レポート解答

問題 2,1 4(2)

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$x\neq 0$ のとき

$$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$$

よって $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$ 故に $f'(x)$ は $x=0$ も込めて連続

問題 2,3 1(2)

$$f(x)=\log(1-x)\qquad (x<1)$$

微分すると $f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}=-(1-x)^{-1}$

$$f''(x)=-(1-x)^{-2},\quad f'''(x)=-2(1-x)^{-3},$$

従って一般に $f^{(n)}(x)=-(n-1)!\,(1-x)^{-n}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}\quad (n\geqq 1)$

応用として Maclaurin 展開を求める.

$$f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=-(n-1)!\quad (n\geqq 1)$$

よって

$$\log(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\underbrace{f(0)}_{=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{-(n-1)!}}{n!}x^n$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

問題 2.3　2(2)

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\quad (x>0)$$

微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}+\log x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+(1-\log x)\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

よって

$f'(x)=0$ となるのは $\log x=1$, $\therefore x=e$ のとき.

$f''(x)=0$ となるのは $\log x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=e^{\frac{3}{2}}$ のとき

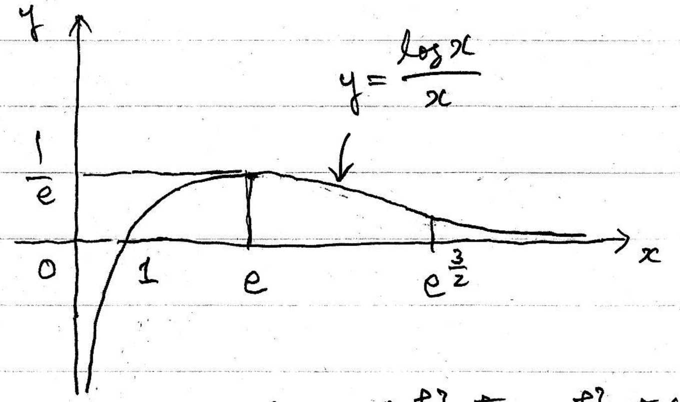
増減表は

x	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$		$\searrow$

$f(e)=\frac{1}{e}$

$f(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$

グラフの概形は



$x=e$ で極大, 極大値 $\frac{1}{e}$

$0<x<e^{\frac{3}{2}}$ で上に凸, $x>e^{\frac{3}{2}}$ で下に凸

$\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ は変曲点

Leibnizの公式 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

証明 $n=1$ のとき

$$(fg)' = f'g + fg' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)}$$

よって $n=1$ のとき OK

$n=m$ のとき OK とすると

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k)}$$

$n=m+1$ のとき

$$(fg)^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(f^{(m-k)} g^{(k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k+1)}}_{= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} f^{(m+1-k)} g^{(k)}} \quad k+1 \to k$$

$$= \underbrace{\binom{m}{0}}_{1} f^{(m+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left\{ \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right\}}_{\binom{m+1}{k}} f^{(m+1-k)} g^{(k)} + \underbrace{\binom{m}{m}}_{1} f^{(0)} g^{(m+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)}$$

よって $m=k+1$ のとき OK

以上より n についての帰納法で証明された。

注意 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ の証明

$$\text{左辺} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \{(n+1-k) + k\} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \text{右辺}$$ 」