レポート 第2回

/

问題4.3 の3

(1) $z=\log(x^2+y^2)$

$$z_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$z_{xx}=\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{(2x)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2\{(x^2+y^2)-2x^2\}}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

同様に

$$z_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $z_{xx}+z_{yy}=0$ 」

(2) $z=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}w$, $w=\frac{y}{x}$

$$z_x=z_w w_x=\frac{1}{1+w^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z_y=z_w w_y=\frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

さらに

$$z_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad z_{yy}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $z_{xx}+z_{yy}=0$ 」

問題 4.3 の 7 (3)

$$f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2+2x+2y=0 & \cdots ① \\ f_y = 3y^2+2x+2y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $3(x^2-y^2)=0$ $\quad \therefore (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x+y=0$ 又は $x-y=0$

- $y=-x$ のとき ① より $x^2=0$ $\quad \therefore x=0$

  このとき $y=0$ よって $(x,y)=(0,0)$

- $y=x$ のとき ① に代入して

  $3x^2+4x=0 \qquad x(3x+4)=0$

  $\therefore x=0$ 又は $x=-\frac{4}{3}$

  $x=0$ のときは 上と同じ

  $x=-\frac{4}{3}$ のとき $y=-\frac{4}{3}$ よって $(x,y)=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$

次に

$$\begin{cases} f_{xx}=6x+2=2(3x+1), & f_{xy}=2 \\ f_{yy}=6y+2=2(3y+1) \end{cases}$$

- $(x,y)=(0,0)$ では

  $f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=2$

  $D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=0$。 D を用いて判定できない。

$y=-x$ に沿って考えると

$$f(x,-x)=0$$

よって $(x,y)=(0,0)$ は極値ではない.

- $(x,y)=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$ では

$$f_{xx}=f_{yy}=-6,\quad f_{xy}=2$$

$$D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=36-4=32>0$$

これと $f_{xx}=-6<0$ より $(x,y)=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$ で極大値を取る. 極大値は

$$f\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=2\left(-\frac{4}{3}\right)^3+4\left(-\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=-2\left(\frac{4}{3}\right)^3+4\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^3$$