位相的複雑さとＬＳカテゴリについて

岩瀬 則夫

九州大学（伊都キャンパス）

洞爺湖接触幾何集会
26-29th Jan 2010

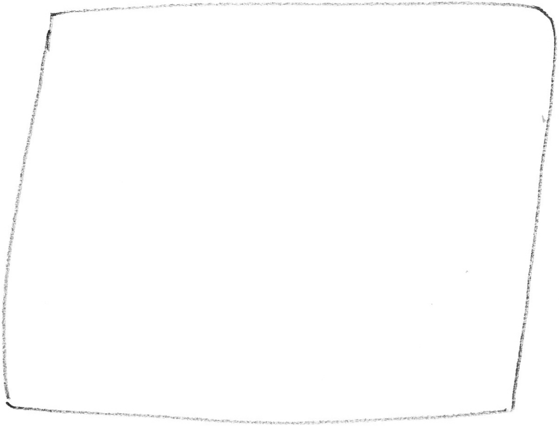
目次

始めに

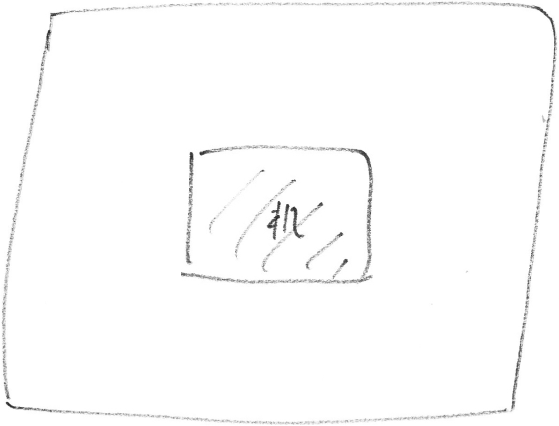
この講演は酒井道宏氏（久留米工専）との共同研究です

引っ越し

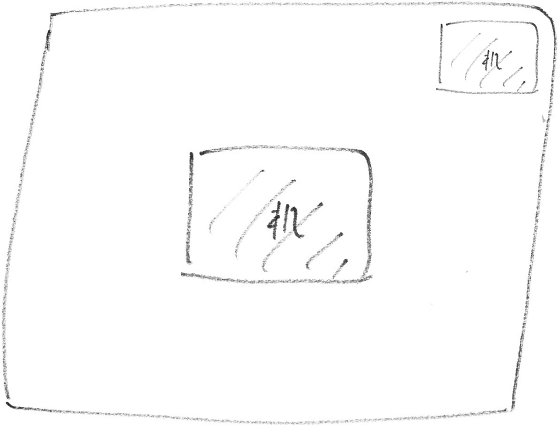
引っ越し



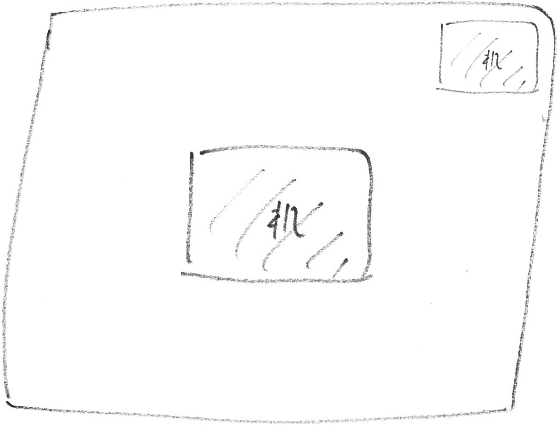
引っ越し



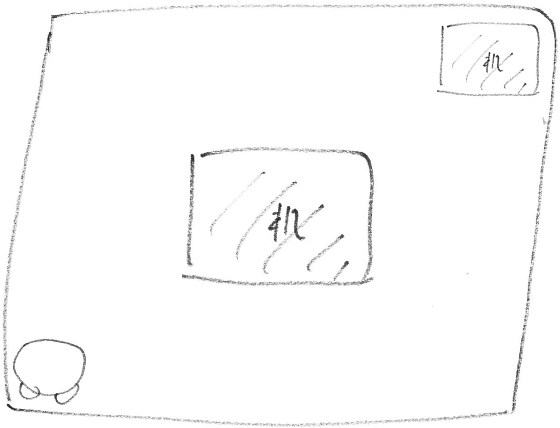
引っ越し



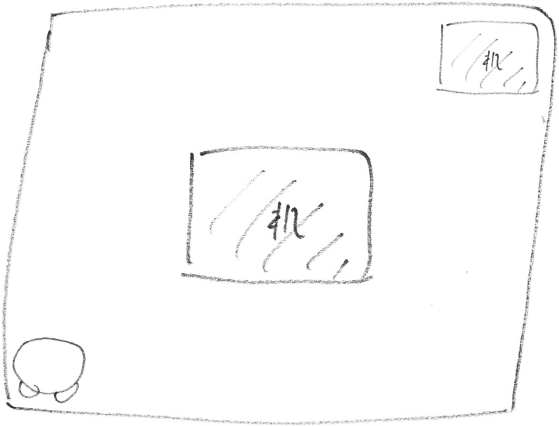
お掃除ロボット



お掃除ロボット

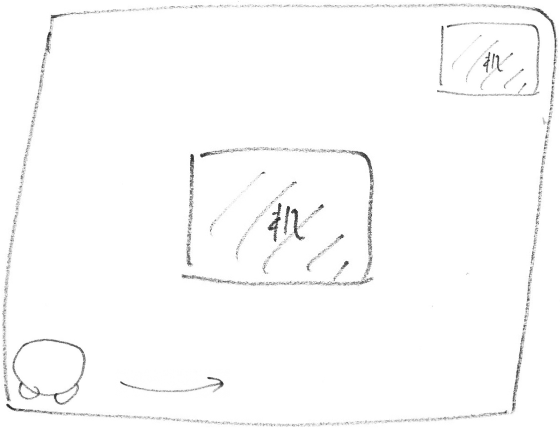


お掃除ロボット



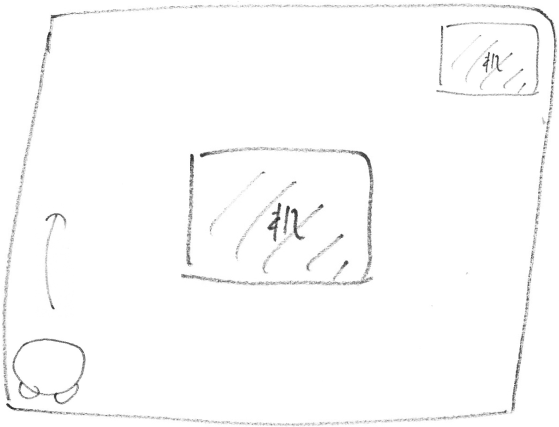
$\mathrm{B} = \{\text{status of the robot}\}$

お掃除ロボット２



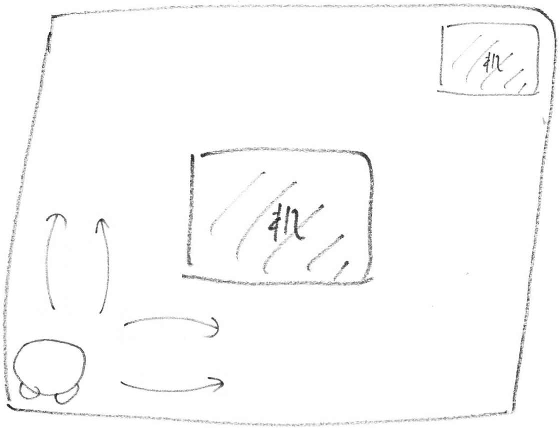
B = {status of the robot}

お掃除ロボット２



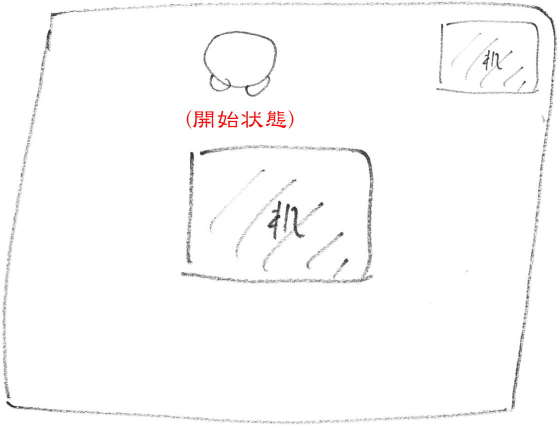
B $=$ {status of the robot}

お掃除ロボット２



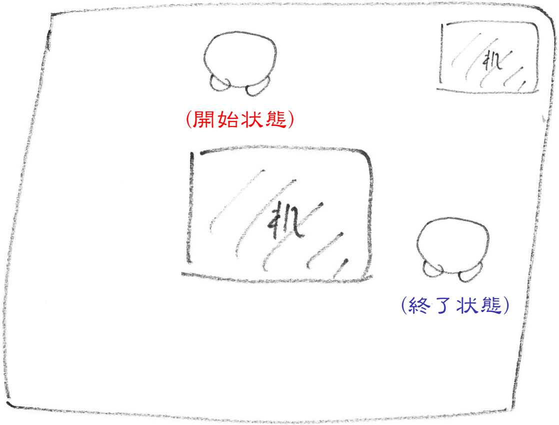
$\mathrm{B} = \{\text{status of the robot}\}$

