RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B68 (2017), 175–190

有限多重ゼータ値 (Finite multiple zeta values)

By

金子昌信 (Masanobu Kaneko)*

Abstract

We give an overview of the "finite multiple zeta values" in the sense of Zagier, who has introduced a new framework of considering the "mod p multiple harmonic sums" studied by Hoffman and Zhao among others since ten years. We present a conjecture predicting a connection between finite multiple zeta values and ordinary multiple zeta values, by defining a real counterpart ("symmetric multiple zeta value" or "finite real multiple zeta value") of the finite multiple zeta value, and give some results and conjectures concerning relations among finite (and symmetric) multiple zeta values, which are analogous to the known relations in the theory of ordinary multiple zeta values. Several properties of the symmetric multiple zeta values are also given.

§1. 有限多重ゼータ値，定義と「主予想」

ここでいう「有限多重ゼータ値」とは，Hoffman が [7] で "mod p multiple harmonic sum" と呼んでいるものを，一つの固定した素数ではなく，すべての素数について同時に考えたもので，Zagier が最初にそのような対象を考える枠組みを提唱した．これは非常にすぐれた枠組みであって，従来の実数上の多重ゼータ値，あるいは p 進多重ゼータ値や「モチビック」多重ゼータ値について考えられてきたような，多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間ないし $\mathbb{Q}$ 代数を，この「有限多重ゼータ値」に対しても考えることが出来る． そして驚くべきことに，その次元や代数構造について，従来の場合にきれいに対応する形で予想を述べることが出来る．この予想が示唆するところを信じれば，この有限多重ゼータ値も十分豊かな内容を持ち，興味深い対象であると言えよう．

以下ではまず有限多重ゼータ値の定義を述べ，次元予想および代数構造に関する「主予想」を提出する．例やいくつかの注意を述べた後 §2 で有限多重ゼータ値のいろいろな

Received May 26, 2014. Revised August 12, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11M32, Secondary 11M38.
This work is partially supported by the Japan Society for the Promotion of Science, Grant-in-Aid for Scientific Research (S) 24224001 and (B) 23340010.
*九州大学数理学研究院 (Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan).
e-mail: mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp

関係式について，分かっていることや予想を述べる．§3 で "multi-poly Bernoulli" 数との関係を短く紹介した後，最後の §4 で，有限多重ゼータ値の実数世界での対応物と目される「対称多重ゼータ値」（ないし「有限実多重ゼータ値」）を定義し，これについて分かっていることを述べる．詳細は共同研究者である Don Zagier 氏との共著論文 [14] として発表の予定である．

次のような環 $\mathcal{A}$ を考える．

$$\mathcal{A} := \frac{\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}{\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = \{(a_{(p)})_p \,|\, a_{(p)} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}/\sim .$$

ここで，p はすべての素数をわたり，$(a_{(p)})_p \sim (b_{(p)})_p$ は高々有限個の例外を除き $a_{(p)} = b_{(p)}$ となることを意味するものとする．$\mathcal{A}$ は成分ごとの演算によって和と積を入れることで環になる．$\mathcal{A}$ の元（の代表）$a = (a_{(p)})_p$ の p 成分を $a_{(p)}$ で表すことにする．しばしば代表 $a = (a_{(p)})_p$ を以て $\mathcal{A}$ の元と言うことがあるが，混乱はないと思われるのでご容赦願いたい．また $(a_{(p)})_p$ と書きながら有限個の p については $a_{(p)}$ が定義されていない場合もある．そのときは例えば $a_{(p)} = 0$ など何か値を適当に定めておくことで（その定め方によらず）$\mathcal{A}$ の元が定まるので，そのように理解されたい．

x を有理数とするとき，x の分母を割らない素数 p については $x \bmod p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考えることができるから，写像 $\mathbb{Q} \ni x \mapsto (x \bmod p)_p \in \mathcal{A}$ が得られるが，これは明らかに単射準同型である（x の分子を割る素数は有限個しかない）．以下これにより $\mathcal{A}$ を $\mathbb{Q}$ 代数として考える．$\mathcal{A}$ は $\left(\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，あるいは $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ をねじれ部分で割ったものと見てもよい．

定義 1.1. 自然数の組 $(k_1, \ldots, k_r)$ に対し有限多重ゼータ値 $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) \in \mathcal{A}$ を

$$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r)_{(p)} = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r<p} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \mod p \tag{1.1}$$

で定義する[1]．

これに対し，実数の場合と同様，$\mathcal{A}$ のなかで $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r)$ たちが張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を考える．

定義 1.2. 各整数 $k \geq 0$ に対し $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$ を，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1,\, k_i\geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) \quad (k \geq 1)$$

[1] 斎藤さんの稿と和の順序が反対であることに注意．多重ゼータ値の定義の和の順序については人によってまちまちで統一される見込みはない．(私や Zagier さんなど，本人自身の論文の間でも異同があるから話にならない...）ここでは $\mathcal{A}$ の上付き，下付きで区別されていると思って下さい．

で定義し，それら全体の和 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ を

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$$

と定義する．

有限和には収束の問題がないので，インデックスの成分 k_i は 0 または負でもよい訳であるが，ここでは正の数のみに限定する．実際は非正の数を許しても全体としての $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は変わらないことが容易に示されるが[2]，例えば

$$\zeta^{\mathcal{A}}(-1,3,2) = \frac{1}{2}\zeta^{\mathcal{A}}(1,2) - \frac{1}{2}\zeta^{\mathcal{A}}(2,2)$$

のように，異なる重さを持つ値の間の関係が生じてくる[3]．また実は，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の定義において和を $k_r \geq 2$ に制限しても空間は変わらないことが示される．

この空間の次元について，Zagier は数値計算[4]により次を予想した．

次元予想 (Zagier [14]) 数列 d_k を $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, および漸化式

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3)$$

で定めるとき，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_{k-3}\ (= d_k - d_{k-2}) \quad (\forall k)$$

