微分積分続論問題 2014

長方形上の積分

[**1**] 関数 f は長方形 $E=[a,b]\times[c,d]$ 上で連続とする．このとき次の累次積分の公式が成り立つ．このことについて調べよ．

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx\,.$$

[**2**] 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_E (x+y^2)\,dxdy\,,\qquad E=[0,1]\times[1,2].$

(2) $\displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}\,,\qquad E=[0,1]\times[0,1].$

(3) $\displaystyle\iint_E x\,\sin(x+y)\,dxdy\,,\qquad E=[0,\pi]\times[0,\pi/2].$

(4) $\displaystyle\iint_E e^{px+qy}\,dxdy\,,\qquad E=[0,a]\times[0,b].$　ただし，$pq\neq 0$.

一般領域上の積分

[**3**] 関数 $p,\,q$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で，$p(x)\le q(x)$ とし，

$$A:\quad a\le x\le b,\;\; p(x)\le y\le q(x)$$

とする．A 上の連続関数 f に対して次の公式が成り立つ．このことについて調べよ．

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\Big(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy\Big)dx\,.$$

[**4**] 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_A (x+2y)\,dxdy\,,\qquad A:\ (0,0),\ (1,0),\ (1,1)$ を結ぶ三角形.

(2) $\displaystyle\iint_A xy\,dxdy\,,\qquad A:\ x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(3) $\displaystyle\iint_A \frac{x^2}{y^2}\,dxdy\,,\qquad A:\ x=2,\ y=x,\ xy=1$ で囲まれる領域.

(4) $\displaystyle\iint_A \frac{y\sin x}{x}\,dxdy\,,\qquad A:\ (0,0),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$ を結ぶ三角形.

(5) $\displaystyle\iint_A \cos(x+y)\,dxdy\,,\qquad A:\ (0,0),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$ を結ぶ三角形.

(6) $\displaystyle\iint_A e^y\,dxdy\,,\qquad A:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x}.$

(7) $\displaystyle\iint_A \sqrt{xy}\,dxdy\,,\qquad A:\ y=x^2,\ x=y^2$ で囲まれる領域.

(8) $\displaystyle\iint_A \sqrt{xy}\,dxdy\,,\qquad A:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1.$

(9) $\displaystyle\iint_A (|x|+|y|)\,dxdy\,,\qquad A:\ |x|+|y|\le 1.$

[**5**] 次の領域の体積を求めよ.

(1) $T:\quad x^2+y^2\le a^2,\quad x\ge 0,\quad 0\le z\le x.$

(2) $T:\quad 0\le x\le\pi,\quad |y|\le\sin x,\quad |z|\le\sin x.$

(3) $T:\quad |x|\le 1,\quad |y|\le 1,\quad |z|\le |x|+|y|.$

(4) $T:\quad 0\le y\le x\le 1,\quad |z|\le x+y.$

(5) $T:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\quad z^2\le xy.$

(6) $T:$ 互いに直交する半径 a の直円柱の共通部分.

広義積分

[**6**] 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle |A|=\iint_A dxdy\,,\qquad A:\ x\ge 1,\ |y-x|\le\frac{1}{x^2}.$

(2) $\displaystyle\iint_A e^{-x-y}\,dxdy\,,\qquad A:\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(3) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}\,,\qquad A:\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(4) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}\,,\qquad A:\ 0\le y\le x.$

(5) $\displaystyle\iint_A e^{-x-y}\,dxdy\,,\qquad A:\ x\ge 0,\ |y-x|\le a.$

(6) $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dxdy\,,\qquad A:\ 0 \le x \le y.$

[7] 次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}\,,\qquad A = [0,1]\times[0,1].$

(2) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sin\sqrt{xy}}\,,\qquad A = [0,1]\times[0,1].$

(3) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{x+y}\,,\qquad A = [0,1]\times[0,1].$

(4) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}\,,\qquad A:\ x \ge 1,\ 0 \le y \le \frac{1}{x^2}.$

(5) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{|x-y|^\alpha}\,,\qquad A = [0,1]\times[0,1]\quad(\alpha > 0).$

[8] 次の非有界領域の体積を求めよ．

(1) $T:\quad x \ge 0,\ \ 0 \le y \le e^{-x},\ \ 0 \le z \le x+y.$

(2) $T:\quad |xy| \le 1,\ \ |yz| \le 1,\ \ |zx| \le 1.$

変数変換公式

[9] 次の変数変換公式について調べよ．

(1) 2 次元極座標変換に対する $dxdy = rdrd\theta.$

(2) 3 次元極座標変換に対する $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$

[10] 広義積分

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,,\qquad A:\ x \ge 0,\ y \ge 0,$$

