微分積分続論 II 演習問題

2014 年/2015 年

1. 数学モデルと微分方程式

[**1**] 次のモデル化を考えよ．ただし，k, ω 等の定数はすべて正定数とする．

(1) 1.1 節の鳩と鷹の問題のモデル化として，次を導け．ただし，$k = v/w$.

$$xy'' - k\sqrt{1+(y')^2} = 0, \qquad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0.$$

(2) 問題 1 の 1. 川を渡る船の問題のモデル化として，次を導け．ただし，$k = u/v$.

$$y' = k\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\,, \qquad y(a) = 0.$$

(3) 問題 1 の 4. 電気回路のモデル化として，次の微分方程式を導け.

$$I' + \frac{R}{L}\,I = \frac{E_0}{L}\,\sin\omega t.$$

(4) 1.1 節の例 4. バネ振動のモデル化として，次の微分方程式を導け.

$$x'' + kx' + \omega^2 x = f(t).$$

[**2**] 微分方程式 $y' = f(x,y)$ において $f(x,y)$ は (x,y) の連続関数とする．$y = \varphi(x)$ が解 (即ち，$y = \varphi(x)$ は微分可能で方程式を満たす) なら，$\varphi(x)$ は x の C^1 - 級関数であることを示せ.

[**3**] 次の微分方程式の方向場と解曲線 (積分曲線) を図示せよ.

(1) $y' = \dfrac{2(y-1)}{x-3}\,,$

(2) $y' = \sqrt{x^2+y^2}\,,$

(3) $y' = -\dfrac{x}{y}\,,$

2. 1 階微分方程式の一般解

[**4**] 微分方程式の初期値問題において，一般に解の一意性は成立しないことを次の例で説明せよ．ただし，α は定数で $0 < \alpha < 1$ とする.

$$y' = y^{\alpha}, \qquad y(0) = 0\,.$$

[5] 次の問いに答えよ．

(1) 問題 2 の 1. この曲線の満たす微分方程式として

$$(y')^2 = \frac{k^2}{y^2} - 1$$

を導け．ただし，k は定数．さらに，この微分方程式を解き，曲線を決定せよ．

(2) 問題 2 の 2. この曲線の満たす微分方程式として

$$(y')^2 = \frac{2}{y^2} - 1$$

を導け．さらに，この微分方程式を解き，曲線を決定せよ．

3．1 階微分方程式 (1)

[6] 変数分離形の微分方程式 $y' = p(x)q(y)$ の解法について述べよ．

[7] 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = x(1+y^2)$,

(2) $(x^2+1)yy' + x(y^2-4) = 0$,

(3) $x(e^y+4)dx + 2e^{x+y}dy = 0$.

[8] 同次形の微分方程式 $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の解法について述べよ．

[9] 次の問いに答えよ．

(1) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ の一般解を求めよ．

(2) $x > 0$ において，次の微分方程式の初期値問題を解け．

$$y' = k\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}, \qquad y(a) = 0.$$

ただし，$k > 0, a > 0$ とする．さらに，その解 y の $x \to 0$ における極限を調べよ．

[10] 次の微分方程式を完全微分形に変形し，一般解を求めよ．

(1) $x + yy' - x(x^2+y^2) = 0$,

(2) $x(y^2-4)dx + (x^2+1)ydy = 0$,

(3) $x^2(y+1)dx + (1-x)y^2dy = 0$,

(4) $(x^2y + xy^2 - y^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0,$

(5) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\,y' = 0,$

(6) $y' = \dfrac{y+x}{y-x}.$

(7) $\left(x^3 + 3xy^2 + \dfrac{1}{y}\right)y' + 3x^2y + y^3 + \dfrac{1}{x} = 0.$

[11] 次の微分方程式は完全微分形であることを確かめ，一般解を求めよ．

(1) $\left(\dfrac{y}{x^2} + y + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0,$

(2) $\left(\log y + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + 2y\right)dy = 0,$

(3) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$

4．1階微分方程式 (2)

[12] 1階線形微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の解法について述べよ．

[13] 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\left(\dfrac{y}{2x} + 1\right)dx - dy = 0,$