であろう．

この数列は，実数の場合の（決まった重さの）多重ゼータ値が張る空間の次元を与えると（やはり Zagier により）予想されている数列であり，その場合は重さ k の空間の次元が d_k と予想されている（そしてその値が次元の上限を与えていることが寺杣，Goncharov-Deligne により証明されていることは周知の通り）．今の場合の予想値 d_{k-3} は，重さ k の p 進多重ゼータ値の空間の次元，あるいは実数上の多重ゼータ値を "mod $\zeta(2)$" で割った空間の次元に等しいと予想されている数である．有限多重ゼータ値を考えたときに同じ数字が出てくるのが偶然ではなさそうだということを裏付ける予想を後で述べる．

有限多重ゼータ値を定義する (1.1) の有限和は，積を同様の値の和に書き換える所謂「調和積」又は「級数シャッフル積」の規則を満たし，

$$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1)\zeta^{\mathcal{A}}(k_2) = \zeta^{\mathcal{A}}(k_1,k_2) + \zeta^{\mathcal{A}}(k_2,k_1) + \zeta^{\mathcal{A}}(k_1+k_2)$$

[2]たとえば $k_i \leq 0$ なら，和 $\sum_{m_{i-1}<m_i<m_{i+1}} m_i^{|k_i|}$ を関ーベルヌーイのべき乗和公式を使って計算することで低い深さの和に帰着していく．

[3]$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ の重さとは $k_1+\cdots+k_r$ のことであるが，一つの p を固定して $\bmod p$ だけで考える限り，$k_1+\cdots+k_r$ は $\bmod (p-1)$ でしか意味を持たない．$\mathcal{A}$ の中で考えることによって通常と同じように重さを考えることが出来る．

[4]その方法は全く非自明なもので，最初に聞いたときは非常に感心した．[14] で概略が説明される．

のような関係式が成り立つ．これによって $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる．この代数について，我々は次を予想する．$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ を「古典的な」(通常の実数上の場合をこう言ってしまう) 多重ゼータ値で $\mathbb{Q}$ 上生成される $\mathbb{Q}$ 代数とする．これを $\zeta(2)$ で生成される単項イデアルで割った商代数 $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ の元 $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,\ldots,k_r)$ を具体的に構成することができて（正確な定義は §4 で述べる），次が成り立つであろう．

主予想 [14]　$\mathbb{Q}$ 代数の同型

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$$

で，$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ が $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,\ldots,k_r)$ に対応するものが存在する．

近年 Brown（[3] など）による研究の進展が著しい「モチビック多重ゼータ値」の代数と $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ の構造が予想通り同型であるとすれば，

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \overset{?}{\simeq} \mathbb{Q}\langle z_3, z_5, z_7, z_9, \ldots\rangle_{\text{ш}}$$

と予想される．この右辺は，ベクトル空間としては 3 以上の奇数で番号づけられた非可換な不定元の単項式（z_k の重さを k とする）で生成され，そこに「シャッフル積 ш」（例えば $z_3z_5 ш z_7 = z_7z_3z_5 + z_3z_7z_5 + z_3z_5z_7$）により次数付き可換代数の構造を入れたものである（さらにここに Hopf 代数の構造が入る）．主予想が正しくかつこの予想も正しいとすると，次元予想は従う．

この次元予想によれば，有限多重ゼータ値についてもやはり豊富な関係式の存在が予期され，それらを見つけることが一つの課題となる．関係式については次節で述べるとし，その前に $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値の例をいくつか述べる．

例 1.3.　深さ 1 の場合，k が 0 でなければ

$$\zeta^{\mathcal{A}}(k) = 0$$

となる．これは $p-1 \nmid k$ であれば $\sum_{m=1}^{p-1} m^{-k} \equiv 0 \pmod{p}$ であることから従う．$\zeta^{\mathcal{A}}(0) = -1$ である．

深さが 2 のときは，

$$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,k_2) = (-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1} Z(k_1+k_2) \quad (\forall k_1,k_2 \geq 1) \tag{1.2}$$

となる．ここに，$k \geq 2$ に対し $Z(k) \in \mathcal{A}$ は

$$Z(k)_{(p)} = \frac{B_{p-k}}{k} \bmod p \quad (B_{p-k}\text{はベルヌーイ数})$$

で定めたものである．公式 (1.2)（の p 成分を取りだしたもの）は Hoffman [7], Zhao [23] にあるが，関ーベルヌーイのべき乗和公式を用いて容易に計算できる．実は $\zeta^{\mathcal{A}}(1,k-1)$ は古くすでに Vandiver [20] に（本質的に同値な公式が）出ている．

上に見たように,「リーマンゼータ値」$\zeta(k)$ の素朴な類似物 $\zeta^{\mathcal{A}}(k)$ は 0 であるが，この $Z(k)$ が $\zeta(k)$ の（正確には $\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ の）実質的な類似であると考えられる．その傍証はこの小論でいくつか述べるが，ひとつの発見的な説明は以下の通り（最初の合同式は数学的に意味がない）．

$$\zeta(k) \text{ “} \underset{\text{Fermat}}{\equiv} \text{” } \zeta(k-(p-1)) \underset{\text{Euler}}{=} -\frac{B_{p-k}}{p-k} \equiv Z(k)_{(p)} \pmod{p}.$$

ベルヌーイ数 B_n は n が 3 以上の奇数のときは 0 であるから，k が 2 以上の偶数のとき $Z(k)=0$ となる．これが，k が偶数のとき $\zeta(k) \in \zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$（オイラー）と対応している．

問題　k が 3 以上の奇数のとき，$Z(k) \neq 0$ か？

もし正則素数が無限個あることが証明されれば，$B_{p-k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ となる素数 p が無限個あることになるので，この答は肯定的となる．しかしそれは今のところ知られていないようであるし，ひとつの固定された奇数 k に対して $B_{p-k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ となる p が無限にあるかどうかも，岩澤理論を専門にされている方など何人かに伺ってみたが，どうやら分かっていないようである．これは面白い問題ではないかと思う．実数世界では $\zeta(3)$ の無理性が証明され，$\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$ の中に無限個の無理数があることも分かっている．一方 $\mathcal{A}$ においては，$Z(k) \neq 0$ である奇数 k が一つも知られていないのである！従って $Z(k) \notin \mathbb{Q}$ か? ということも今は全く分からない．今後の問題であろう．主予想を仮定したとしても，現状では $Z(k) \neq 0$ は出ない．というのは $\zeta(k)$ (k は奇数）と π のべきが $\mathbb{Q}$ 上線形独立かどうかとか，$\zeta(k)$ が $\zeta(2)$ かける多重ゼータ値という形にはならないかということについて何も分かっていないからである．

