レポート

問題3.3 の 2.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では $\sin x \leqq x$, よって $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ で

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{\sin x}$$

ゆえに

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \geqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log\frac{\pi}{2} - \lim_{x\to+0} \log x = +\infty$$

よって この広義積分は $+\infty$ に発散する.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

$0 \leqq x \leqq 1$ では $e^{-x^2} \leqq 1$, $x \geqq 1$ では $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$.

ゆえに

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\leqq \int_0^1 dx + \int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= 1 + \Big[-e^{-x}\Big]_1^{\infty} = 1 + \frac{1}{e} < \infty$$

この広義積分は収束する.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ では、$x(1-x) \geqq \frac{1}{2}x$。よって

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ では $x(1-x) \geqq \frac{1}{2}(1-x)$。よって

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$$

従って

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left[2\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 4 < \infty$$

この広義積分は収束する

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

$|x| \leqq 1$ では $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leqq 1$，$|x| \geqq 1$ では $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leqq \dfrac{1}{x^2}$。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = 2\left\{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}\right\}$$

$$\leqq 2\left\{\int_0^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right\} = 2\left\{1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}\right\} = 4 < \infty$$

この広義積分は収束する