微分積分学・同演習 B　演習問題

2014/12

4. 偏微分

[1] 次の極限値を与えられた経路に沿って計算せよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(1) $y=0$　(2) $x=0$　(3) $y=x$　(4) $y=-x$　(5) $y=2x$

[2] 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2y}{2x^2+y^2}$　(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

[3] 次の関数の連続性を調べよ.

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-3x^2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases} x\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(4) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(6) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

[4] 次の関数を偏微分せよ.

(1) $f(x,y)=x^2y+3xy^5+x^3$　(2) $f(x,y,z)=x^2yz^3+yz$

(3) $f(x,y)=x^2y^5-2x^3y^2+y$　(4) $f(x,y)=x^3+y^2+2$

(5) $f(x,y)=\sin(xy)$　(6) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$

(7) $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$　(8) $f(x,y)=x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

[5] 次の関数の原点での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[6] 次の合成関数の導関数 $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

$$z = xy^2 - x^2y, \quad x = t,\ y = e^t$$

[7] 次の合成関数の偏導関数 $z_u,\ z_v$ を求めよ．

$$z = xy^2 + x^2y, \quad x = u + v,\ y = u - v$$

[8] 次の変換の Jacobian を求めよ．

(1) $\begin{cases} x = u^2 - 2v \\ y = 3u + v^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

[9] $z = f(x,y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

[10] 曲面 $z = f(x,y) = 4x^2y + xy^3$ 上の点 $(-1,1,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

[11] 次の問いに答えよ．

(1) $z = f(x,y),\ u = x + y,\ v = x - y$ のとき，$z_u,\ z_v$ を $f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z = f(x,y)$ が 1 変数の関数 $z = g(t)$ を用いて $z = g(x+y)$ と書ける必要十分条件は，$f_x = f_y$ であることを示せ．

[12] 次の問いに答えよ．

(1) $z = f(x,y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$z_r,\ z_\theta$ を $f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z = f(x,y)$ が $z = g(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$ と書き表される必要十分条件は，$yf_x = xf_y$ であることを示せ．

[13] 次の関数の Maclaurin 展開を 2 次の項まで書き表せ．

(1) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$ (2) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$

[14] 次の関数に Laplacian $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を作用させよ．

(1) $z = \log(x^2 + y^2)$　　(2) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

(3) $z = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$　　(4) $z = x^3 + xy + y^3$

[15] $z = f(x, y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$$

[16] 次の関数が $(x, y) = (0, 0)$ において極値を取るかどうかを調べよ．ただし，a は定数とする．

(1) $f(x, y) = ax^2 - y^2$　　(2) $f(x, y) = x^2 + axy + y^2$

[17] 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$

(2) $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

(3) $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2 - 4xy + 1$

[18] $f(a, b) = 0,\ f_y(a, b) \neq 0$ となる点 (a, b) の近くで定義される $f(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ に対して，次の微分公式を示せ．

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}, \qquad \varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}(f_y)^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(f_x)^2}{(f_y)^3}$$

[19] 曲線 $f(x, y) = x^3 + 3xy + 4xy^2 + y^2 + y - 2 = 0$ 上の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ．

[20] $x^3 + xy^2 - 2 = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ に対し，その導関数 $y',\ y''$ を $x,\ y$ を用いて表せ．

[21] 条件 $g(x, y) = x^2 - \dfrac{1}{4}y^2 - 1 = 0$ のもとでの，関数 $f(x, y) = x^3 + y$ の極値を求めよ．

[22] $(f_x)^2 + (f_y)^2 \neq 0$ のとき，曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) における接線は次のように書けることを示せ．

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

[23] 次の関数 $f(x, y)$ の領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ における最大値，最小値を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$　　(2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$

5．重積分

[**24**] 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_x^{2x}(x^2+y^2+1)\,dy\Big)dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\Big(\int_0^{y^2}\frac{x}{y}\,dx\Big)dy$

(3) $\displaystyle\int_0^2\Big(\int_{x^2}^{2x}xe^y\,dy\Big)dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{\pi/2}y\,\sin(xy)\,dx\Big)dy$

[**25**] 次の積分を累次積分の順序を変えて，2 通りに計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D(2x-y)dxdy \qquad D:\ 0\le x\le,\ 1\le y\le 2$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0$

(3) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy \qquad D:\ y=x,\ x=1,\ x$ 軸で囲まれた領域

[**26**] 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D\sin(2x+y)\,dxdy \qquad D:\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\iint_D(x^2y+y^2)\,dxdy \qquad D:\ 1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3$

(3) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0$

(4) $\displaystyle\iint_D\sqrt{a^2-y^2}\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2\le a^2$

(5) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy \qquad D:\ 0\le y\le x\le 1$

(6) $\displaystyle\iint_D(2x-y)\,dxdy \qquad D:\ x\le y\le 2x,\ x+y\le 3$

(7) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz \qquad D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y$

(8) $\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz \qquad D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+2y+3z\le 6$

[**27**] 積分の変数変換を利用して，次の積分の値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D(x-y)^2\,dxdy \qquad D:\ |x+2y|\le 1,\ |x-y|\le 1$

(2) $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2\le a^2$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \qquad D:\ a^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2$

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leq x$

(6) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leq x$

[**28**] 重積分を利用して，次の等式を証明せよ．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[**29**] 次の積分 I_R を計算せよ．また，極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_R$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

$$I_R = \iint_{D_R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha/2}} \qquad D_R:\ x^2+y^2 \leq R^2$$

[**30**] 3 次元極座標変換を用いて，次の積分の値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz \qquad D:\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ \ x,\,y,\,z \geq 0$

(2) $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \qquad D:\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

[**31**] 次の領域 V の体積を求めよ．

(1) $V:$ 球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

(2) $V:$ 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共通部分

(3) $V:$ $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 \leq 1$

(4) $V:$ 曲面 $z = x^2+y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれた領域

[**32**] 次の曲面 S の曲面積を求めよ．

(1) $S:$ 球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$

(2) $S:$ 球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ のうち円柱面 $x^2+y^2 = ax$ で切り取られる部分

(3) $S:$ 円柱面 $y^2+z^2 = a^2$ のうち円柱面 $x^2+y^2 = a^2$ で切り取られる部分

(4) $S:$ 曲面 $z = x^2+y^2$ のうち平面 $z = a$ より下の部分