,\ldots,k_r) \;=\; \zeta(k)$$

のことであるが，私はこれの有限類似を以前予想した [9]．その当時（２０１０年の９月に数理研で講演している）はまだ $\mathcal{A}$ のことは知らなかったので $\bmod p$ での合同式として書いたのだが，それを $\mathcal{A}$-多重ゼータ値の言葉で書くと

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_i\geq 1, k_r\geq 2}} \zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r) \;=\; \Bigl(1+(-1)^r\binom{k-1}{r-1}\Bigr)Z(k)$$

となる．ここで $Z(k)$ は，

$$Z(k) \;:=\; \left(\frac{B_{p-k}}{k} \bmod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

で定まる量である（B_{p-k} はベルヌーイ数）．この予想は，$k_r \geq 2$ という条件の r を一般の位置に変えたものも含め，斎藤－若林 [16] が証明した．（ちなみに，どの k_i も 1 以上として対称な和をとると 0 になる．）そして村原 [13] が ζ^S 版の

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_i\geq 1, k_r\geq 2}} \zeta^{S}(k_1,\ldots,k_r) \;\equiv\; \Bigl(1+(-1)^r\binom{k-1}{r-1}\Bigr)\zeta(k) \mod \zeta(2)$$

を証明した（斎藤－若林の一般化の形で証明されている）．これを見ても分かるように，また他にもいくつかそれを示唆する結果があって，$\zeta(k)$ の，正確には $\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ の $\mathcal{A}$ 世界における類似物は $Z(k)$ と思われる．すなわち同型予想 (6) で右辺にある $\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ に $\mathcal{A}$ で対応するのは $Z(k)$ であると信じられる（$Z(k)$ は実際 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の元として書ける）．オイラーによる結果「k が偶数のときは $\zeta(k)$ は $\zeta(2)$ のべきの有理数倍である」ということと，「k が偶数なら $p > k+1$ なる奇素数 p について $B_{p-k} = 0$ である」という事実が対応している．また，次の "heuristic" ももっともらしい：

$$\zeta(k) \;\text{“}\underset{\text{Fermat}}{\equiv}\text{”}\; \zeta(k-(p-1)) \underset{\text{Euler}}{=} -\frac{B_{p-k}}{p-k} \equiv Z(k)_{(p)} \pmod{p}.$$

ついでに書くと，k が負のときは $\mathcal{A}$ において $Z(k) = \zeta(k)\ (\in \mathbf{Q} \subset \mathcal{A})$ が成り立っている（クンマーの合同式による）．

ところで，いかなる奇数 $k \geq 3$ に対しても，$\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ が 0 でないこと（そう信じられていると思う）は証明されていない．一方，いかなる奇数 $k \geq 3$ に対しても，$Z(k) \neq 0$ であるかどうか，まだ分かっていないようである．このことは，正則素数が無限にあるということが証明されれば，そこから従うことであるが，個別の k に対してはそれよりもずっと弱いことを言っていることに注意する．すなわち，$Z(k) \neq 0$ か？というのは，$\mathcal{A}$ の定義によれば,「十分大きなすべての素数 p に対して $B_{p-k} \equiv 0 \bmod p$ となる」ことが起こらない，ということである．言い換えると，固定された奇数 k に対し,「$B_{p-k} \not\equiv 0 \bmod p$ となる素数が無限に存在する」ということである．これを示すことが $\zeta(k) \bmod \zeta(2) \neq 0$ を示すことと同程度に難しいのであろうか．後者については，現時点では重さが異なる多重ゼータ値の間に線形関係がないと言うことは知られてないから，たとえば $\zeta(3)$ が $\zeta(2)$ の有理数倍ではない，$\zeta(2)^2$ の有理数倍でもない，等々，無限の可能性をつぶす必要がある．これはちょっと手がつかない感じではある．重さが違えば独立，ということが何らかの方法で一般的に分かったとすると，$\zeta(3) \bmod \zeta(2) \neq 0$ は言えるが，$\zeta(5) \bmod \zeta(2) \neq 0$ を言うには $\zeta(5)$ と $\zeta(2)\zeta(3)$ の独立性を示す必要がある.「重さが違えば独立」ということは正則素数の無限性ほど強くないのであろうか？ $\zeta^{\mathcal{A}}$ と ζ^{S} の同じ形の関係式でも証明の難易度に（今のところ）かなり差があると思われるものがあり，このあたりのことをつらつら考えていると何かと不思議な感に打たれる．それはともかく，$\zeta(5)$ の無理性を証明しようとしている人はいると思うが，$\zeta(5)$ と $\zeta(2)\zeta(3)$ が $\mathbf{Q}$ 上独立であるか，といった問題を考えている人はいるのであろうか．また，$Z(k) \neq 0$（またはより強く $Z(k) \notin \mathbf{Q}$）を岩澤理論や ABC 予想などから導くことは出来ないのであろうか．

4. おわりに

私は伊原康隆先生の指導のもと，$\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群へのガロア表現に関係する仕事で数学者としての出発をしたが，その方面では優秀な後輩が続々と出てきた頃に挫折してしまった．以後雑多なことをやってきた中で，$\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のガロア表現から見ると「裏側」というか，表裏一体のホッジ側にあたる多重ゼータ値の研究を，ザギエさんや故荒川恒男さんの大きなお蔭もあり，何とか今日まで続けてこられた．ブラウンのような，ガロア側にも実質的な進展をもたらすような（言わば恩返し的な）研究はついぞ出来ずじまいでいるし，今後も出来るとは思われないのだが，2 節や 3 節で述べたような予想を提出し得たことは数学者冥利に尽きるというもので，これまでに関係したすべての人に感謝している．また思わぬことで今回講演の機会を頂いたことにもお礼を申し上げます．

参考文献

[1] F. Brown, Mixed Tate motives over **Z**, Annals of Math. **175** (2012), 949–976.

[2] P. Deligne and A. B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[3] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, **20** (1776), 140–186.

[4] L. Euler, Leonhart Euler Correspondence, Opera ominia, series quarta A, val IV, Part I and II.

[5] M. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math, **152** (1992), 275–290.

[6] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.

[7] M. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math., **69** (2015), 345–366.

[8] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.

[9] 金子昌信, 有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式，数理解析研究所講究録 **1813** (2012), 27–31.

[10] 金子昌信, 有限多重ゼータ値，数理解析研究所講究録別冊に掲載予定.

[11] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, preprint arXiv: 1605.03117.

[12] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[13] H. Murahara, A note on finite real multiple zeta values, Kyushu J. Math. **70** (2016), 1 97–204.

[14] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, J. Number Th., **74** (1999), 39–43.

[15] G. Racinet, Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **95** (2002), 185–231.

[16] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 1069–1076.

[17] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math., **149** (2002), 339–369.

[18] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, arXiv:1405.6499.

[19] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, First European Congress of Mathematics, Volume II, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.

[20] J. Zhao, *Multiple Zeta Functions, Multiple Polylogarithms and Their Special Values* (Series on Number Theory and Its Applications), World Scientific Co. 2016.