お掃除ロボット動作



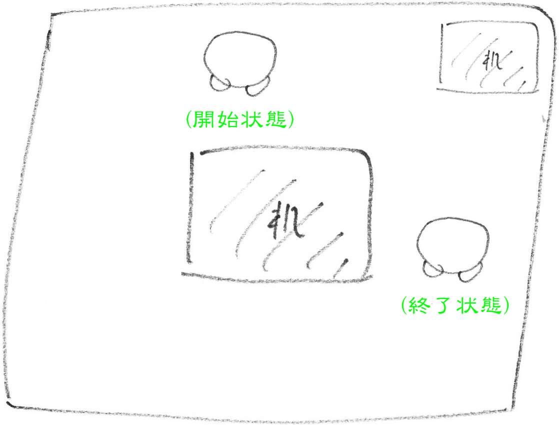
$$B = \{\text{status of the robot}\}$$

お掃除ロボット動作



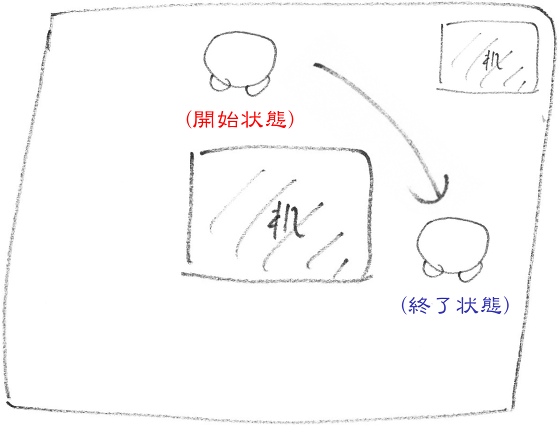
$B = \{\text{status of the robot}\}$

お掃除ロボット動作



$B \times B$ の点

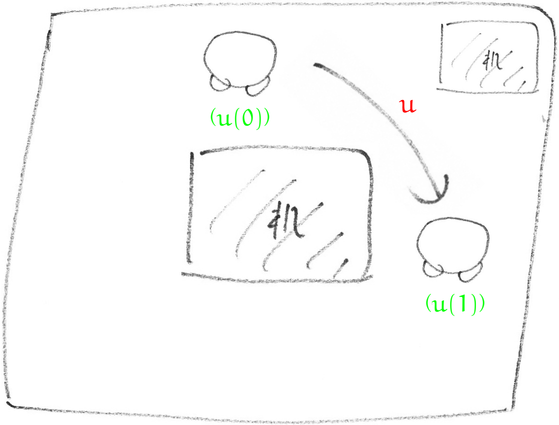
お掃除ロボット動作



B×B の点

お掃除ロボット動作

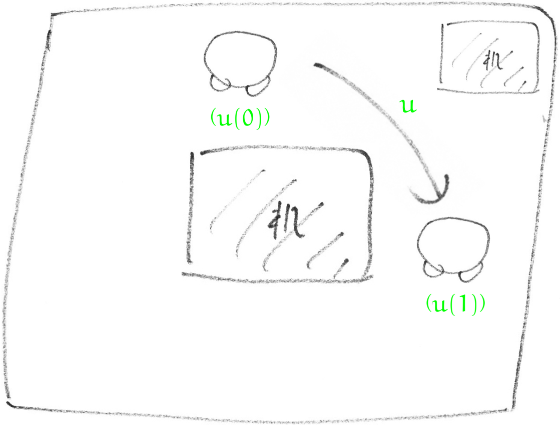
$$\mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\}$$



$B \times B$ の点 $(u(0), u(1))$

お掃除ロボット動作

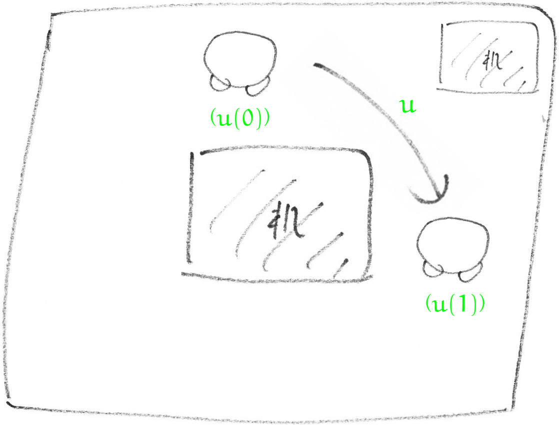
$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\} \\ \Big\downarrow \pi \\ B \times B \end{array}$$



$$\pi(u) = (u(0), u(1))$$

お掃除ロボット動作

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\} \\ \Big\downarrow \pi \\ B \times B \end{array}$$

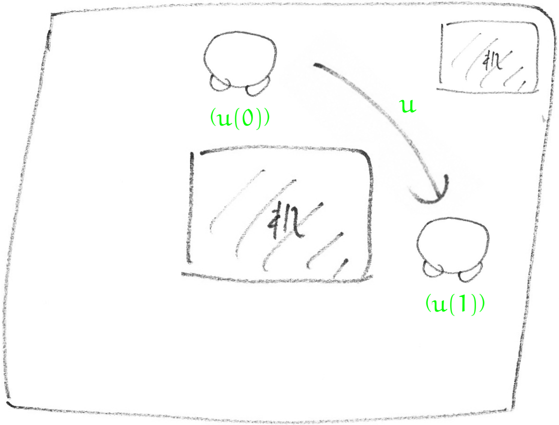


$$\pi(u) = (u(0), u(1)) \quad \text{(Serre Path Fibration)}$$

お掃除ロボット動作

$$\mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\}$$

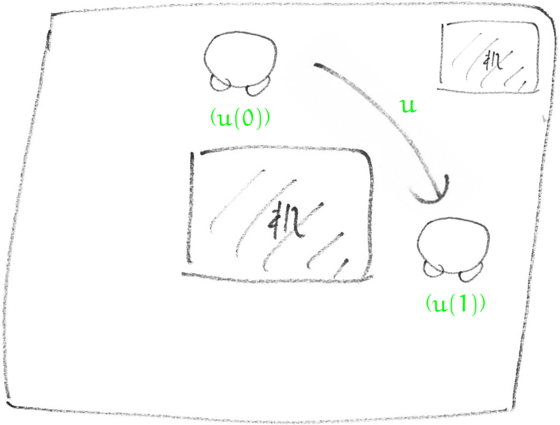
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \times B \arrow[u, bend left, "s"]
\end{tikzcd}$$



お掃除ロボット動作

$$\mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\}$$

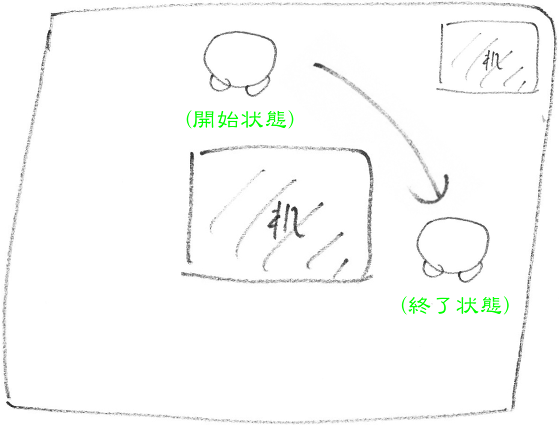
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi", shift left] \\ B \times B \arrow[u, "s", shift left] \end{tikzcd}$$



大域切断は存在するか？

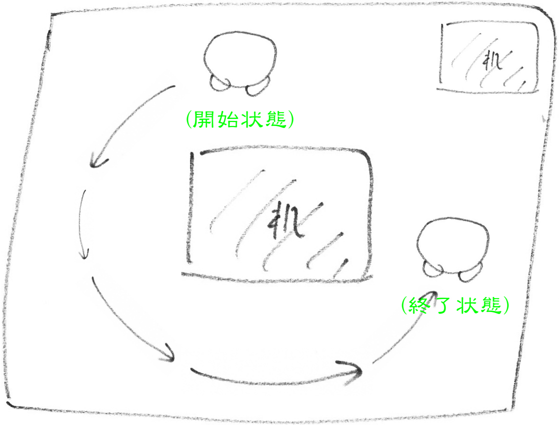
お掃除ロボット動作設計

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathrm{B}) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{B}\times\mathrm{B}
\end{tikzcd}
$$



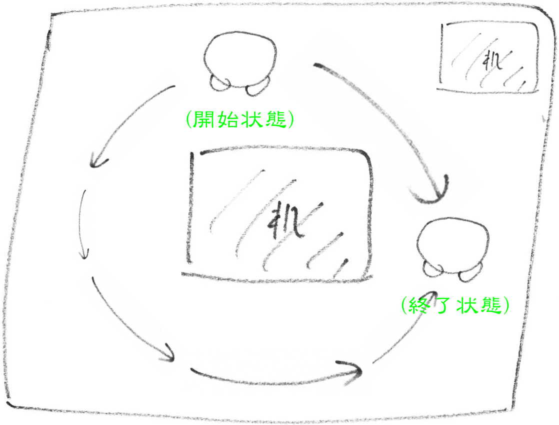
お掃除ロボット動作設計

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\ B \times B \end{tikzcd}$$



お掃除ロボット動作設計

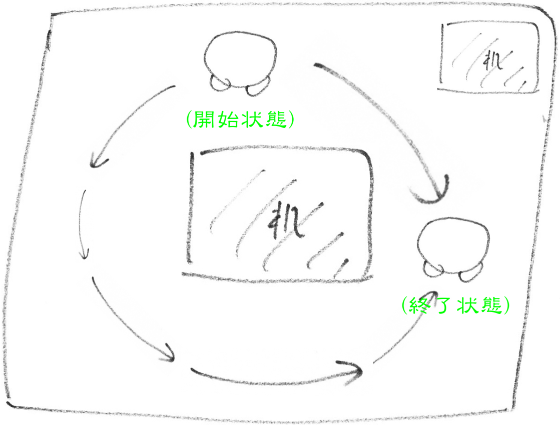
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\ B \times B \end{tikzcd}$$



大域切断が存在しない！

お掃除ロボット動作設計

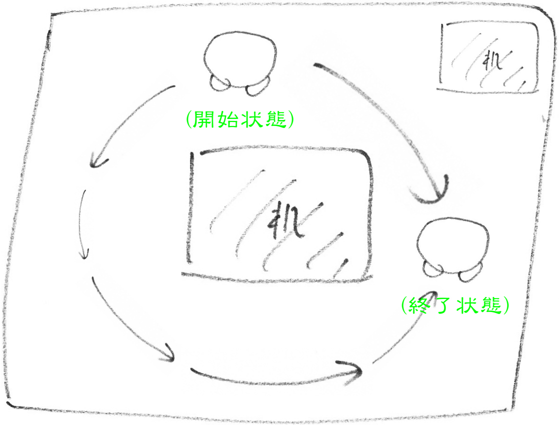
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \times B \arrow[u, bend left, "s"]
\end{tikzcd}
$$



大域切断が存在する

お掃除ロボット動作設計

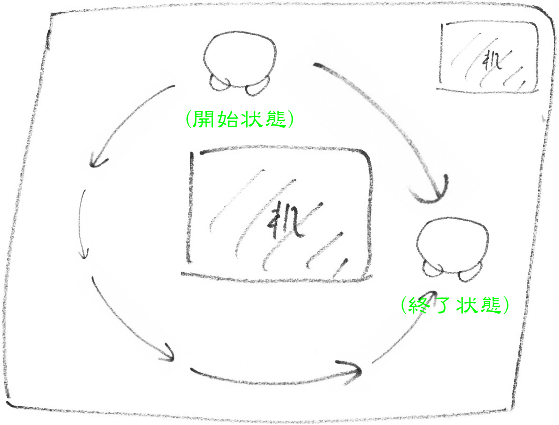
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\ B\times B \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$



大域切断が存在する $\Longleftrightarrow$ B は可縮である. (M. Farber)