ここでついでに，少し本論から外れるが[5]，別の興味深い $\mathcal{A}$ の元について述べておく．$x \in \mathbb{Q}^{\times}$ に対し $\log_{\mathcal{A}}(x) \in \mathcal{A}$ を

$$\log_{\mathcal{A}}(x) := \left(\frac{x^{p-1}-1}{p} \bmod p \right)_p \in \mathcal{A}$$

で定義する（いわゆるフェルマー商）．フェルマーの小定理によってこの定義は意味をもち，$x, y \in \mathbb{Q}^{\times}$ に対して $\log_{\mathcal{A}}(xy) = \log_{\mathcal{A}}(x) + \log_{\mathcal{A}}(y)$ が成り立つこと，$\log_{\mathcal{A}}(\pm 1) = 0$ は容易に確かめられる．さて，それでは準同型写像

$$\log_{\mathcal{A}} : \mathbb{Q}^{\times} \longrightarrow \mathcal{A}$$

の核は $\{\pm 1\}$ であろうか？ つまり，$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ が有限個を除くすべての素数 p で成り立つような有理数 x は ± 1 に限るか？これは非常にもっともらしく思われるが現在のところ証明されていないようである．しかし，abc 予想が正しければこの事実が従うこ

[5] 実は $\log_{\mathcal{A}}(2), \log_{\mathcal{A}}(3)$ はディリクレ L 値の $\mathcal{A}$ 版と見ることが出来るので，関係は大いにある．本稿ではこの方向の一般化については述べない．今後の課題であるとしておく．

とが知られている [18][6]．またこの問題を以前伊原康隆先生が論じておられた「数の微分」の言葉 [8] で言うと，有理数 x に対し,「微分」'dx' が有限個を除くすべての素数で零点を持てば $x=\pm 1$ か？という問題になる．

§ 2. 有限多重ゼータ値のいろいろな関係式

例えば定義から簡単に分かる関係として（定義の和の $m_i \to p-m_i$ とする）

$$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_r)=(-1)^{k_1+\cdots+k_r}\zeta^{\mathcal{A}}(k_r,\dots,k_1)$$

があり，[7], [23] にはそのほかいくつかの関係式が証明されている．ここでは古典的な場合との類似の観点から，有名な関係式の系列について述べてみたい．

和公式 古典的な場合の「和公式」

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_r\ge 2}}\zeta(k_1,\dots,k_r) \;=\; \zeta(k)$$

はよく知られ，何通りもの証明が知られている．その有限類似を筆者は以前 [11] において予想した． それはまだ $\mathcal{A}$ という環で考える枠組みを知る前だったので，各素数について成り立つ合同式という形で提唱したものであったが，それを $\zeta^{\mathcal{A}}$ の言葉で書くと，各重さ k，深さ r について

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_r\ge 2}}\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_r) \;=\; \Bigl(1+(-1)^r\binom{k-1}{r-1}\Bigr)Z(k)$$

が成り立つか，という問題になる．これは最近 Saito-Wakabayashi [16] により一般化されて証明された．収束の問題がないので $k_r\ge 2$ という条件は意味をなさないように思われるのであるが，この条件を課すことで類似の公式が成り立つのである．$k_r=1$ まで含めると左辺の和は 0 になる．この公式は,「等号付き多重ゼータ値」$\zeta^\star(k_1,\dots,k_r)$ に対する和公式が

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_r\ge 2}}\zeta^\star(k_1,\dots,k_r) \;=\; \binom{k-1}{r-1}\zeta(k)$$

であることを考えると，面白い形をしている．また有限多重ゼータ値の等号付き版 $\zeta^{\mathcal{A},\star}$ を考えたときの和公式は

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_r\ge 2}}\zeta^{\mathcal{A},\star}(k_1,\dots,k_r) \;=\; \Bigl((-1)^r+\binom{k-1}{r-1}\Bigr)Z(k)$$

[6] この文献を山下剛氏に教わった．

となっていて，これも [16] で証明されている．

和公式の変種として Le-Murakami の関係式や Aoki-Ohno の関係式と呼ばれるものがあるが，それらの類似として

$$\sum_{\Bbbk\in I(k,s)}(-1)^{\mathrm{dep}(\Bbbk)}\zeta^{\mathcal{A}}(\Bbbk) \overset{?}{=} 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})Z(k)$$

および

$$\sum_{\Bbbk\in I(k,s)}\zeta^{\mathcal{A},\star}(\Bbbk) \overset{?}{=} 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})Z(k)$$

を予想する．ここに $I(k,s)$ は重さが k,「高さ」(インデックスの 1 より大きい成分の個数）が s であるような収束インデックス（最後の成分が 2 以上であるもの）の集合を表し，$\mathrm{dep}(\Bbbk)$ はインデックス $\Bbbk$ の深さを表す．右辺はともに同じ形をしている．古典的な場合の Aoki-Ohno の関係式は

$$\sum_{\Bbbk\in I(k,s)}\zeta^{\star}(\Bbbk) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k),$$

Le-Murakami の関係式は重さが奇数のときは（双対性より）自明で，偶数のときは右辺はベルヌーイ数で書けるやや複雑な有理数かける $\zeta(k)$ である（正確な形は省略）．これら一連の予想の右辺に $Z(k)$ が現れているのが，$Z(k)$ を $\zeta(k)$ の $\mathcal{A}$ 類似とする根拠の一つである．

すべての予想の根拠はひとえに数値的なものであり（および古典的な場合との類似性，ただし $s=1$ といったごく特別な場合に証明が得られているものもある），Zagier による Pari-GP プログラムを用いて，例えば 500 以下の素数について（両辺のその素数成分が一致することを）重さが 20 位までなら容易に確かめられる．

