レポート 第3回

- 問題6の3(類題)

$$y'' + \omega^2 y = 0,\quad y(0) = y(\pi) = 0,\quad y \neq 0 \quad (\omega \geqq 0)$$

case1　$\omega = 0$ の場合　$y'' = 0$　基本解は $\{1, x\}$

一般解は $y = C_1 + C_2 x$

$x = 0, \pi$ とおいて

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y(\pi) = C_1 + C_2\pi = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ C_1 = C_2 = 0$$

このとき $y \equiv 0$ となり不適．よって $\omega \neq 0$

case2　$\omega > 0$ の場合　特性方程式は $\rho^2 + \omega^2 = 0$

よって $\rho = \pm i\omega$．基本解は $\{\cos\omega x, \sin\omega x\}$

一般解は

$$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$$

$x = 0, \pi$ とおいて

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y(\pi) = C_1 \cos\omega\pi + C_2 \sin\omega\pi = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ C_2 \sin\omega\pi = 0$$

$C_2 = 0$ なら $C_1 = C_2 = 0$　このとき $y \equiv 0$ となり不適

よって $C_2 \neq 0$　$\therefore\ \sin\omega\pi = 0$　よって $\omega\pi = n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\therefore\ \omega = n \quad (n \in \mathbb{N}) \ \lrcorner$$

このとき

$$y = C_2 \sin nx \quad (n \in \mathbb{N},\ C_2 \neq 0) \ \lrcorner$$

○ 問題9の2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

(1) $$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$ 加える

$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 3 & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \qquad \therefore \lambda = 0, -2, -3$$ (すべて単根)

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$$ 」

射影行列を求める

$$P_1 = \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

スペクトル分解は

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = -2P_2 - 3P_3$$ 」

(2) $$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2 + e^{\lambda_3 t} P_3$$
$$= P_1 + e^{-2t} P_2 + e^{-3t} P_3$$ 」

(3) $x' = Ax \quad x(0) = x_0$ の解は $x(t) = e^{tA} x_0$

従って

$$x(t) = \left(P_1 + e^{-2t} P_2 + e^{-3t} P_3\right) x_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 」