レポート

問題1.1 の 1(1)

$$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

例題1.1.1 より $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e \quad (n\to\infty)$

よって

$$\frac{1}{a_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$\therefore \frac{1}{a_{m+1}}=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\frac{m+1}{m}=b_m\left(1+\frac{1}{m}\right)\longrightarrow e \quad (m\to\infty)$$

ゆえに

$$a_n \longrightarrow \frac{1}{e} \quad (n\to\infty) \quad \lrcorner$$

問題1.2 の 1(5)

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(x\to 0) \quad \lrcorner$$

または

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(x\to 0)$$

問題 1.2 の 2(2)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

$x \neq 0$ のとき $\left| f(x) \right| = |x| \left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leq |x| \to 0 \quad (x \to 0)$

よって

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

ゆえに $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではない」

問題 1.3 の 2(2)

$$\cos^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{3} + \sin^{-1} \frac{7}{9}$$

$\sin^{-1} \dfrac{1}{3} = \alpha, \quad \sin^{-1} \dfrac{7}{9} = \beta$ とおくと

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \quad \sin \beta = \frac{7}{9}, \quad |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{2}$$

このとき $\cos \alpha \geqq 0, \quad \cos \beta \geqq 0$ で

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

よって

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{3} \frac{7}{9} = \frac{16 - 7}{3 \times 9} = \frac{1}{3}$$

一方

$$\cos^{-1} x = \alpha + \beta \quad \therefore \; x = \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$$ 」