お掃除ロボット動作設計

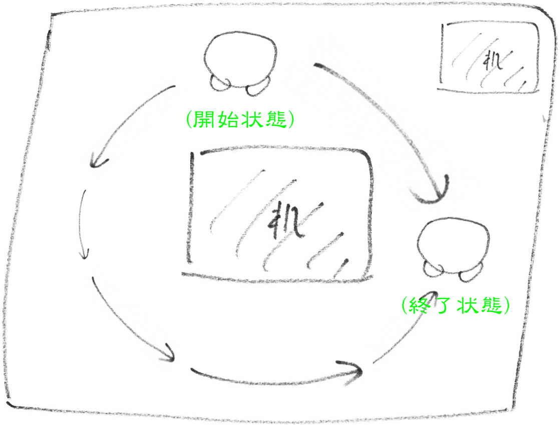
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
U \subset B \times B \arrow[u, shift left, "s_U"]
\end{tikzcd}
$$



局所切断ではどうか？

お掃除ロボット動作設計

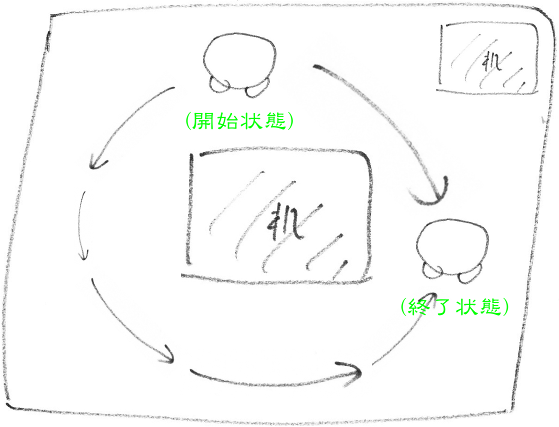
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B)=\{u:[0,1]\to B\} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ U_j \subset B\times B \arrow[u, shift left, "s_j"] \end{tikzcd}$$



局所切断を持つ B×B の開集合は何枚で全体を覆うか？

お掃除ロボット動作設計

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ U_j \subset B \times B \arrow[u, shift left, red, "s_j"] \end{tikzcd}$$



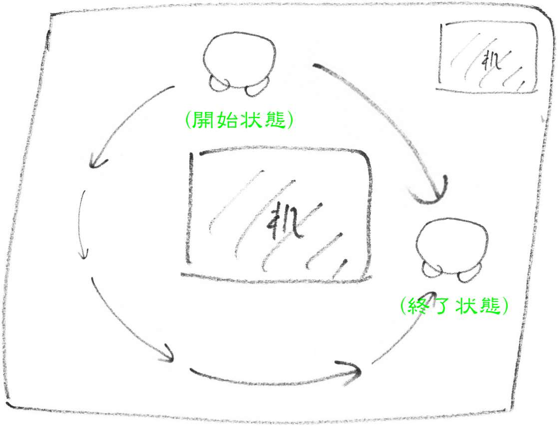
Definition (位相的複雑さ (M. Farber, 2003))

$$\mathcal{TC}(B) = \mathrm{Genus}(\pi)$$

お掃除ロボット動作設計

$$\mathcal{P}(B) = \{u : [0,1] \to B\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ U_j \subset B \times B \arrow[u, shift left, "s_j"] \end{tikzcd}$$

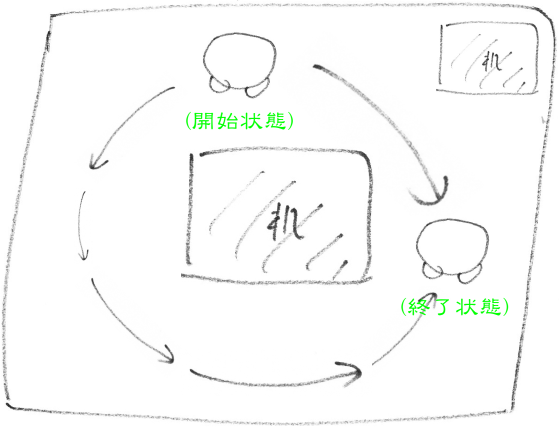


Definition (位相的複雑さ（M. Farber, 2003）)

$$\mathcal{TC}(B) = \mathrm{Genus}(\pi) = \mathrm{secat}(\pi) + 1$$

お掃除ロボット動作設計

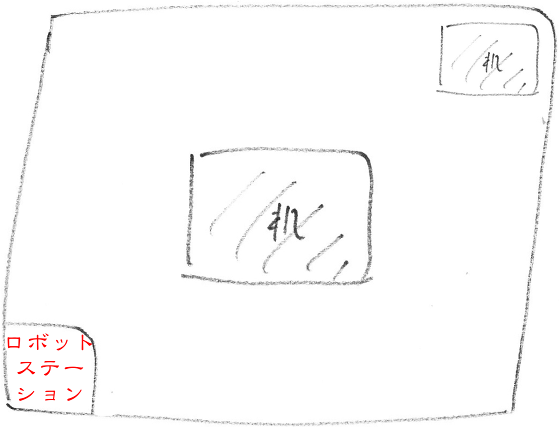
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B)=\{u:[0,1]\to B\} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ U_j \subset B\times B \arrow[u, shift left, "s_j"] \end{tikzcd}$$



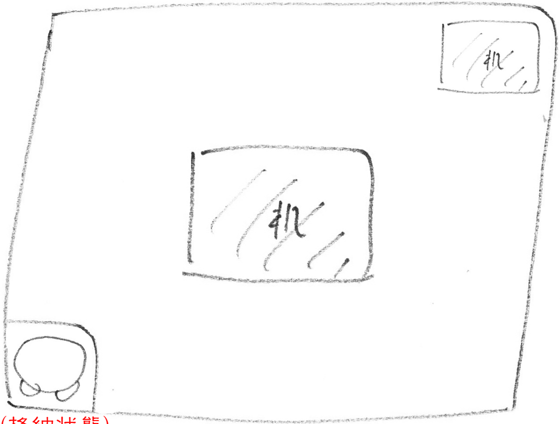
Definition (位相的複雑さ (M. Farber, 2003))

$$\mathcal{TC}(B)=\mathrm{Genus}(\pi)=\mathrm{secat}(\pi)+1 \quad (\mathrm{tc}(B)=\mathrm{secat}(\pi)).$$

ステーション付きお掃除ロボット

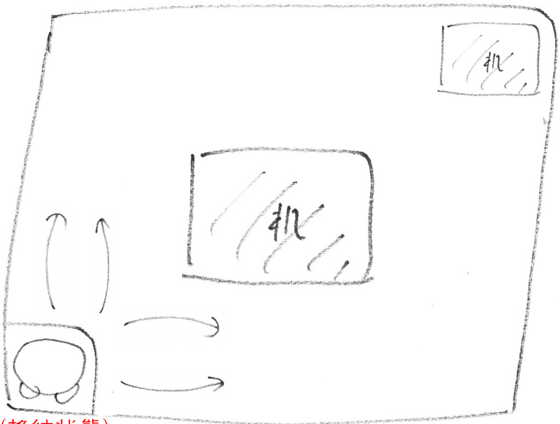


ステーション付きお掃除ロボット



(格納状態)

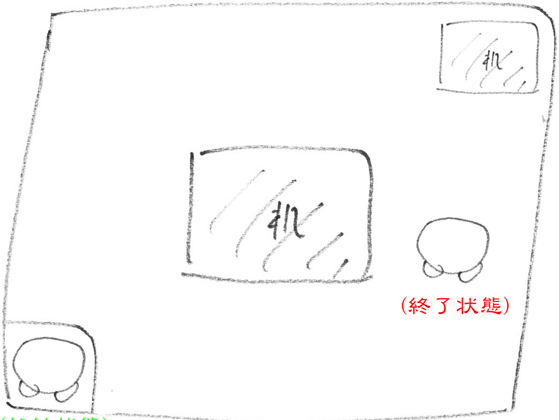
ステーション付きお掃除ロボット



(格納状態)

B $= \{\text{status of the robot}\} \ni *$,　$*$ は「格納状態」を表す.

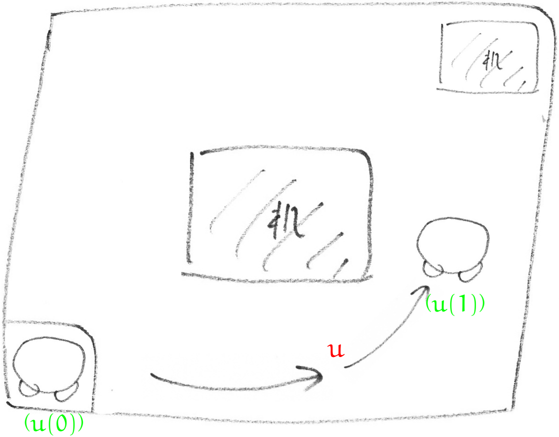
ステーション付きお掃除ロボット



B の点

ステーション付きお掃除ロボット動作

$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) =$ （格納状態） $\}$



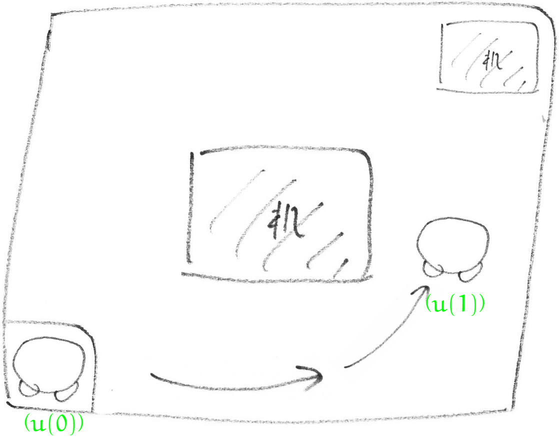
B の点 $u(1)$

ステーション付きお掃除ロボット動作

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

$$\Big\downarrow \pi_0$$

$$B$$

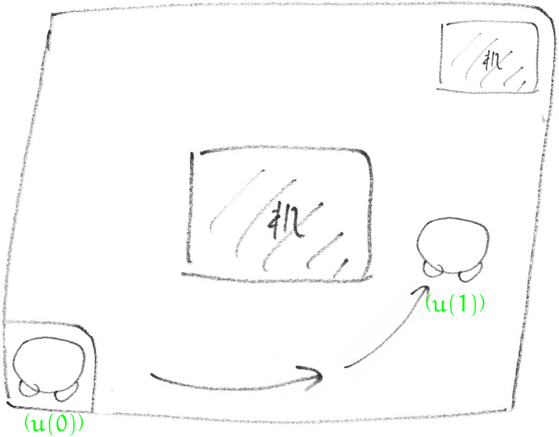


$$\pi_0(u) = u(1)$$

ステーション付きお掃除ロボット動作設計

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_0(B) \arrow[d, "\pi_0"] \\ B \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