双対性　古典的な多重ゼータ値について成り立つ双対性と呼ばれる簡明な関係式がある．Hoffman は [7] においてインデックスに対する別の双対を定義し,「等号付き」有限多重ゼータ値についての双対性を証明した．二つのインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ と $(l_1,\dots,l_s)$ が Hoffman の意味で双対の関係にあるとは，すべての k_i, l_j を $1+1+\cdots+1$ と書いたとき，一方のコンマ「,」を和「+」に，和をコンマに変えて他方が得られることを言う[7]．$(k_1,\dots,k_r)$ の Hoffman の意味での双対を $(k_1,\dots,k_r)^\vee$ と書くことにする．例として，

$$(n)^\vee = (1+\cdots+1)^\vee = (\underbrace{1,\dots,1}_{n}),\ (2,1)^\vee = (1+1,1)^\vee = (1,1+1) = (1,2)$$

など．このとき両者の重さは等しく，深さについては「深さの和 = 重さ +1」の関係がある．双対の双対は元に戻る．さてこのとき，$\zeta^{\mathcal{A},\star}$ の Hoffman 双対性は次の形をとる．

$$\zeta^{\mathcal{A},\star}(k_1,\dots,k_r) = -\zeta^{\mathcal{A},\star}((k_1,\dots,k_r)^\vee). \tag{2.1}$$

[7] この説明の仕方は今冨耕太郎氏に教わった．

これを $\zeta^{\mathcal{A}}$ の言葉で書き換えると（この書き換えは自明ではない．Hoffman [7, 定理 4.7] 参照），任意のインデックス $\Bbbk=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^{\mathcal{A}}(\Bbbk) \;=\; (-1)^r \sum_{\Bbbk'\succeq\Bbbk} \zeta^{\mathcal{A}}(\Bbbk')$$

となる．ここに，二つのインデックス $\Bbbk$ と $\Bbbk'$ が関係 $\Bbbk' \succeq \Bbbk$ にあるとは，$\Bbbk$ が $\Bbbk' = (k'_1,\dots,k'_s)$ のコンマ「,」のいくつかを和「+」に変えて得られることを言う．例えば

$$\begin{aligned}&(1,3,2,1)\succeq(1+3,2,1)=(4,2,1),\quad (1,3,2,1)\succeq(1+3,2+1)=(4,3),\\ &(1,3,2,1)\succeq(1+3+2+1)=(7)\end{aligned}$$

など．

Ohno の関係式　古典的な意味で双対なインデックスを $(k_1,\dots,k_r)$, $(k'_1,\dots,k'_{r'})$ とする（定義は省略する．例えば [1] 定義 1.2.7 参照）．これらと任意の整数 $l\ge 0$ に対し，

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=l\\ e_i\ge 0}} \zeta(k_1+e_1,\dots,k_r+e_r) \;=\; \sum_{\substack{e'_1+\cdots+e'_{r'}=l\\ e'_i\ge 0}} \zeta(k'_1+e'_1,\dots,k'_{r'}+e'_{r'})$$

が成り立つ，というのがいわゆる Ohno の関係式である．$l=0$ の場合が古典的な双対性に他ならない．これの $\zeta^{\mathcal{A}}$ 類似として次を予想する．まず $(k_1,\dots,k_r)$ と $(k^*_1,\dots,k^*_{r^*})$ は Hoffman の意味での双対インデックスとする．これらと整数 $l\ge 0$ に対し

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=l\\ e_i\ge 0}} \zeta^{\mathcal{A}}(k_1+e_1,\dots,k_r+e_r) \;\stackrel{?}{=}\; \sum_{\substack{e^*_1+\cdots+e^*_{r^*}=l\\ e^*_i\ge 0}} \zeta^{\mathcal{A}}\big((k^*_1+e^*_1,\dots,k^*_{r^*}+e^*_{r^*})^\vee\big)\,.$$

ここで右辺の中身はもう一度 Hoffman の双対を取っていることに注意．従って $l=0$ の場合は自明な関係式となる．$\zeta^{\mathcal{A},\star}$ についての Hoffman の双対定理 (2.1) を拡張する形での Ohno 関係式の類似物があるのかは分からない．$l=1$ の場合は，後で述べる複シャッフル関係式を用いて井原庸介氏（九大）により証明され，さらに一般の場合も小山宏次郎氏（九大）によって証明された（いずれも九州大学修士論文）．

その他　他に，一種散発的なものとして，母関数の間の関係

$$\sum_{r=0}^{\infty} \zeta^{\mathcal{A}}(\underbrace{1,2,1,2,\dots,1,2}_{2r})\,x^r \;\stackrel{?}{=}\; \exp\Big(\sum_{\substack{n=1\\ n:\mathrm{odd}}}^{\infty} \zeta^{\mathcal{A}}(1,3n-1)\frac{x^n}{n^2}\Big)$$

や，任意の $a,b\ge 0$ に対する

$$\zeta^{\mathcal{A}}(\underbrace{2,\dots,2}_{a},3,\underbrace{2,\dots,2}_{b}) = (-1)^{a+b}2\left[\binom{k}{2a+1}-\binom{k}{2b+1}\right]Z(k),$$

$$\zeta^{\mathcal{A}}(\underbrace{2,\dots,2}_{a},1,\underbrace{2,\dots,2}_{b}) = (-1)^{a+b}2\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\left[\binom{k}{2b+1}-\binom{k}{2a+1}\right]Z(k)$$

なども予想した．(k は最初の式では $2a+2b+3$, 二つ目では $2a+2b+1$.) 母関数の予想式は古典的な場合の

$$1 \; + \; \sum_{r=1}^{\infty}\zeta(\underbrace{k,k,\dots,k}_{r})\,x^r \;=\; \exp\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\zeta(kn)}{n}x^n\Bigr)$$

（の $k=3$ の場合）に対応していると思われる．あとの二つは Brown の大きな仕事（Hoffman 予想の解決と様々な重要な帰結）[3] で鍵となった，Zagier による等式（その論文の定理 4.1，また [22]）の類似物であるが，これらは Pilehrood-Pilehrood-Tauraso [15] で証明されている．