(2) $y' + \dfrac{y}{x\log x} = \dfrac{1}{x}\,.$

[14] 次の1階線形微分方程式の初期値問題を解け．ただし，(2) で p は定数とする．

(1) $y' + p(x)y = q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$

(2) $y' + py = q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$

[15] 次の1階線形微分方程式の初期値問題を解け．

$$I' + \frac{R}{L}\,I = \frac{E_0}{L}\,\sin\omega t, \qquad I(0) = 0.$$

また，この解 I の $t \to \infty$ での漸近形を求めよ．

[16] ベルヌーイの微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ の解法について述べよ．ただし，$\alpha \neq 0, 1$ とする．また，次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$w' = c_1 w^{2/3} - c_2 w.$$

ただし，c_1, c_2 は定数とする．

5．高階線形微分方程式

[17] n 階線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

において，$a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ はすべて連続関数とする．$y = \varphi(x)$ が解 (即ち，$y = \varphi(x)$ は n 回微分可能で方程式を満たす) なら，$\varphi(x)$ は x の C^n - 級関数であることを示せ.

[18] n 階斉次線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

において，重ね合せの原理が成り立つことを示せ.

[19] 次の関数系は $\mathbb{R}$ 上で 1 次独立であることを示せ.

(1) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$,

(2) $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$,

(3) $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta$ は定数で $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\beta \neq 0$ とする.

[20] 2 階線形微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

に対し，その特解を求める Lagrange の定数変化法について述べよ.

[21] $L(D)y = y'' - \dfrac{2}{x}\,y' + \dfrac{2}{x^2}\,y$ と置く.

(1) 斉次方程式 $L(D)y = 0$ の解を $y = x^k$ の形で求めよ.

(2) 非斉次方程式 $L(D)y = 1$ の一般解を求めよ．ただし，特解は Lagrange の定数変化法で求めよ.

[22] 次の線形微分方程式の一般解を求めよ．ただし，特解は Lagrange の定数変化法で求めよ．ω は定数で $\omega \neq 0$ とする.

(1) $y'' + \omega^2 y = f(x)$,

(2) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.

6. 定数係数線形微分方程式 (斉次の場合)

[23] $L(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$ と置く．ただし $a_1, \ldots, a_n$ は実定数とする．

(1) $y = \varphi(x)$ が斉次線形微分方程式 $L(D)y = 0$ の解なら，$\varphi(x)$ は x の C^∞-級関数であることを示せ．

(2) $\rho = \lambda$ を特性方程式 $L(\rho) = 0$ の根とするとき，$y = e^{\lambda x}$ は斉次線形微分方程式 $L(D)y = 0$ の解であることを示せ．

[24] 次の斉次線形微分方程式の基本解および一般解を求めよ．

(1) $y'' + y' - 2y = 0,$

(2) $y'' - 2y' - 2y = 0,$

(3) $y'' - 2\sqrt{2}\,y' + 2y = 0,$

(4) $y'' - 4y' + 5y = 0.$

[25] 次の斉次線形微分方程式の基本解および一般解を求めよ．

(1) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$

(2) $y''' + y = 0,$

(3) $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0,$

(4) $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0,$

(5) $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 8y' + 6y = 0,$

(6) $y^{(4)} + y = 0,$

(7) $(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 2)y = 0.$

[26] 次の初期値問題を解け．ただし，$k > 0, \omega \neq 0$ とする．

$$x'' + kx' + \omega^2 x = 0, \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0.$$

また，この解 x の $t \to \infty$ での漸近挙動を調べよ．

[27] 微分方程式 $y'' + \omega^2 y = 0$ の解 y で恒等的に 0 ではないものが次の条件を満たすための定数 ω の値と，そのときの解 y を求めよ．ただし，$\omega \geq 0$ とする．

(1) $y(0) = y(\pi) = 0,$

(2) $y'(0) = y'(\pi) = 0,$

(3) $y(0) = y'(\pi) = 0$,

(4) $y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$.

7．定数係数線形微分方程式 (非斉次の場合)

[**28**] 次の線形微分方程式の特解を未定係数法で求めよ．ただし，k, ω, α は正定数，$B \neq 0$ とする．

$$x'' + kx' + \omega^2 x = B\cos\alpha t.$$

[**29**] 次の線形微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$\omega > 0, \alpha > 0$.