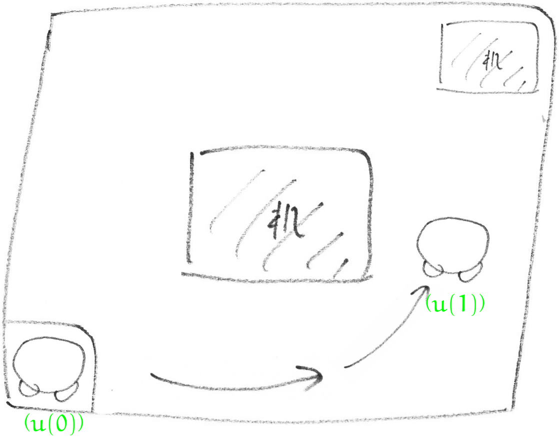


大域切断が存在するか？

ステーション付きお掃除ロボット動作設計

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

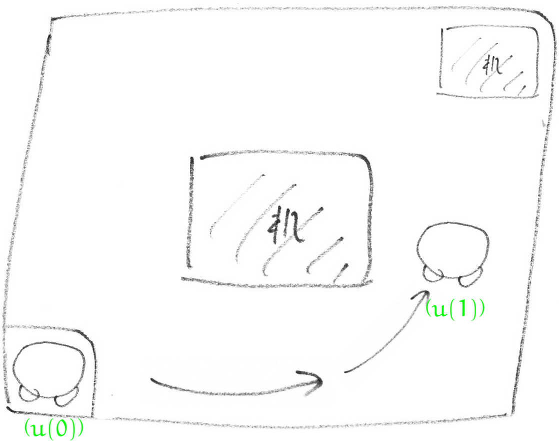
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_0(B) \arrow[d, "\pi_0"] \\ B \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$



大域切断が存在する

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_0(B) \arrow[d, "\pi_0"] \\ B \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

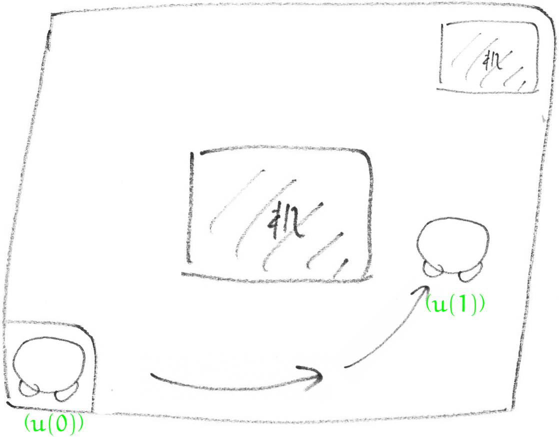


大域切断が存在する $\iff$ B は可縮である.

ステーション付きお掃除ロボット動作設計

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

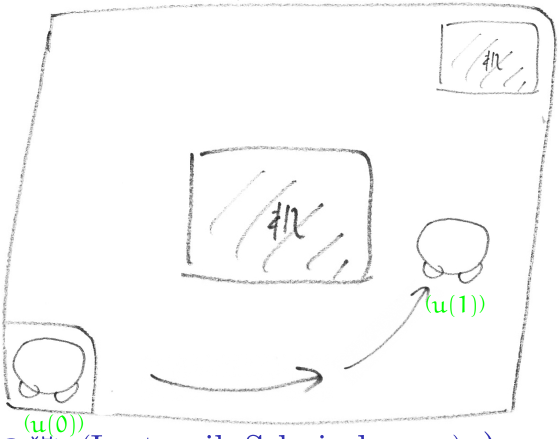
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_0(B) \arrow[d, "\pi_0"] \\ U_j \arrow[ur, "s_j"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & B \end{tikzcd}$$



局所切断を持つ B の開集合は何枚で全体を覆うか？

$$\mathcal{P}_0(B) = \{u : [0,1] \to B \mid u(0) = \text{（格納状態）}\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_0(B) \arrow[d, shift left, "\pi_0"] \\ U_j \subset B \arrow[u, shift left, "s_j"] \end{tikzcd}$$

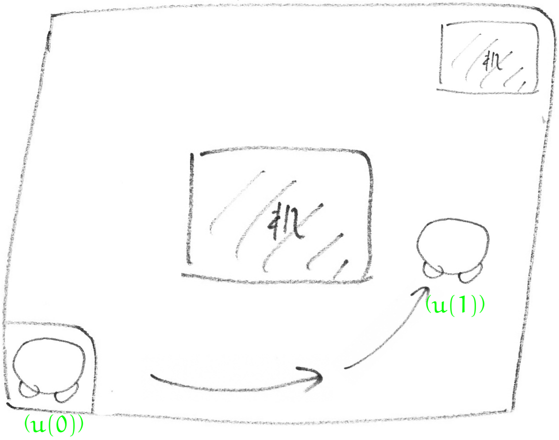


Definition（ＬＳの猫（Lesternik-Schnirelmann））

$$\mathrm{cat}(B) = \mathrm{secat}(\pi_0).$$

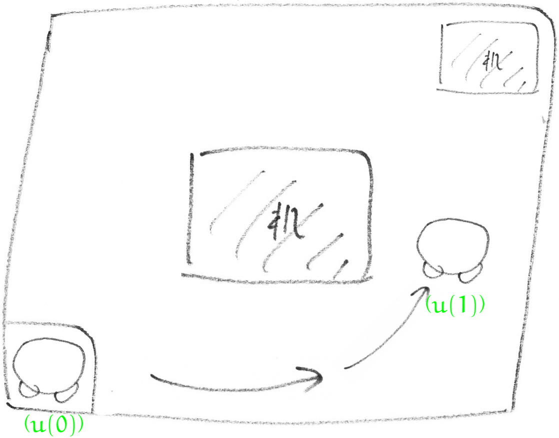
位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_0(B) & & \mathcal{P}(B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B & \xrightarrow[\mathrm{in}_2]{} & B \times B \end{array}$$



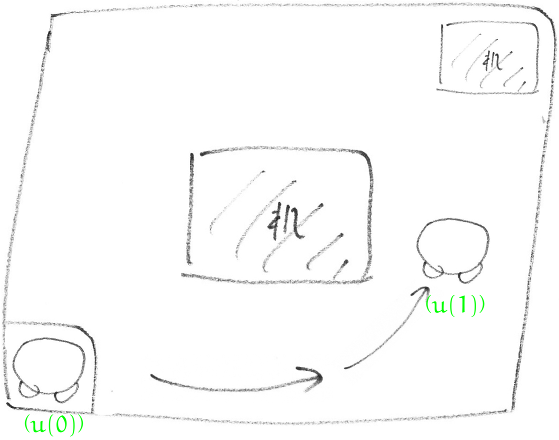
位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "in_2"'] & B\times B
\end{tikzcd}$$



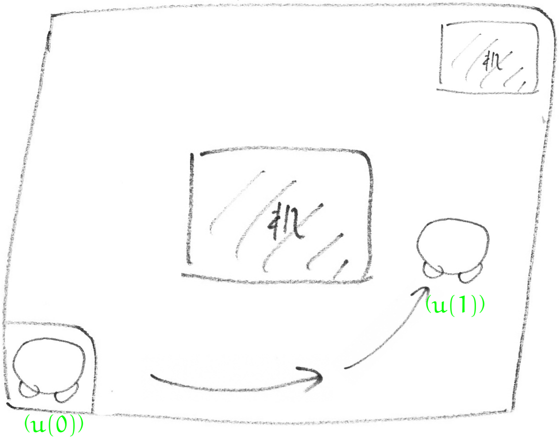
位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$



位相的複雑さとＬＳの猫

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & B\times B
\end{tikzcd}
$$

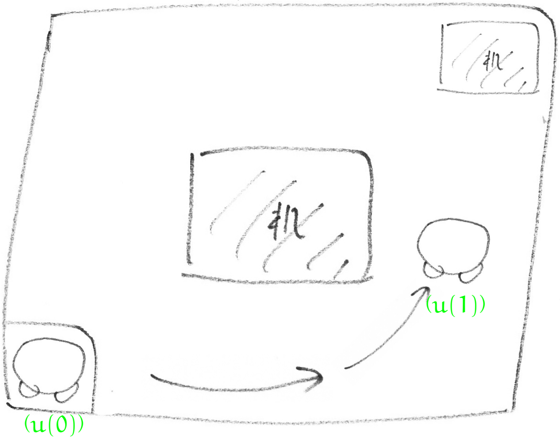


Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{tc}(B)$$

位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & B\times B
\end{tikzcd}$$

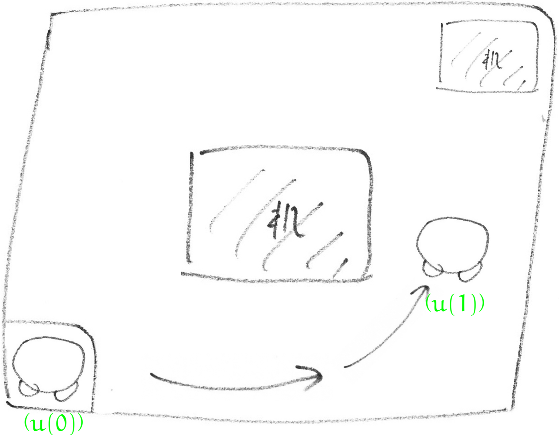


Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{tc}(B)$$

位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & B\times B
\end{tikzcd}$$

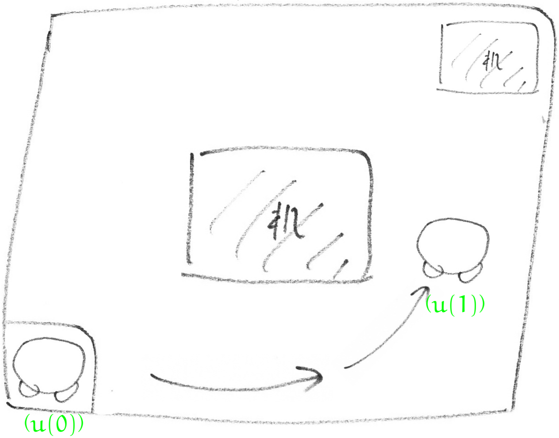


Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{tc}(B) \leq \mathrm{cat}(B\times B)$$

位相的複雑さとＬＳの猫

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{引き戻し}"] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$



Fact

$$\mathrm{cat}(B) \le \mathrm{tc}(B) \le \mathrm{cat}(B\times B) \le 2\,\mathrm{cat}(B).$$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間, $\quad R$ – 単位的環

Definition (Farber)

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間，　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X; R) \to H^*(X; R)$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X{\times}X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間, R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $z_R(X) = \mathrm{Max}\{m \geq 0 \mid H^*(X \times X, R) \supset I^m \neq 0\}$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m \geq 0 \mid H^*(X \times X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{f:Y \to X \times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi) < m}\ f^*(u) = 0\right\}$
   ただし $u \in I$ とする.