また，これも古典的に有名な等式の類似である

$$\zeta^{\mathcal{A}}(\underbrace{1,3,\dots,1,3}_{2r}) \;=\; 0$$

も [11] で予想していたが (それは実は Zhao [23] で証明されていた)，これを含む Bowman-Bradley の関係式の類似物をさらに一般化したような $\zeta^{\mathcal{A}}$ の関係式が Saito-Wakabayashi [17] において証明されている．

複シャッフル関係式　さて，以上一連の予想は 2012 年の夏頃までには得られていて，これらすべてを仮定して次元が幾つまで落ちるかを計算してみたところ，まだ予想次元にまで落とすには足らなかった（重さ 9 まではよいが，10 以降不足する）．古典的な場合に予想次元まで落とすであろうと期待されている関係式の族として「アソシエータ関係式 (associator relations)」,「複シャッフル関係式 (double shuffle relations)」があった．有限多重ゼータ値についてこれらの対応物はあるか？というのは当然浮かぶ疑問であるが，複シャッフル関係式については，最近次の (2.3) 式を発見，証明し，これと (2.2) を合わせると予想次元まで落とせるのではないか，と予想するに至った．すなわち，

予想： 次の線形関係式の族は $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の次元を予想値まで落とすに足るだけの独立な関係式を含むであろう：

(2.2)　$\zeta^{\mathcal{A}}((\ell)*\mathbf{k}) \;=\; 0 \qquad (\forall\ell\geq 1,\ \forall\mathbf{k}\ \text{ s.t. }\ \ell+|\mathbf{k}|=k),$

(2.3)　$\zeta^{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1 ⧢ \mathbf{k}_2) \;=\; (-1)^{|\mathbf{k}_2|}\zeta^{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1,\overline{\mathbf{k}_2}) \qquad (\forall\mathbf{k}_1,\ \forall\mathbf{k}_2\ \text{ s.t. }\ |\mathbf{k}_1|+|\mathbf{k}_2|=k).$

ここで記号の意味であるが，それぞれの左辺は，二つのインデックスに対する通常の多重ゼータ値の積を「級数シャッフル積」および「積分シャッフル積」で展開したときに得られる一次結合において，形式的に ζ を $\zeta^{\mathcal{A}}$ に変えたもの，$|\mathbf{k}_2|$ はインデックスの重さ，$\overline{\mathbf{k}_2}$ は $\mathbf{k}_2$ を逆順に読んだインデックス，$(\mathbf{k}_1,\overline{\mathbf{k}_2})$ と書いているのは二つのインデックスの連結を表す．

式 (2.2), (2.3) は容易に証明出来る．最初の式 (2.2) は $\zeta^{\mathcal{A}}$ が級数シャッフル積の規則を満たすことと，深さ 1 の $\zeta^{\mathcal{A}}$ が 0 であること（$\zeta^{\mathcal{A}}(\ell)=0$) による帰結である．次の (2.3) も多重対数関数のシャッフル積を用いて簡単に示すことが出来る．このことは安田正大氏も指摘し，またやや弱い（と思われる）式を Brown の学生の Jarossay が見つけ同様の方法で証明しているようである．また，あとで述べるように，これらの実数版である「対称多重ゼータ値」類似も証明がされている．古典的な場合の複シャッフル関係式は，二つの多重ゼータ値の積を二通りに計算してそれらを等しいとおいて得られる関係式であった（正確には，次元を予想値まで落とすには発散の「正規化」を行って得られるものまで含めることが必要）．今の場合，式 (2.3) は積に由来するものではないようである．

この二つの関係式を用いて次元が予想値以下にまで落とせることを，Mathematica により重さ 15 まで確かめた．また町出智也氏は sage を用いて重さ 18 まで予想値に落ちることを確かめられた．しかしながら，式 (2.2) において，一方のインデックスとして深さ 1 のもののみを取っている（そうしないと右辺が一般には 0 にならない）点で，本当にすべての線型関係式を生み出しうるのか，どこまで理論的根拠があるのか不明な予想ではあるので,「作業仮説」くらいにしておくのがよいかも知れない．

Hoffman の "parity result"　Hoffman の論文 [7] はいろいろと面白い結果を含んでいるが，その一つに "parity result" がある．すなわち

定理 2.1 (Hoffman [7, Theorem 6.4 の前])．　$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ の重さと深さの偶奇が同じとき，$\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ は深さのより低い $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値と，$\zeta^{\mathcal{A}}$ 値の積たちの一次結合で書ける．

これは古典的な場合の同様の結果（[19], [9]）の類似であるが，古典的な場合は「偶奇が異なるとき」深さが落ちる，というものであったことに注意．このずれは何を意味するか． 前節の例で見たように，深さ 1 の $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値は 0 であり，深さ 2 のものは $\zeta(k)$ の類似物と見なされる $Z(k)$ の定数倍で書けていた．つまり深さが最初から一つ低いもののように振る舞っている．このことを主予想を通して裏付ける結果を §4 において述べる．すなわち $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ の「本当の」深さは $r-1$（以下）と見るのがどうやら正しいのである．そして，parity result によると，重さと深さの偶奇が等しい $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値の「本当の」（という一つの意味は，主予想を通して対応する古典的なゼータ値の）深さは 2 小さい．

モジュラー形式との関係　前に述べたように深さが 2 までの $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値は完全に分かっていて，次の深さ 3 の場合が実際は深さ 2 と見られるべきものである．古典的な二重ゼータ値はモジュラー形式と密接な関係を持っていた（[5]）．そこで重さが 24 までについて数値実験を行った結果，重さが偶数 k で深さが 3 以下の $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元が $k/2-2-\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ となっているらしいことが観察された．ここに $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ は，モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の尖点形式のなす空間を表す．