(1) $y'' + \omega^2 y = \cos\alpha x$,

(2) $y'' + \omega^2 y = \sin\alpha x$.

[**30**] 次の線形微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' + y = e^x$,

(2) $y''' - y = \cos x$,

(3) $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = e^x$,

(4) $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$,

(5) $(D^2 + 3D + 2)y = e^x + e^{-x}$,

(6) $y''' - y' = (x^2 - \sin x)e^x$.

9．定数係数の 1 階線形微分方程式系 (2)

[**31**] 行列の指数関数が次の形で定義出来ることを確かめよ．

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

また，$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$ が次の初期値問題の解であることを確かめよ．

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

[**32**] 次の場合に行列 A の指数関数 e^A を求めよ．

(1) A が対角化可能で，$T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ が成り立つ場合．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は重複も込めた固有値，T は対角化行列である．

(2) A が対角化可能で，$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j$ とスペクトル分解できる場合．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は相異なる固有値，$P_1, \cdots, P_r$ は対応する射影行列である．

[33] 次の初期値問題を解け．行列の対角化を利用する方法，スペクトル分解に基づく方法のいずれの計算も実行せよ．

(1) $$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 2y + 2z, & y(0) = -1, \\ z' = -3x - 6y - 6z, & z(0) = 2. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x' = 2x + y + z + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x + 2y + z + 2, & y(0) = 0, \\ z' = x + y + 2z, & z(0) = -1. \end{cases}$$

10. 解の存在と一意性

[34] Lipschitz 連続性に関する次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ が存在して有界ならば，$f(t, x)$ は x に関して Lipschitz 連続であることを示せ．

(2) 関数 $f(x) = x^\alpha$ は区間 $I = [0, 1]$ 上で Lipschitz 連続でないことを示せ．ただし，$0 < \alpha < 1$ とする．

[35] 常微分方程式の初期値問題

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

は次の積分方程式に帰着されることを示せ．

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{IE}$$

また，この積分方程式の解を適当な写像の不動点として捉えよ．

[36] 積分方程式 (IE) を解くために，逐次近似列 $\{x_n(t)\}$ を次で定義する．

$$x_0(t) = x_0, \qquad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \quad n \geq 0.$$

ただし，M, L, d, b は講義ノートを参照せよ．

(1) $|t - t_0| \leq d$ においてすべての $x_n(t)$ が逐次定義され，次の不等式を満たすことを示せ．

$$|x_n(t) - x_0| \leq b, \quad n \geq 0.$$

(2) $|t-t_0| \le d$ において次の評価式が成り立つことを示せ.

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{M}{L}\frac{L^n|t-t_0|^n}{n\,!} \le \frac{M}{L}\frac{(Ld)^n}{n\,!}, \quad n \ge 1.$$

(3) $|t-t_0| \le d$ において $\{x_n(t)\}$ は一様収束の意味で Cauchy 列であること，即ち，$n, m \to \infty$ のとき次が成り立つことを示せ.

$$\max_{|t-t_0|\le d} |x_n(t) - x_m(t)| \longrightarrow 0.$$

(4) $|t-t_0| \le d$ において $\{x_n(t)\}$ はある連続関数 $x(t)$ に一様収束すること，さらに，その極限関数 $x(t)$ は積分方程式 (IE) の解であることを示せ.

(5) 積分方程式 (IE) の解の一意性を示せ.

[37] 閉区間 $[a,b]$ 上で $\varphi(t)$, $p(t)$, $q(t)$ は連続で $p(t) \ge 0$ とし，

$$\varphi(t) \le q(t) + \int_a^t p(s)\varphi(s)ds, \qquad t \in [a,b],$$

を満たすとする．このとき次の Gronwall の不等式が成り立つことを示せ.

$$\varphi(t) \le q(t) + \int_a^t e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} p(s)q(s)ds, \qquad t \in [a,b].$$

[38] n 階単独線形微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = b(t), \\ &y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \cdots\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

を次の形の 1 階連立系の初期値問題に帰着させよ.

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$