レポート 第1回



[1] 問題4.2の1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(1) fの連続性

fは点$(x,y)\neq(0,0)$において連続である。

fの点$(x,y)=(0,0)$の連続性を調べる。直線$y=x$に沿って$(x,y)\to(0,0)$とする。即ち$x\to0$として$(x,x)\to(0,0)$とすると

$$\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1\neq f(0,0)$$

よってfは$(x,y)=(0,0)$で連続でない。

(2) fの偏導関数

1) 点$(x,y)$, $x\neq0$, $y\neq0$, において偏微分可能で

$$f_x=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(x^2+y^2)-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

全く同様に

$$f_y=\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

2) 点$(x,0)$, $x \neq 0$, においても偏微分可能で偏導関数は 1)で $y=0$ とおいて

$$f_x(x,0)=0,\quad f_y(x,0)=\frac{2x^3}{x^4}=\frac{2}{x}$$

3) 点$(0,y)$, $y \neq 0$, において偏微分可能で偏導関数は 1)で $x=0$ とおいて

$$f_x(0,y)=\frac{2y^3}{y^4}=\frac{2}{y},\quad f_y(0,y)=0$$

4) 点$(0,0)$においても偏微分可能で

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

[2] 問題 4.2 の 8

「$z=f(x,y)$, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成関数を考える

(1) $\begin{cases} x_r=\cos\theta \\ y_r=\sin\theta \end{cases}$, $\begin{cases} x_\theta=-r\sin\theta \\ y_\theta=r\cos\theta \end{cases}$

従って

$$z_r=f_x x_r+f_y y_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$$

$$z_\theta=f_x x_\theta+f_y y_\theta=r(-f_x\sin\theta+f_y\cos\theta)$$ 」

(2) (1) の結果より

$$z_\theta = r(-f_x \sin\theta + f_y \cos\theta) = -y f_x + x f_y$$

これを利用すると

・ $z$ が $z = g(r)$ と表される

$$\iff z_\theta = 0 \iff y f_x = x f_y$$

┘