前述の parity result によれば重さが偶数で深さが 4 の $\zeta^{\mathcal{A}}$ 値も深さが 2 のごとくに振る舞っているはずである．[5] において，$\zeta(\mathrm{odd},\mathrm{odd})$ という元が二重ゼータ値の空間を張っていたことをヒントにし，$\zeta^{\mathcal{A}}(1,\mathrm{even},1,\mathrm{even})$ という形の元を考えてみる．重さを k

としたとき k_1, k_2 が偶数で $k_1+k_2=k-2$ となるようなインデックス $(1,k_1,1,k_2)$ は $k/2-2$ 個ある．実験が示唆するのは，これらの形の元の間に丁度 $\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個の線形関係が成り立つ，というものである．例を挙げると[8],

$$2\zeta^{\mathcal{A}}(1,2,1,8) - 18\zeta^{\mathcal{A}}(1,4,1,6) - 9\zeta^{\mathcal{A}}(1,6,1,4) - 16\zeta^{\mathcal{A}}(1,8,1,2)=0,$$

$$\begin{aligned}327\zeta^{\mathcal{A}}(1,2,1,12) + 111\zeta^{\mathcal{A}}(1,4,1,10) + 53\zeta^{\mathcal{A}}(1,6,1,8)&\\ + 59\zeta^{\mathcal{A}}(1,8,1,6) + 120\zeta^{\mathcal{A}}(1,10,1,4) + 366\zeta^{\mathcal{A}}(1,12,1,2)&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}55778\zeta^{\mathcal{A}}(1,2,1,14) + 16470\zeta^{\mathcal{A}}(1,4,1,12) + 5615\zeta^{\mathcal{A}}(1,6,1,10) + 3560\zeta^{\mathcal{A}}(1,8,1,8)&\\ + 6045\zeta^{\mathcal{A}}(1,10,1,6) + 17210\zeta^{\mathcal{A}}(1,12,1,4) + 57608\zeta^{\mathcal{A}}(1,14,1,2)&=0.\end{aligned}$$

[5] ではこのような関係を複シャッフル関係式を使って証明した．ここでも先の (2.2), (2.3) を用いた同様の証明が出来るのであろうか．しかしまず関係式の一般的な形，あるいは [5] におけるように，モジュラー形式に付随する「周期多項式」から $\zeta^{\mathcal{A}}(1,\mathrm{even},1,\mathrm{even})$ たちの関係式を作り出す具体的な仕組み，を見いださねばならない．

さらには，最近の Brown [4] の「純奇多重ゼータ値」についての結果や予想の $\mathcal{A}$ 類似についても何か言えることがあるか，興味のあるところである．

§3. 有限多重ゼータ値と multi-poly-Bernoulli 数との関係

有限多重ゼータ値の p 成分は multi-poly-Bernoulli 数という数で与えられる． これは「高さ 1」という特別な場合に [11], [13] などで指摘していたが，一般に [10] において証明した．証明は別に難しくはなく， multi-poly-Bernoulli 数の定義として従来とは異なるものを採用したことが効いて，結果が単純になる[9]． [10] でのインデックスの順序はこの小論と逆であるので，この節でのみそちらを採用するとし，有限多重ゼータ値は和を逆にした $\zeta_{\mathcal{A}}$ を使うとする．(すなわち $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)=\zeta^{\mathcal{A}}(k_r,\ldots,k_1)$.)

まず「多重ベルヌーイ数」([12]) のさらなる多重化 $C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}$ を，母関数を用いて

$$\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\frac{t^n}{n!}$$

で定義する．ここに $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ は

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z) = \sum_{m_1>\cdots>m_r>0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}.$$

(従来の定義では左辺は $(e^t-1)^r$ で割っていた.) このとき，次が成り立つ．

[8] これらのそれぞれは，見つけてしまえば，先に挙げた複シャッフル関係式から導けることは確かめられる．

[9] Hamahata-Masubuchi [6] などで採用されている定義（それはもともと筆者が [2] で書いた定義なのだが）を用いても書き表すことは出来るのだが，重さが混じった余り美しくない形をとってしまう．

定理 3.1. 任意の $r \geq 1$ と $k_i \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)_{(p)} \;=\; -C_{p-2}^{(k_1-1,k_2,\ldots,k_r)} \bmod p.$$

より一般に $r \geq 1$, $j \geq 0$ および $k_i \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j},k_1,\ldots,k_r)_{(p)} \;=\; -C_{p-j-2}^{(k_1-1,k_2,\ldots,k_r)} \bmod p.$$

最初の式で k_1 は 1 でもよい．つまり最初に 1 が並んでいるような場合は幾通りもの公式があることになる．この定理と，上付き指数が負の場合の poly-Bernoulli 数の双対性 $C_n^{(-k-1)} = C_k^{(-n-1)}$ を用いて，次の「高さ 1」の場合の Hoffman の双対定理を証明することが出来る．

定理 3.2 (Hoffman [7, Theorem 5.2]). 任意の自然数 k, $n \geq 1$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) \;=\; \zeta_{\mathcal{A}}(n,\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}).$$

§ 4. 対称多重ゼータ値

次のような二通りの和を考える[10]．

$$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r) :=\; \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{*}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{*}(k_r,\ldots,k_{i+1}) \,,$$

$$\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r) :=\; \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+1}) \,.$$

ここで右辺の ζ^* や $\zeta^{ш}$ は，インデックスの右端に 1 がくる場合に調和積またはシャッフル積を用いて正規化した値を表す．正規化については [1], [9] を参照のこととし，ここでは定義を省略する．実は，右辺に現れる正規化として，“$T = \zeta(1)$” を残した，$\mathbb{R}[T]$ に値をもつ

$$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r) :=\; \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{*}(k_1,\ldots,k_i;T)\zeta^{*}(k_r,\ldots,k_{i+1};T) \,,$$

$$\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r) :=\; \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i;T)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+1};T)$$

を採用して定義をしても，この値が T によらない実数であることが証明できる．

[10] このような和を考えた動機は Kontsevich が Zagier に宛てた私信の中の深さ 2 の場合の示唆による．

この定義（とくに $*$ を使った方）は，形式的には，0 以外の整数に順序 $\prec$ を

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec (\infty = -\infty) \prec \cdots - 3 \prec -2 \prec -1$$

