レポート 第3回

□1 問題5,2の1(2)

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D: x^2+y^2 \leq 1$$

変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ により

$$D \leftrightarrow D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

また $dxdy = r\,drd\theta$. よって

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{1-r^2}\, r\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{1}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

」

$\boxed{2}$ $$I_R = \iint_{D_R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \qquad D_R : x^2+y^2 \leq R^2 \qquad (\alpha > 0)$$

(1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ により

$$D_R \longleftrightarrow D_R' : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

また $dxdy = rdrd\theta$，よって

$$I_R = \iint_{D_R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \iint_{D_R'} \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{rdr}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \frac{rdr}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = 2\pi \int_0^R \frac{rdr}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$\alpha \neq 2$ のとき

$$\int_0^R \frac{rdr}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \left[\frac{(1+r^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{2(1-\frac{\alpha}{2})} \right]_{r=0}^R = \frac{1}{2-\alpha} \left\{ (1+R^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} - 1 \right\}$$

$\alpha = 2$ のとき

$$\int_0^R \frac{rdr}{1+r^2} = \left[\frac{1}{2} \log(1+r^2) \right]_{r=0}^R = \frac{1}{2} \log(1+R^2)$$

よって

$$I_R = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2-\alpha} \left\{ (1+R^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} - 1 \right\}, & \alpha \neq 2 \\ \pi \log(1+R^2), & \alpha = 2 \end{cases}$$

(2) $\lim_{R\to\infty} I_R$ を求める。 $R\to\infty$ とすると

$0<\alpha<2$ なら $(1+R^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow +\infty$

$\alpha>2$ なら $(1+R^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow 0$

$\alpha=2$ なら $\log(1+R^2) \longrightarrow +\infty$

以上より

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \begin{cases} +\infty & 0<\alpha\leqq 2 \\ \dfrac{2\pi}{\alpha-2} & \alpha>2 \end{cases}$$