微分積分学・同演習 A　演習問題

2014/6

1．連続関数

[1] 次の数列 $\{a_n\}$ は収束することを示せ.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[2] 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

(1) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$　　(2) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$　　(4) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

[3] 次の数列は有界で単調増加であることを示し，極限を求めよ.

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$

[4] $a > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を示せ.

[5] 次の集合の最大，最小，上限，下限を求めよ.

(1) $A = [-2, 4)$

(2) $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \cdots\right\}$

(3) $A = \left\{\dfrac{1}{n} - n \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \cdots\right\}$

[6] $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

[7] $\sin x$，$\cos x$ は $(-\infty, \infty)$ で連続であることを示せ.

[8] 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x}\,(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\,)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

[9] 次の関数は $x=0$ で連続かどうか調べよ．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

[10] $f(x)$ が区間 I で連続ならば，$|f(x)|$ も I で連続であることを示せ．

[11] $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}$ の値を求めよ．

[12] 次の方程式を解け．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{3}{5}$　　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{5}$

(3) $\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{3}+\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{7}{9}$

[13] 次の等式を証明せよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

[14] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

[15] 双曲線関数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

について次の関係式を示せ．

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$

(3) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$

2. 微分法

[16] 関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能ではないことを示せ．

[17] 微分の定義に従い，等式 $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$ を示せ．ただし，$n\in\mathbb{Z}$ とする．

[18] 導関数に関する次の等式を示せ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Sin}^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Cos}^{-1}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Tan}^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$　　(4) $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$

[19] 導関数に関する次の等式を示せ．ただし，$a \in \mathbb{R}$，$x > 0$ とする．

(1) $\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^x = x^x(\log x + 1)$

[20] 次の曲線の，与えられた点における接線を求めよ．

(1) $y = x\log x \quad (x = 1)$　　(2) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x^2}{2} \quad (x = \sqrt{2})$

[21] 次の関数 $f(x)$ の導関数を求めよ．また，それが $(-\infty, \infty)$ で連続であるかどうか調べよ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

[22] $|x| \leq 1$ において，次の関数の極値および最大値，最小値を求めよ．

$$f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x + 2\sqrt{1-x^2}$$

[23] ロピタルの定理を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - \cos x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

[24] 次の関数の増減と極値を調べ，グラフの概形を描け．

(1) $y = x^{\frac{1}{x}}$　　(2) $y = x\log x$

[25] パラメータ表示される次の曲線 C の，与えられた点 P における接線を求めよ．

(1) $C:\ x = 2t^3 + t + 1,\ \ y = t^2 + 2t, \qquad \mathrm{P}\,(4, 3)$

(2) $C:\ x = t^2 + 1,\ \ y = e^t, \qquad \mathrm{P}\,(2, e)$

(3) $C:\ x = \log(t^3 + t),\ \ y = \mathrm{Tan}^{-1}t, \qquad \mathrm{P}\left(\log 2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

[26] 次の関数が何回連続微分可能であるか調べよ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = |x|x$　　(4) $f(x) = |x|^3$

[27] 次の関数の n 次導関数を求めよ．ただし，$n \geq 1$ とする．

(1) $y = \dfrac{1}{1+x}$　　(2) $y = \log(1-x)$

[28] 曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の極値，凹凸，変曲点を調べ，その概形を描け．

[29] 次の Leibniz の公式を証明せよ．

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(n)}.$$

[30] 次の関数の Maclaurin 展開を求めよ．

(1) $\sin x$　　(2) $\cos x$　　(3) $\log(1+x)$

(4) $\log(1-x)$　　(5) $\dfrac{1}{1+x}$　　(6) $\dfrac{1}{1-x}$

(7) e^x　　(8) xe^x　　(9) $e^x \sin x$

3．積分法

[31] 教科書 $p.60$ の基本的な不定積分の式を確かめよ．

[32] 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

[33] 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$　$(x>1)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$　$(|x|>1)$

[34] 定義に従い，次の広義積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$　　(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(7) $\displaystyle\int_a^\infty e^{-x}\,dx$　　(8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

[35] 次の広義積分を計算せよ．ただし，(1), (2) では $a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^a x^k\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^\infty x^k\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^\infty e^{kx}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^{kx}\,dx$

[**36**] 定義に従い，次の広義積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ (3) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$

[**37**] 次の広義積分の収束，発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin\frac{1}{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ (4) $\displaystyle\Gamma(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$

(5) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$

[**38**] 次の広義積分の収束，発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ (6) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$