を求めよ．また，これを利用して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを示せ．

[11] 次の積分を求めよ．広義積分ではその収束性も判定せよ．

(1) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,\qquad A:\ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\quad (0 < a < b).$

(2) $\displaystyle\iint_A (x+y)\,dxdy\,, \qquad A:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(3) $\displaystyle\iint_A (x+y)e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad A:\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(4) $\displaystyle\iint_A \log(x^2+y^2)\,dxdy\,, \qquad A:\ x^2+y^2\le a^2.$

(5) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,, \qquad A=\mathbb{R}^2, \quad (\alpha>0).$

(6) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}}\,, \qquad A:\ x^2+y^2\le 1, \quad (\alpha>0).$

[12] 次の領域の体積を求めよ.

(1) $T:$ 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ で囲まれる領域.

(2) $T:$ $(x-a)^2+(y-b)^2\le c^2,\ \ 0\le z\le xy, \quad (0<c\le a,\, b).$

(3) $T:$ $x^2+y^2+z^2\le a^2,\ \ |z|\le b, \quad (0<b<a).$

(4) $T:$ 回転放物面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=x$ で囲まれる領域.

(5) $T:$ 回転放物面 $z=x^2+y^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ と平面 $z=0$ で囲まれる領域.

(6) $T:$ 曲面 $z^2=x$ と円柱面 $x^2+y^2=x$ で囲まれる領域.

ただし，必要なら次の事実を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{2}{3}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{16}\pi\,.$$

[13] 次の問いに答えよ.

(1) 半径 a の円 $A:\ x^2+y^2\le a^2$ の面積を 2 次元極座標変換を用いて求めよ.

(2) 半径 a の球 $T:\ x^2+y^2+z^2\le a^2$ の体積を 3 次元極座標変換を用いて求めよ.

曲面と曲面積

[14] 曲面 $S:\ y=f(x,y),\ (x,y)\in A,$ の曲面積の公式

$$|S|=\iint_A\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\,dxdy$$

について調べよ.

[15] 次の曲面の曲面積を求めよ.

(1) $S:$ 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(2) $S:$ 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が円柱面 $x^2+y^2=ax$ で切り取られる部分.

(3) $S:$ 曲面 $z^2=4ax$ のうち $x^2+y^2 \le ax$ の部分 $(a>0)$.

(4) $S:$ 曲面 $x^2=2pz$ のうち $0 \le x \le a,\ \beta x \le y \le \alpha x$ の部分.

(5) $S:$ 球面 $z=xy$ のうち $x^2+y^2 \le a^2$ の部分.

[16] 曲面 $S:\ x=X(u,v),\ y=Y(u,v),\ z=Z(u,v),\ (u,v)\in A,$ の曲面積の公式

$$|S| = \iint_A \mu(u,v)\,dudv,$$
$$\mu(u,v) = \left\{ \left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

について調べよ.

[17] 半径 a の球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の曲面積を求めよ.

[18] 半径 r の球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ の面積要素が $dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$ で与えられることを直感的に説明せよ．さらに，極座標での体積要素が $dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ で与えられることを直感的に説明せよ.

線積分と Green の定理

[**19**] 曲線 C で向きを逆にしたものを $-C$ で表すとき,

$$\int_{-C} f\,dx + g\,dy = -\int_C f\,dx + g\,dy$$

が成り立つことを示せ.

[**20**] 次の線積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C xy\,dx\,,\quad \int_C xy\,dy\,,\qquad C:$ 曲線 $y = x - x^2$ のうち $(1,0)$ から $(0,0)$ の部分.

(2) $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy\,,\qquad C:$ 左回りの円周 $x^2 + y^2 = a^2$.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 左回りの円周 $x^2 + y^2 = a^2$.

(4) $\displaystyle\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 左回りの円周 $x^2 + y^2 = a^2$.

(5) $\displaystyle\int_C y\,dx - x\,dy\,,\qquad C:$ 左回りの半円周 $x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0$.

(6) $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy\,,\qquad C:$ 左回りの半円周 $x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0$.

(7) $\displaystyle\int_C \frac{dx}{y} + \frac{dy}{x}\,,\qquad C:$ 左回りの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

[**21**] Green の定理を利用して次の線積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy\,,\qquad C:$ 任意の単純閉曲線.

(2) $\displaystyle\int_C xy^2\,dx + x^2y\,dy\,,\qquad C:$ 任意の単純閉曲線.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 内部に原点を含まない単純閉曲線.

(4) $\displaystyle\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 内部に原点を含む単純閉曲線.

(5) $\displaystyle\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 内部に原点を含まない単純閉曲線.

(6) $\displaystyle\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}\,,\qquad C:$ 内部に原点を含む単純閉曲線.