を入れたときの和

$$\sum_{\substack{m_1 \prec \cdots \prec m_r \\ m_i \neq 0}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

を考えることに相当する[11]．$m_1 \prec \cdots \prec m_r$ において m_1 から m_i までが（通常の意味で）正，m_{i+1} から m_r までが負だとすると，$0 < m_1 < \cdots < m_i$ と $0 < -m_r < \cdots < -m_{i+1}$ が独立に動いて，項 $(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta(k_1,\ldots,k_i)\zeta(k_r,\ldots,k_{i+1})$ が出てくる．このときに k_i や k_{i+1} が 1 だと発散するので，正規化をしているのである．すべての k_i が 2 以上なら正規化は不要で $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r) = \zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r)$ である． また安田正大氏はこの新しい順序が通常の不等式で $1/m_1 > \cdots > 1/m_r$ と書けること，および和の範囲を $|m_i| < M$ に制限した有限和を考えてから極限 $M \to \infty$ を取ると収束し $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ を与えることを注意された（後半は Zagier 氏も指摘）．このように見れば下の命題にある，$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ が調和積の規則に従うことは自明になる．

命題 4.1. i) $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ は調和積の規則を満たす．
ii) $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ と $\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r)$ は商 $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ に行くと同じ元を与える：

$$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r) \equiv \zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r) \pmod{\zeta(2)}.$$

iii) $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ や $\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r)$ は深さが $r-1$ 以下の多重ゼータ値および多重ゼータ値の積の一次結合で書ける．更に k と r の偶奇が一致するときは深さ $r-2$ まで落ちる．

証明を簡単に書いておく．詳しくは現在執筆中の [14] を参照． i) は，上記のように和を見てやり正規化の定義に則って考えると殆ど当たり前に見えてくるが，Hoffman による非可換多項式環を用いた多重ゼータ値のとらえ方によっても地道に計算すれば出来る．ii) については二通りの正規化の間の関係（[9] 参照）を用いて二つを比べると自然に出てくる．具体的な二つの値の間の関係は，例えば

$$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r) = \zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r)$$
$$+\sum_{m=1}^{r/2}(-1)^m\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{m}) \sum_{\substack{0\le i\le r-2m \\ k_{i+1}=\cdots=k_{i+2m}=1}} (-1)^{k_{i+2m+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+2m+1}).$$

ここに，右辺の二つ目の和の i は，k_{i+1} から連続して偶数 $2m$ 個 1 が並ぶような i をわたっていて，そのような i がなければ和は 0 とする．従って $(k_1,\ldots,k_r)$ に 1 が連続して並ぶ

[11] $-\infty$ から ∞ まで並んでいる通常の数直線を，左彼方の 0 から出発して，∞ を右に飛び越えて負の数が並んでいると見るのである．Kontsevich の示唆とは，有限多重ゼータ値を考えるときの和 $0 < m_1 < m_2 < p$ において，$\bmod p$ では $p = 0$ つまり $0 < m_1 < m_2 < 0$ と見よ！というものであった．

ことがなければ，$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\dots,k_r)=\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\dots,k_r)$ である．$\zeta(2,\dots,2)\equiv 0 \pmod{\zeta(2)}$ であるから，命題 ii) の合同が成り立っている．

iii) は既述の "parity result" を用いる．これは，多重ゼータ値はその重さと深さの偶奇が一致しないとき，より低い深さおよび積を法として 0 になる，という主張であり，深さ 2 の場合は Euler にさかのぼる．これを用いると，$\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\dots,k_r)$ の定義において，より低い深さおよび積を法として考えるなら $(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}$ を $(-1)^{r-i}$ に変えてよい．そのように変えて調和積を使って計算すると結論が出てくる． □

実験の結果から $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\dots,k_r)$ や $\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\dots,k_r)$ が $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ 全体を張ると予想していたが，それぞれが $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ を張ることは最近安田正大氏により証明された [21].

さて商代数 $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ の元 $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,\dots,k_r)$ を次で定義する．

定義 4.2.

$$\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,\dots,k_r) := \zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\dots,k_r) \bmod \zeta(2) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}.$$

命題 4.1 ii) により，右辺で $\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\dots,k_r)$ を採用しても値は同じである．例を挙げる．

例 4.3. 深さが 1 の場合：

$$\zeta^{\mathcal{S},*}(k) = (-1)^k\zeta^*(k)+\zeta^*(k) = \begin{cases} 2\zeta(k)\equiv 0 \pmod{\zeta(2)} & k \text{ 偶数}, \\ 0 & k \text{ 奇数}. \end{cases}$$

よって，$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ において $\zeta^{\mathcal{S}}(k)=0$.

深さが 2 の場合：

$$\begin{aligned} & \zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,k_2) \\ = \; & (-1)^{k_1+k_2}\zeta^*(k_2,k_1)+(-1)^{k_2}\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2)+\zeta^*(k_1,k_2) \\ \underset{\bmod \zeta(2)}{\equiv} & \begin{cases} 0 & k_1+k_2 \text{ 偶数}, \\ \zeta^*(k_1,k_2)-\zeta^*(k_2,k_1)\equiv(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}\zeta(k_1+k_2) & k_1+k_2 \text{ 奇数}. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，k_1+k_2 が奇数のとき（偶数のときは容易），[22, Proposition 7] の公式を用いると最後の等式が出る．よって，$\zeta(k)$ は k が偶数の時 $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ に行くと 0 だから（Euler），$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ において $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}\zeta(k_1+k_2)$．これが $\zeta^{\mathcal{A}}$ についての等式 (1.2) に対応するものである．

ここでもう一度「主予想」を述べておこう．

予想 二つの $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ および $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ は対応 $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)\leftrightarrow\zeta^{\mathcal{S}}(k_1,\ldots,k_r)$ により同型であろう．

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}\overset{?}{\simeq}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}.$$