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X{\times}X, R) \to H^*(X;R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m{\geq}0 \mid H^*(X{\times}X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u;R) = \mathrm{Max}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \forall_{f:Y\to X\times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u) = 0\right\}$
ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X;R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v;R) \mid v \in I\}$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X{\times}X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m{\geq}0 \,|\, H^*(X{\times}X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \forall_{f:Y\to X\times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u) = 0\right\}$
   ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X; R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v; R) \,|\, v \in I\}$

Theorem (Farber, Farber-Grant)

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker\Delta^* : H^*(X{\times}X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m{\geq}0 \mid H^*(X{\times}X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \forall_{f:Y\to X\times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u) = 0\right\}$
   ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X; R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v; R) \mid v \in I\}$

Theorem (Farber, Farber-Grant)

$$\mathcal{Z}_R(X) \leq \mathrm{wgt}_\pi(X) \leq tc(X)$$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X\times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m\geq 0 \,|\, H^*(X\times X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m\geq 0 \,\middle|\, \forall_{f:Y\to X\times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u) = 0\right\}$
   ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X; R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v; R) \,|\, v \in I\}$

Theorem (Farber, Farber-Grant)

$$\mathcal{Z}_R(X) \leq \mathrm{wgt}_\pi(X) \leq \mathrm{tc}(X)$$
$$(\mathrm{cup}(X;R) \leq \mathrm{wgt}(X;R) \leq \mathrm{Mwgt}(X;R) \leq \mathrm{cat}(X))$$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m \geq 0 \mid H^*(X \times X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{f : Y \to X \times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi) < m}\ f^*(u) = 0\right\}$
ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X; R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v; R) \mid v \in I\}$

Theorem (Farber, Farber-Grant)

$$\mathcal{Z}_R(X) \leq \mathrm{wgt}_\pi(X) \leq \mathrm{tc}(X)$$

$$(\mathrm{cup}(X; R) \leq \mathrm{wgt}(X; R) \leq \mathrm{Mwgt}(X; R) \leq \mathrm{cat}(X))$$

零因子カップ積長とＴＣ重み

X – 空間, R – 単位的環

Definition (Farber)

$I = \ker \Delta^* : H^*(X \times X, R) \to H^*(X; R)$ を零因子イデアルと呼ぶ.

Definition (Farber, Farber-Grant)

1. $\mathcal{Z}_R(X) = \mathrm{Max}\{m \geq 0 \,|\, H^*(X \times X, R) \supset I^m \neq 0\}$
2. $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{f:Y \to X \times X,\ \mathrm{secat}(f^*\pi) < m}\ f^*(u) = 0\right\}$
   ただし $u \in I$ とする.
3. $\mathrm{wgt}_\pi(X; R) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}_\pi(v; R) \,|\, v \in I\}$

Theorem (Farber, Farber-Grant,(Rudyak,Strom,I))

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Z}_R(X) & \leq & \mathrm{wgt}_\pi(X) & & \leq & & \mathrm{tc}(X) \\ (\mathrm{cup}(X; R) & \leq & \mathrm{wgt}(X; R) & \leq & \mathrm{Mwgt}(X; R) & \leq & \mathrm{cat}(X)) \end{array}$$

加群重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition

加群重み

X – 空間, R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

Definition (I, 2004)

加群重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

Definition (I, 2004)

1. $\mathrm{Mwgt}(X;R) =$
$\mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \mathrm{im}(e^X_m)^* \text{ は } H^*(P^m\Omega(X);R) \text{ の非安定直和因子}\right\}$

加群重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

Definition (I, 2004)

1. $\mathrm{Mwgt}(X;R) =$
$\mathrm{Min}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \mathrm{im}(e^X_m)^* \text{ は } H^*(P^m\Omega(X);R) \text{ の非安定直和因子}\right\}$

Theorem (I-Kono 2007)

加群重み

X – 空間, R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

Definition (I, 2004)

1. $\mathrm{Mwgt}(X;R) =$
$\mathrm{Min}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \mathrm{im}(e^X_m)^* \text{ は } H^*(P^m\Omega(X);R) \text{ の非安定直和因子}\right\}$

Theorem (I-Kono 2007)

$$\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = 6 < 8 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))$$

加群重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

Definition (I, 2004)

1. $\mathrm{Mwgt}(X;R) =$
   $\mathrm{Min}\left\{m\geq 0 \,\middle|\, \mathrm{im}(e^X_m)^* \text{ は } H^*(P^m\Omega(X);R) \text{ の非安定直和因子}\right\}$

Theorem (I-Kono 2007)

$$\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = 6 < 8 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))$$

加群重み

X – 空間,　　R – 単位的環

Definition

$$e^X_m : P^m\Omega(X) \hookrightarrow P^\infty\Omega(X) \simeq X$$

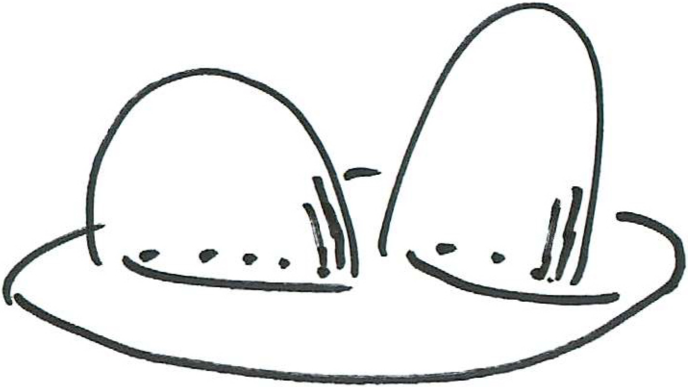
Definition (I, 2004)

1. $\mathrm{Mwgt}(X;R) =$
$\mathrm{Min}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, \mathrm{im}(e^X_m)^* \text{ は } H^*(P^m\Omega(X);R) \text{ の非安定直和因子}\right\}$

Theorem (I-Kono 2007)

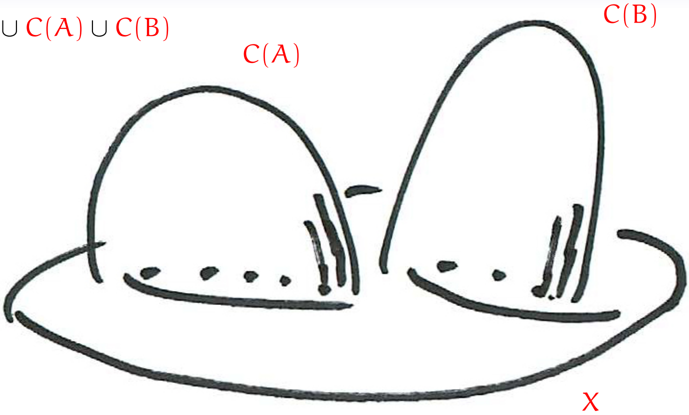
$$\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = 6 < 8 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))$$

コーン構成とＬＳの猫



コーン構成とＬＳの猫

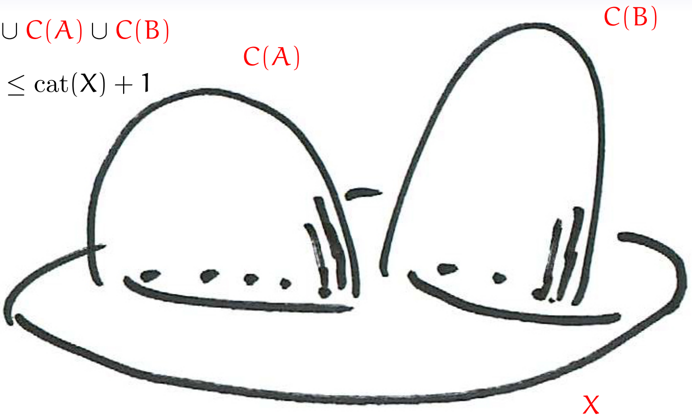
$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$



コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$

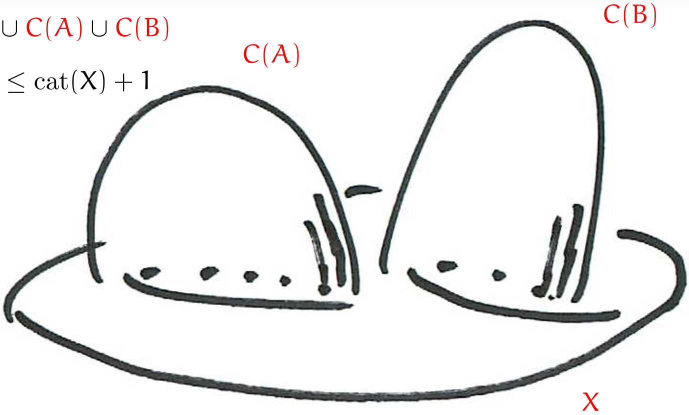


Fact

コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$



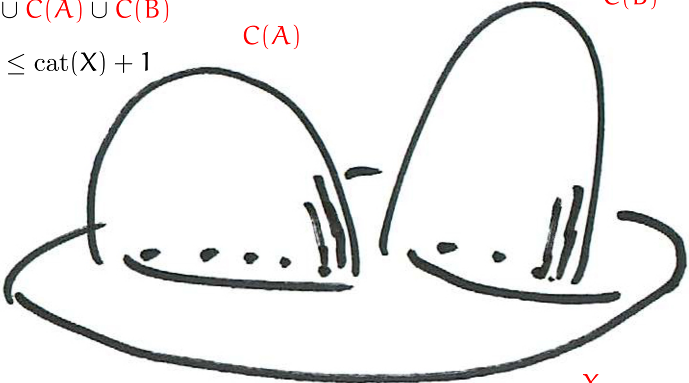
Fact

1. 適当な条件の下で $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ であり，さらに
2. $\mathrm{cat}(Y) = \mathrm{cat}(X) \iff C(A), C(B)$ の接着写像の高次 Hopf 不変量が 0

コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$



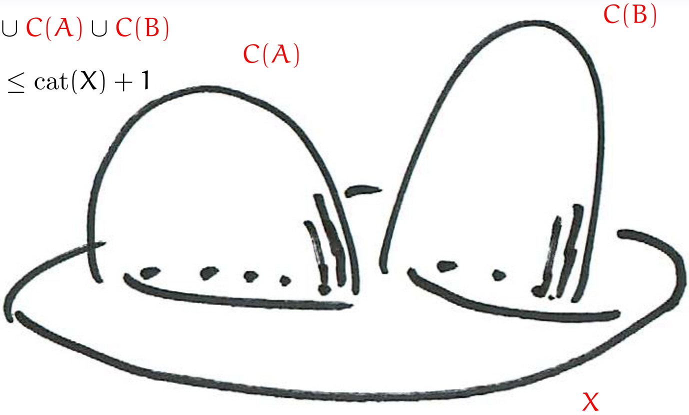
Fact

1. 適当な条件の下で $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ であり，さらに
2. $\mathrm{cat}(Y) = \mathrm{cat}(X) \iff C(A), C(B)$ の接着写像の高次 Hopf 不変量が 0

コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$



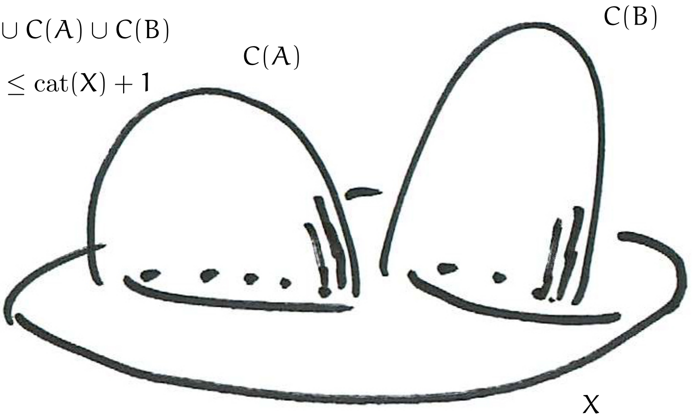
Fact

1. 適当な条件の下で $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ であり，さらに
2. $\mathrm{cat}(Y) = \mathrm{cat}(X) \iff C(A), C(B)$ の接着写像の高次 Hopf 不変量が 0

コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$



Fact (I)

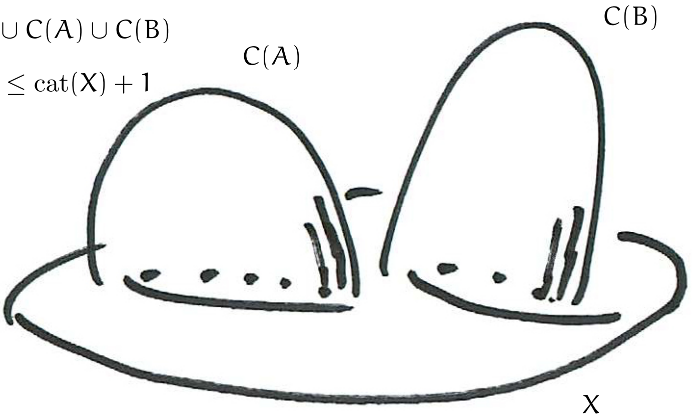
球面上の球面束 M で $\mathrm{cat}(M \smallsetminus \{*\}) = \mathrm{cat}(M)$ を満たすものがある．

（高次ホップ不変量の計算による）

コーン構成とＬＳの猫

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$

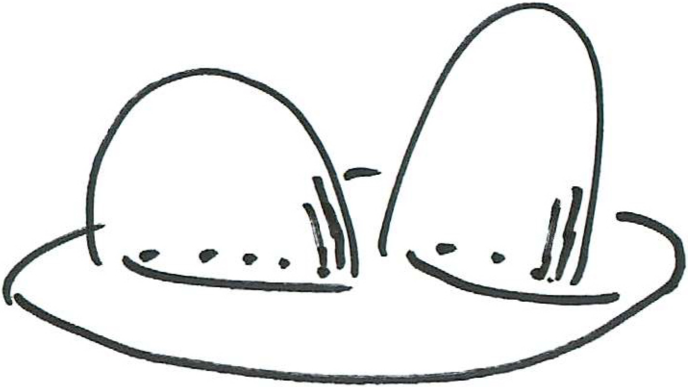


Fact (I)

球面上の球面束 M で $\mathrm{cat}(M \setminus \{*\}) = \mathrm{cat}(M)$ を満たすものがある.

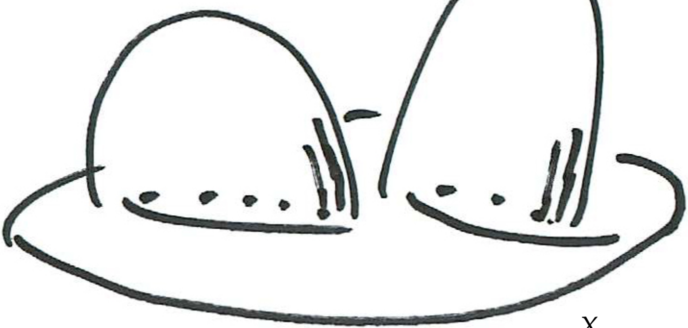
（高次ホップ不変量の計算による）

コーン構成と位相的複雑さ



コーン構成と位相的複雑さ

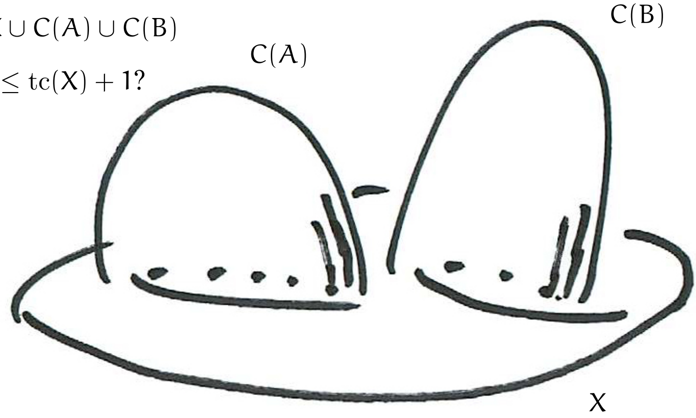
$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$



コーン構成と位相的複雑さ

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

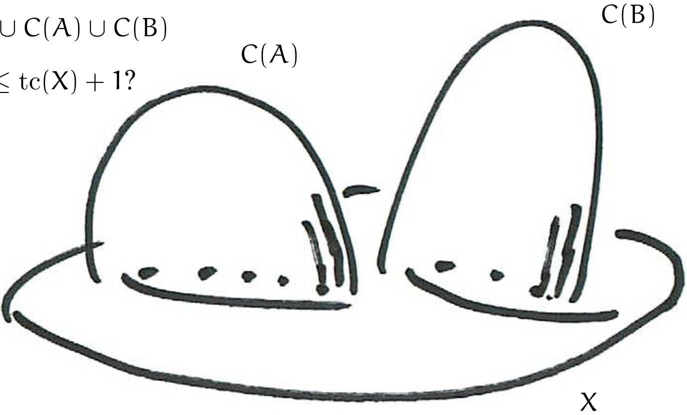
$\mathrm{tc}(Y) \le \mathrm{tc}(X) + 1$?



Fact

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$tc(Y) \leq tc(X) + 1?$



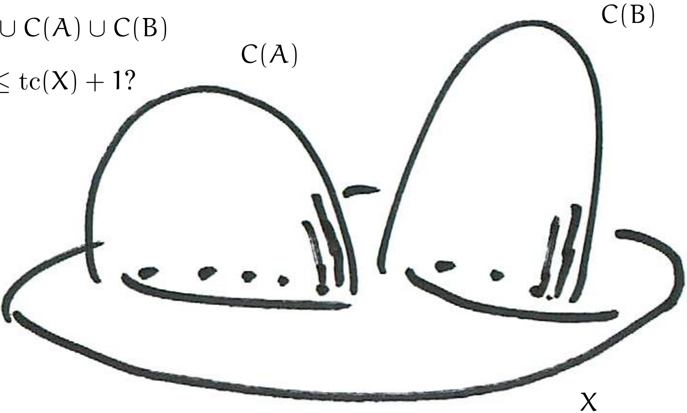
Fact

1. $S^n = \{*\} \cup C(S^{n-1})$ & $tc(\{*\}) = 0$
2. $tc(S^{odd}) = 1 = 0 + 1$ だが $tc(S^{even}) = 2 > 0 + 1$

コーン構成と位相的複雑さ

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$tc(Y) \leq tc(X) + 1?$



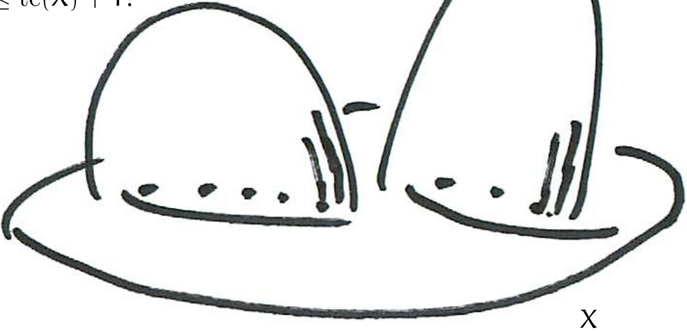
Fact

1. $S^n = \{*\} \cup C(S^{n-1})$ & $tc(\{*\}) = 0$
2. $tc(S^{odd}) = 1 = 0 + 1$ だが $tc(S^{even}) = 2 > 0 + 1$

コーン構成と位相的複雑さ

$Y = X \cup C(A) \cup C(B)$

$\mathrm{tc}(Y) \leq \mathrm{tc}(X) + 1?$



Fact

1. $S^n = \{*\} \cup C(S^{n-1})$ & $\mathrm{tc}(\{*\}) = 0$
2. $\mathrm{tc}(S^{\mathrm{odd}}) = 1 = 0 + 1$ だが $\mathrm{tc}(S^{\mathrm{even}}) = 2 > 0 + 1$

位相的複雑さ の困難な所

1. ＬＳの猫での加群重みに対応する不変量が無い
2. ＬＳの猫でのコーン構成に対応するものが何か見えない

位相的複雑さの困難な所

1. ＬＳの猫での加群重みに対応する不変量が無い
2. ＬＳの猫でのコーン構成に対応するものが何か見えない
3. ＬＳの猫での高次ホップ不変量に対応する不変量が無い

位相的複雑さの困難な所

1. ＬＳの猫での加群重みに対応する不変量が無い
2. ＬＳの猫でのコーン構成に対応するものが何か見えない
3. ＬＳの猫での高次ホップ不変量に対応する不変量が無い

位相的複雑さの困難な所

1. ＬＳの猫での加群重みに対応する不変量が無い
2. ＬＳの猫でのコーン構成に対応するものが何か見えない
3. ＬＳの猫での高次ホップ不変量に対応する不変量が無い

