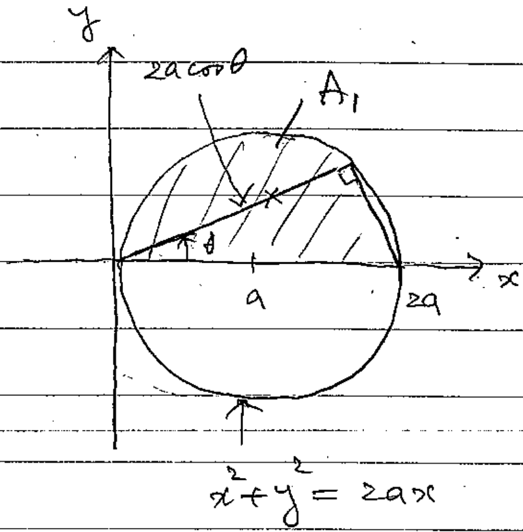
/

(1) $T: 0 \leq z \leq x^2+y^2, \ (x, y) \in A$

ただし $A: x^2+y^2 \leq 2ax$



$$|T| = \iint_A (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= 2\iint_{A_1} (x^2+y^2)\,dxdy$$

ただし A_1 は A の $y \geq 0$ の部分。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

により

$$A_1 \Longleftrightarrow A_1' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

また $dxdy = r\,drd\theta$, よって

$$|T| = 2\iint_{A_1} (x^2+y^2)\,dxdy = 2\iint_{A_1'} r^2 \cdot r\,drd\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr \right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{2a\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}(2a)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 8a^4 \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{2}\pi a^4$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{16}$ であることを用いた。

参考 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}$ の計算例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos 2\theta + 1)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}(\cos 4\theta + 1) + 2\cos 2\theta + 1\right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 4\theta + 2\cos 2\theta + \frac{3}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\sin 4\theta + \sin 2\theta + \frac{3\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$ 」

(2)

$S:\ z = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{x},\quad (x, y) \in A$

ただし $A:\ x^2 + y^2 \leq ax$.

S の $z \geq 0$ の部分を S_+ とする. S_+ は $z = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$.

このとき

$$z_x = \sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{x}},\quad z_y = 0$$

ゆえに

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{a}{x}}$$

また

$$A:\ |y| \leq \sqrt{ax - x^2} \quad (0 \leq x \leq a)$$

に注意すれば

$$|S| = 2|S_+| = 2\iint_A \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_A \sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dxdy$$

$$= 2\int_0^a \left(\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dy \right) dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{a}{x}} \cdot \sqrt{ax-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x = a\sin\theta$ と変換すると $x = a \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $dx = a\cos\theta\,d\theta$

$x = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0$

よって

$$|S| = 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} \cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)\,d\theta$$

$$= 2a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi a^2 」$$