計算機実験では，750 以下の素数を用いて重さ 17 までは予想を裏付ける対応が確かめられている．しかし理論的には，現状では一方から他方への well-defined な準同型が存在することも言えていない．むしろ「モチビック多重ゼータ値」において $\zeta^{\mathcal{S},*}(k_1,\ldots,k_r)$ や $\zeta^{\mathcal{S},ш}(k_1,\ldots,k_r)$ にあたるものを定義して（同様の式で定義すれば well-defined である），その世界からの準同型があるという形にしてから同型予想を述べればよかったかもしれない．ともあれ $\mathcal{A}$ のような世界のゼータ値と実数世界の値がかくも正確に対応していようとは驚きであった．

この予想によれば，§2 で述べたような，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ で予想されている有限多重ゼータ値の間の関係式はすべて，$\zeta^{\mathcal{A}}$ を $\zeta^{\mathcal{S}}$ に変えて $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ において成り立つことが予想されることになる．これについて，十分沢山の関係式を与えていると予想されるのが次の命題の関係式である（シャッフル関係式）．これが有限多重ゼータ値 $\zeta^{\mathcal{A}}$ について成り立つ (2.2), (2.3) に対応するものである．

命題 4.4. 任意の $k\geq 2$ に対して，$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ において次の二つの関係式が成り立つ：

$$\zeta^{\mathcal{S}}((\ell)*\mathbf{k}) \;=\; 0 \qquad (\forall\ell\geq 1,\,\forall\mathbf{k}\;\; s.t.\;\; \ell+|\mathbf{k}|=k), \tag{4.1}$$
$$\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1 ш\, \mathbf{k}_2) \;=\; (-1)^{|\mathbf{k}_2|}\zeta^{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_1,\overline{\mathbf{k}_2}) \qquad (\forall\mathbf{k}_1,\,\forall\mathbf{k}_2\;\; s.t.\;\; |\mathbf{k}_1|+|\mathbf{k}_2|=k). \tag{4.2}$$

式 (4.2) については，

$$\zeta^{\mathcal{S},ш}(\mathbf{k}_1 ш\, \mathbf{k}_2) \;=\; (-1)^{|\mathbf{k}_2|}\zeta^{\mathcal{S},ш}(\mathbf{k}_1,\overline{\mathbf{k}_2})$$

が $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ において（$\bmod\,\zeta(2)$ をせずに）成り立っている．これは，[9] の最後の節（「線型化複シャッフル関係式」）で考えたような母関数を用いて定式化すると，対称群（ないし $\mathbb{Z}$ 上の一般線形群）の $\mathbb{Z}$ 上の群環におけるある等式に帰着することが出来て，その等式は安田正大氏によって証明された．

その他，§2 で述べた一連の関係式の $\zeta^{\mathcal{S}}$ 類似は，困難無く直ちに確かめられるものを除きまだほとんど手が着けられていないが，取り組む人も出始めているので，ある程度までは早晩出来ると期待している（和公式，“height-one duality” は村原英樹氏，Ohno 関係式の $l=1$ の場合は井原庸介氏，一般には小山宏次郎氏（いずれも九大）により証明された）．またここにおいても大きな問題は，上の命題の関係式が予想次元まで落としうるだけの十分な関係式の族であるか，ということである．これらを用いて色々な関係を証明する，というのも手頃な問題をいくつも提供するのではないかと思われる．

References

[1] 荒川恒男，金子昌信，多重ゼータ値入門，COE Lecture Note Vol. 23, 九州大学 (2010).

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189–209.

[3] F. Brown, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, *Ann. of Math. (2),* **175** (2012), 949–976.

[4] F. Brown, Depth-graded motivic multiple zeta values, preprint, arXiv:1301.3053. (2013).

[5] H. Gangl, M. Kaneko, and D. Zagier, Double zeta values and modular forms, *Automorphic Forms and Zeta Functions*, S. Böcherer et. al. (eds.), World Scientific, Singapore, (2006), 71–106.

[6] Y. Hamahata and H. Masubuchi, Special Multi-Poly-Bernoulli Numbers, *Journal of Integer Sequences*, **10**, article 07.4.1 (2007), 6pp.

[7] M. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, preprint, arXiv:math/0401319v2 [math.NT], 17 Aug 2007. （本稿校正中に *Kyushu J. Math.*, **69** (2015), 345–366 として出版された.）

[8] 伊原康隆，Fermat 商と「数の微分」について，RIMS 研究集会「代数解析学と整数論 (1992.3.22.–3.28)」報告集, No. 810 (1992), 324–341.

[9] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.*, **142-02** (2006), 307–338.

[10] K. Imatomi, M. Kaneko, and E. Takeda, Multi-poly-Bernoulli numbers and finite multiple zeta values, *Journal of Integer Sequences*, **17**, Article 14.4.5, (2014).

[11] 金子昌信, 有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式, RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相 (2010.9.6–9.9)」報告集, No. 1813 (2012), 27–31.

[12] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers, *J. Théor. Nombres Bordeaux,* **9** (1997), 221–228.

[13] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, in “Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions” (Ed. by G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura), *MSJ Memoir*, **21** (2010), 73–85.

[14] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[15] KH. H. Pilehrood, T. H. Pilehrood, and R. Tauraso, New properties of multiple harmonic sums modulo p and p-analogues of Leshchiner’s series, preprint, arXiv:1206.0407v3 [math.NT] 22 Mar 2013.

[16] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, *J. Math. Soc. Japan,* to appear.

[17] S. Saito and N. Wakabayashi, The Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values, preprint (2013).

[18] J. H. Silverman, Wieferich’s criterion and the abc-conjecture, *J. Number Theory*, **30** (1988), 226–237.

[19] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, *Acta Arith.*, **111.1** (2004), 27–42.

[20] H. S. Vandiver, On developments in an arithmetic theory of the Bernoulli and allied numbers *Scripta Math.* **25** (1961), 273–303.

[21] S. Yasuda, Finite real multiple zeta values generate the whole space Z, *Int. J. Number Theory,* **12** (2016), 787–812.

[22] D. Zagier, Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\cdots,2,3,2,\cdots,2)$, *Annals of Math.*, **175** (2012), 977–1000.

[23] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums *Int. J. Number Theory*, **4-1** (2008), 73–106.