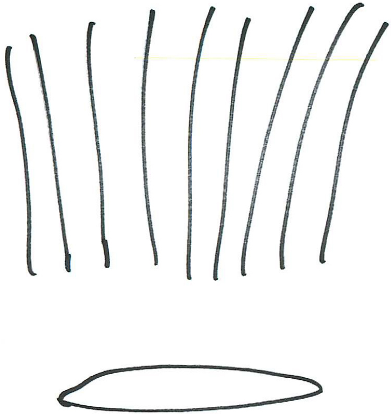
位相的複雑さの困難な所

1. ＬＳの猫での加群重みに対応する不変量が無い
2. ＬＳの猫でのコーン構成に対応するものが何か見えない
3. ＬＳの猫での高次ホップ不変量に対応する不変量が無い

これらの解決への道を与えることが始めの目標

特異ファイバーを持たないファイバーワイズ空間

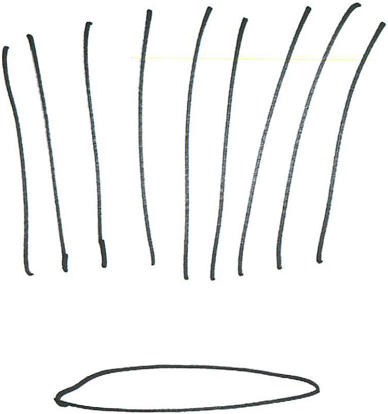
- 例：M. Crabb – I. James らによるファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論



特異ファイバーを持たないファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持たないなら，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法が知られている．

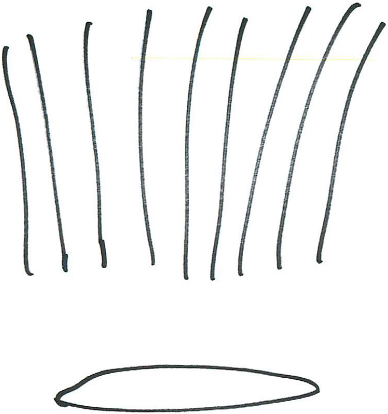
1. 例：M. Crabb – I. James らによるファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論
2. 例：M. Crabb によるファイバーワイズな安定ホモトピー論



特異ファイバーを持たないファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持たないなら，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法が知られている．

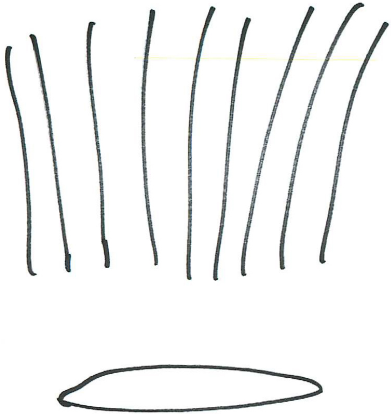
1. 例：M. Crabb – I. James らによるファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論
2. 例：M. Crabb によるファイバーワイズな安定ホモトピー論
3. 例：P. May によるパラメトライズドなホモトピー論



特異ファイバーを持たないファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持たないなら，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法が知られている．

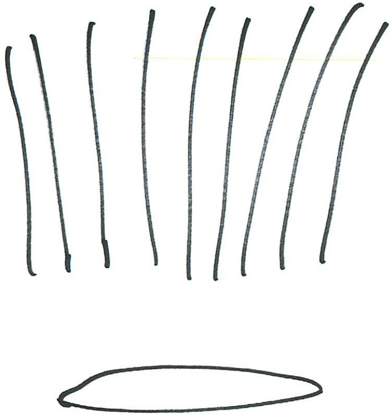
1. 例：M. Crabb – I. James らによるファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論
2. 例：M. Crabb によるファイバーワイズな安定ホモトピー論
3. 例：P. May によるパラメトライズドなホモトピー論



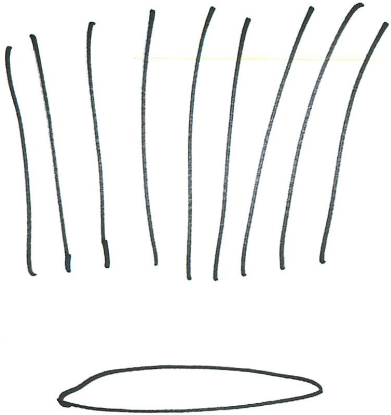
特異ファイバーを持たないファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持たないなら，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法が知られている．

1. 例：M. Crabb – I. James らによるファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論
2. 例：M. Crabb によるファイバーワイズな安定ホモトピー論
3. 例：P. May によるパラメトライズドなホモトピー論

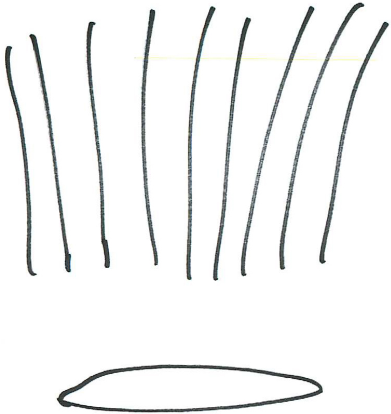


特異ファイバーを許容するファイバーワイズ空間



特異ファイバーを許容するファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持つ場合は，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法は（多分）まだ無い．

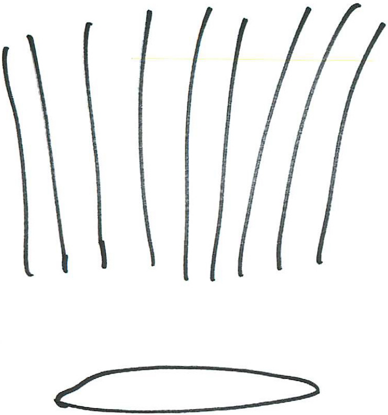


特異ファイバーを許容するファイバーワイズ空間

ファイバーワイズ空間が特異ファイバーを持つ場合は，通常のホモトピー論をファイバーワイズ空間に適用する一般的な方法は（多分）まだ無い．

試案：I-Sakai による“良い”空間上のファイバーワイズな（非安定）ホモトピー論

ー＞葉層のＬＳの猫への応用？



ファイバーワイズな(基点付き)ＬＳの猫

B – “良い” 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

ファイバーワイズな(基点付き)ＬＳの猫

B – “良い” 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{U_i\ \text{縦方向に可縮}\}} \text{s.t. } X = \bigcup_{i=0}^{m} U_i\}$$

ファイバーワイズな(基点付き)ＬＳの猫

B – “良い” 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{U_i \text{ 縦方向に可縮}\}} \text{s.t. } X = \bigcup_{i=0}^m U_i\}$$

Fact

ファイバーワイズな (基点付き) L S の猫

B – “良い” 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{U_i\ \text{縦方向に可縮}\}} \text{s.t. } X = \bigcup_{i=0}^{m} U_i\}$$

Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{cat}_B^B(\mathrm{pr}_2),\ \ \mathrm{tc}(B) \leq \mathrm{cat}(B \times B)$$

ただし， $\mathrm{pr}_2 : B \times B \to B$ は第二射影

ファイバーワイズな (基点付き) LS の猫

B – "良い" 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{U_i \text{ 縦方向に可縮}\}} \text{s.t. } X = \bigcup_{i=0}^{m} U_i\}$$

Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{cat}^B_B(pr_2), \ \mathrm{tc}(B) \leq \mathrm{cat}(B \times B)$$

ただし, $pr_2 : B \times B \to B$ は第二射影

ファイバーワイズな(基点付き)ＬＳの猫

B – “良い” 空間
X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間

Definition (James)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{U_i \text{ 縦方向に可縮}\}} \text{s.t. } X = \bigcup_{i=0}^m U_i\}$$

Fact

$$\mathrm{cat}(B) \leq \mathrm{cat}^B_B(\mathrm{pr}_2),\ \mathrm{tc}(B) \leq \mathrm{cat}(B \times B)$$

ただし， $\mathrm{pr}_2 : B \times B \to B$ は第二射影

位相的複雑さとファイバーワイズなＬＳの猫

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

位相的複雑さとファイバーワイズなＬＳの猫

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{d:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(B) = \mathrm{cat}^{B}_{B}(d(B))$$

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{d:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(B) = \mathrm{cat}^B_B(d(B))$$

Proof.

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{d:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(B) = \mathrm{cat}^{B}_{B}(d(B))$$

Proof.

$$d(B) = B\times B, \quad p_{d(B)} = \mathrm{pr}_2, \quad s_{d(B)} = \Delta,$$

位相的複雑さとファイバーワイズなＬＳの猫

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{d:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(B) = \mathrm{cat}^{B}_{B}(d(B))$$

Proof.

$$d(B) = B\times B, \quad p_{d(B)} = \mathrm{pr}_2, \quad s_{d(B)} = \Delta,$$

ここで，対角線写像 Δ がファイバーワイズな基点となるのは，Serre Path fibration $\pi : \mathcal{P}(B) \to B\times B$ がホモトピー論的に $\Delta : B \to B\times B$ と同値であることがその理由． □

位相的複雑さとファイバーワイズなＬＳの猫

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – “良い” 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – “良い” 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{\mathrm{d}:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(\mathrm{B}) = \mathrm{cat}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{d}(\mathrm{B}))$$

Proof.

$$\mathrm{d}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\times\mathrm{B}, \quad p_{\mathrm{d}(\mathrm{B})} = \mathrm{pr}_2, \quad s_{\mathrm{d}(\mathrm{B})} = \Delta,$$

ここで，対角線写像 Δ がファイバーワイズな基点となるのは，Serre Path fibration $\pi : \mathcal{P}(\mathrm{B}) \to \mathrm{B}\times\mathrm{B}$ がホモトピー論的に $\Delta : \mathrm{B} \to \mathrm{B}\times\mathrm{B}$ と同値であることがその理由． □

位相的複雑さとファイバーワイズなＬＳの猫

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ – "良い" 位相空間と連続写像の圏
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)$ – "良い" 空間への連続写像と可換図の圏

Theorem (I-Sakai)

$$\exists_{\mathrm{d}:\underline{\underline{\mathcal{T}}}\to\underline{\underline{\mathcal{T}}}(2)}\ \mathrm{tc}(\mathrm{B}) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{d}(\mathrm{B}))$$

Proof.

$$\mathrm{d}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\times\mathrm{B}, \quad \mathrm{p}_{\mathrm{d}(\mathrm{B})} = \mathrm{pr}_2, \quad \mathrm{s}_{\mathrm{d}(\mathrm{B})} = \Delta,$$

ここで，対角線写像 Δ がファイバーワイズな基点となるのは，Serre Path fibration $\pi : \mathcal{P}(\mathrm{B}) \to \mathrm{B}\times\mathrm{B}$ がホモトピー論的に $\Delta : \mathrm{B} \to \mathrm{B}\times\mathrm{B}$ と同値であることがその理由． □

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma: X \to P_B^m(\mathcal{L}_B^B(X))} \text{ s.t. } \mathrm{id}_X = e_m^X \circ \sigma$$

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma: X \to P_B^m(\mathcal{L}_B^B(X))} \text{ s.t. } \mathrm{id}_X = e_m^X \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma : X \to P^m_B(\mathcal{L}^B_B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e^X_m \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma : X \to P_B^m(\mathcal{L}_B^B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e_m^X \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma:X \to P^m_B(\mathcal{L}^B_B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e^X_m \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

1. $\mathrm{cup}^B_B(X; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{u_1, \cdots, u_m \in I\}} \text{ s.t. } u_1 \cdots u_m \neq 0 \right\}$

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma : X \to P_B^m(\mathcal{L}_B^B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e_m^X \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

1. $\mathrm{cup}_B^B(X; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{u_1, \cdots, u_m \in I\}} \text{ s.t. } u_1 \cdots u_m \neq 0 \right\}$
2. $\mathrm{wgt}_B^B(u; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{f : Y \to X \in \underline{\mathcal{T}}_B^B,\ \mathrm{cat}_B^B(f) < m}\ f^*(u) = 0 \right\}$
3. $\mathrm{Mwgt}_B^B(X; R) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e_m^X)^* \text{ は，非安定コホモロジー} \\ \text{作用素上で分裂する単射} \end{array} \right\}$

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}_B^B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma : X \to P_B^m(\mathcal{L}_B^B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e_m^X \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

1. $\mathrm{cup}_B^B(X; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{u_1, \cdots, u_m \in I\}} \text{ s.t. } u_1 \cdots u_m \neq 0 \right\}$
2. $\mathrm{wgt}_B^B(u; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{f : Y \to X \in \underline{\mathcal{T}}_B^B,\ \mathrm{cat}_B^B(f) < m}\ f^*(u) = 0 \right\}$
3. $\mathrm{Mwgt}_B^B(X; R) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e_m^X)^* \text{ は，非安定コホモロジー} \\ \text{作用素上で分裂する単射} \end{array} \right\}$

ファイバーワイズなカップ長と猫的重み

X – B 上ファイバーワイズな基点付き空間
R – 単位的環
$m \geq 0$

Theorem (Sakai)

$$\mathrm{cat}^B_B(X) \leq m \iff \exists_{\sigma : X \to P^m_B(\mathcal{L}^B_B(X))} \text{s.t. } \mathrm{id}_X = e^X_m \circ \sigma$$

Definition (James, I-Sakai)

$u \in I = H^*(X, B; R) \subset H^*(X; R)$ に対して

1. $\mathrm{cup}^B_B(X; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \middle| \exists_{\{u_1, \cdots, u_m \in I\}} \text{ s.t. } u_1 \cdots u_m \neq 0 \right\}$
2. $\mathrm{wgt}^B_B(u; R) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \middle| \forall_{f : Y \to X \in \underline{\mathcal{T}}^B_B,\ \mathrm{cat}^B_B(f) < m}\ f^*(u) = 0 \right\}$
3. $\mathrm{Mwgt}^B_B(X; R) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \middle| \begin{array}{l} (e^X_m)^* \text{ は，非安定コホモロジー} \\ \text{作用素上で分裂する単射} \end{array} \right\}$

カップ長と重み

Theorem (James, I-Sakai)

$$\mathrm{cup}^{B}_{B}(X;R) \le \mathrm{wgt}^{B}_{B}(X;R) \le \mathrm{Mwgt}^{B}_{B}(X;R) \le \mathrm{cat}^{B}_{B}(X).$$

Theorem (Farber-Grant)

$$Z_{R}(B) \le \mathrm{wgt}_{\pi}(B;R) \le \quad ??? \quad \le \mathrm{tc}(B).$$

カップ長と重み

Theorem (James, I-Sakai)

$$\mathrm{cup}^{B}_{B}(\mathsf{X};\mathsf{R}) \le \mathrm{wgt}^{B}_{B}(\mathsf{X};\mathsf{R}) \le \mathrm{Mwgt}^{B}_{B}(\mathsf{X};\mathsf{R}) \le \mathrm{cat}^{B}_{B}(\mathsf{X}).$$

Theorem (Farber-Grant)

$$\mathcal{Z}_{R}(B) \le \mathrm{wgt}_{\pi}(B;\mathsf{R}) \le \quad ??? \quad \le \mathrm{tc}(B).$$

カップ長と重み

Theorem (James, I-Sakai)

$$\mathrm{cup}_B^B(X;R) \le \mathrm{wgt}_B^B(X;R) \le \mathrm{Mwgt}_B^B(X;R) \le \mathrm{cat}_B^B(X).$$

Theorem (Farber-Grant)

$$\mathcal{Z}_R(B) \le \mathrm{wgt}_\pi(B;R) \le \quad ??? \quad \le \mathrm{tc}(B).$$

下から評価する不変量たちの関係

B – “良い” 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(B\times B, \Delta(B); R)$

Theorem (I-Sakai)

下から評価する不変量たちの関係

B – “良い” 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(\mathrm{B}\times\mathrm{B}, \Delta(\mathrm{B}); \mathrm{R})$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(\mathrm{B}) = \mathrm{cup}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{d}(\mathrm{B}); \mathrm{R})$$

下から評価する不変量たちの関係

B – “良い” 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(B\times B, \Delta(B); R)$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathcal{Z}_R(B) = \mathrm{cup}^B_B(d(B); R)$$

Theorem (I-Sakai)

下から評価する不変量たちの関係

B – "良い" 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(B \times B, \Delta(B); R)$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathcal{Z}_R(B) = \mathrm{cup}_B^B(d(B); R)$$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{wgt}_B^B(u; R) \leq \mathrm{Mwgt}_B^B(d(B); R) \ (\leq \mathrm{tc}(B))$$

下から評価する不変量たちの関係

B – “良い” 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(B\times B, \Delta(B); R)$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathcal{Z}_R(B) = \mathrm{cup}_B^B(d(B); R)$$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{wgt}_B^B(u; R) \leq \mathrm{Mwgt}_B^B(d(B); R) \ (\leq \mathrm{tc}(B))$$

下から評価する不変量たちの関係

B – “良い” 空間
R – 単位的環,
$u \in H^*(B \times B, \Delta(B); R)$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathcal{Z}_R(B) = \mathrm{cup}_B^B(d(B); R)$$

Theorem (I-Sakai)

$$\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{wgt}_B^B(u; R) \leq \mathrm{Mwgt}_B^B(d(B); R) \ (\leq \mathrm{tc}(B))$$

ファイバーワイズな強い猫

$\mathcal{F}^{B}_{B}$ – "良い" B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

ファイバーワイズな強い猫

$\underline{\underline{\mathcal{F}}}{}^{B}_{B}$ – “良い” B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

$\mathrm{Cat}^{B}_{B}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{(X_i, h_i : A_i \to X_{i-1})\}} \text{s.t. } X_0 = B \,\&\, X_m \simeq_B X\};$

$\underline{\mathcal{F}}^{B}_{B}$ – "良い" B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

$\mathrm{Cat}^{B}_{B}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{\{(X_i, h_i : A_i \to X_{i-1})\}} \text{s.t. } X_0 = B \,\&\, X_m \simeq_B X\}$:

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[r, "p_{A_i}"] \arrow[d, "h_i"'] & B \arrow[d, hook, "s_{X_i}"] & & \\
B \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X_{i-1} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_m \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dl] & X \arrow[dll] \\
 & & B & &
\end{tikzcd}$$

ファイバーワイズな強い猫

$\underline{\mathcal{F}}^B_B$ – “良い” B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

$\mathrm{Cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{(X_i, h_i : A_i \to X_{i-1})\}} \text{s.t. } X_0 = B \,\&\, X_m \simeq_B X\}$:

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[r, "p_{A_i}"] \arrow[d, "h_i"'] & B \arrow[d, hook, "s_{X_i}"] & & \\
B \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X_{i-1} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_m \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dl] & X \arrow[dll] \\
 & & B & &
\end{tikzcd}$$

Remark

ファイバーワイズなコーンを取る過程で $\mathrm{cat}^B_B(\text{——})$ が 1 上がるかどうかはファイバーワイズな高次ホップ不変量で決まる。

ファイバーワイズな強い猫

$\underline{\underline{\mathcal{F}}}{}^{B}_{B}$ – "良い" B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

$\mathrm{Cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{(X_i, h_i : A_i \to X_{i-1})\}} \text{s.t. } X_0 = B \,\&\, X_m \simeq_B X\}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[r, "p_{A_i}"] \arrow[d, "h_i"'] & B \arrow[d, hook, "s_{X_i}"] & & \\
B \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X_{i-1} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_m \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dl] & X \arrow[dll] \\
 & & B & &
\end{tikzcd}
$$

Remark

ファイバーワイズなコーンを取る過程で $\mathrm{cat}^B_B(\text{——})$ が 1 上がるかどうかは**ファイバーワイズな高次ホップ不変量**で決まる.

ファイバーワイズな強い猫

$\underline{\underline{\mathcal{F}}}^{B}_{B}$ – “良い” B 上ファイバーワイズな空間と B 上の連続写像の空間

Definition (I-Sakai)

$\mathrm{Cat}^B_B(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\{(X_i, h_i : A_i \to X_{i-1})\}} \text{s.t. } X_0 = B \,\&\, X_m \simeq_B X\}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[r, "p_{A_i}"] \arrow[d, "h_i"'] & B \arrow[d, hook, "s_{X_i}"] & & \\
B \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X_{i-1} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_m \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dl] & X \arrow[dll] \\
 & & B & &
\end{tikzcd}
$$

Remark

ファイバーワイズなコーンを取る過程で $\mathrm{cat}^B_B(\text{——})$ が 1 上がるかどうかはファイバーワイズな高次ホップ不変量で決まる.

最後に

この講演は次のプレプリントを基にしています：

Topological complexity is a fibrewise L-S category

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ iwase/Works/tc-ls-6.pdf

（to appear in Topology and its Applications）

最後に

この講演は次のプレプリントを基にしています：

Topological complexity is a fibrewise L-S category

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ iwase/Works/tc-ls-6.pdf

（to appear in Topology and its Applications）

最後に 2

2 月 19 日（金）～ 21 日（日）の日程で第四回福岡札幌幾何学セミナーを福岡市の九州大学西新プラザにて開催します：

多数のご参加をお願いいたします。

http://jupiter.math.kyushu-u.ac.jp/Fukuoka-Sapporo/

どうもありがとうございました。

最後に 2

2 月 19 日（金）～ 21 日（日）の日程で第四回福岡札幌幾何学セミナーを福岡市の九州大学西新プラザにて開催します：

多数のご参加をお願いいたします。

http://jupiter.math.kyushu-u.ac.jp/Fukuoka-Sapporo/

どうもありがとうございました。