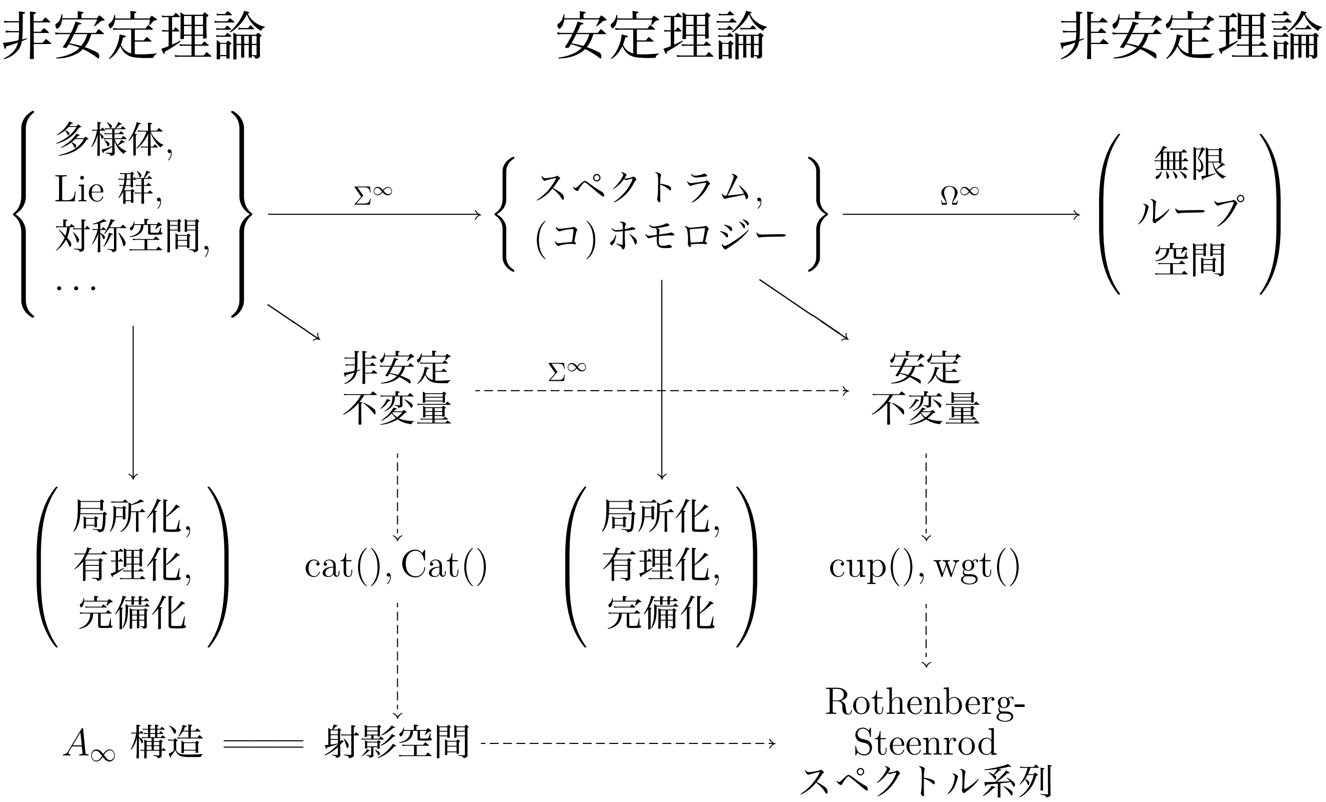
高次ホップ不変量とループ空間のコホモロジー

『湯布院研究集会』
湯布院ハイツ, 湯布院
4th~6th, December, 2003

岩瀬 則夫
(九州大学)



問題 [Ganea, 1971, (全15題) [7]]

1. 多様体の L-S category を計算せよ。 例えば Lie 群、Stiefel 多様体、etc.$\cdots$

2. $\mathrm{cat}(X\times S^n)=\mathrm{cat}(X)+1$ である。 これは正しいか?

4. 球面上の球面束の LS category を束の特性写像のホモトピー不変量によって記述せよ。

1 Lusternik-Schnirelmann category

定義 1.1

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\{A_0,...,A_m\,;\,\text{closed in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^{m} A_i,\ \begin{array}{l}\text{each } U_i \text{ is con-}\\ \text{tractible } \underline{in}\ X\end{array} \end{array} \right\}$$
$$= \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \text{ is compress-} \\ \text{ible into the fat wedge } \prod_{m}^{m+1} X. \end{array} \right\}$$

定理 1.2 (Lusternik-Schnirelmann [15])

閉多様体 M 上定義されたいかなる C^∞-写像も $\mathrm{cat}(M)+1$ 個以上の *critical points* を持つ。

1.1 「強い」猫たち

以下の位相不変量 $\mathrm{gcat}(X)$ も同様に定義されるが、R. H. Fox によってホモトピー不変でないことが知られている。さらに Ganea によってこれをホモトピー不変となるように変更した不変量 $\mathrm{Cat}(X)$ が与えられた。

$$\mathrm{gcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\{A_0,...,A_m\,;\,\text{closed in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^{m} A_i,\ \begin{array}{l}\text{each } A_i \text{ is con-}\\ \text{tractible}\end{array} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \exists_{\{Y(\simeq X)\}}\, \mathrm{gcat}(Y) = m \right\}$$

定理 1.3 (Ganea [6]) $\mathrm{Cat}(X){-}1 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X)$.

定義 1.4 (Ganea [6]) 位相空間Xに対して、CW複体の連続写像の集合$\{h_n : A_n \to Y_n \ \ m \geq n \geq 0\}$で、$Y_0 = \{*\}$と$Y_{n+1} = C(h_n) \supset Y_n$ $(m{-}1 \geq n)$をみたし$Y_m \simeq X$となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数から1を引いた数をCone(X)で表す。　またこの表示をXの*cone*分解と呼ぶ。

定理 1.5 (Ganea [6])　$\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$である。

事実 1.6 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0$である。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$である。一般に$\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$である。

(3) XがYを支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$である。特に、$X$が$Y$とホモトピー同値なら$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$である。

*(4) (Varadarajan [23], Hardie [8]) Fibre*束(E, p, B, F)は$\mathrm{cat}(E){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot(\mathrm{cat}(B){+}1)$をみたす。

(5) (Fox [5]) $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$である。

(6) (Takens [22]) $\mathrm{Cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{Cat}(X){+}\,\mathrm{Cat}(Y)$である。

問題　多様体Mは常に$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$をみたすか？

例 1.7 *(1)* $X = S^n$*:* $\quad S^{n-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^n, \quad \mathrm{Cat}(S^n) = 1.$

(2) $X = \mathbb{F}P^m$*:* $\qquad (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *or* $\mathbb{H}, d = \dim \mathbb{F})$

$$S^{d-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^d = \mathbb{F}P^1, \ \ S^{2d-1} \to \mathbb{F}P^1 \hookrightarrow \mathbb{F}P^2,$$

$$\cdots, \ \ S^{md-1} \to \mathbb{F}P^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{F}P^m, \quad \mathrm{Cat}(\mathbb{F}P^m) = m.$$

(3) $X = \mathrm{SU}(3)$*:* $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = \mathrm{SU}(3)^{(5)},$

$$S^7 \to \mathrm{SU}(3)^{(5)} \hookrightarrow \mathrm{SU}(3), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(3)) = 2.$$

(4) $X = \mathrm{Sp}(2)$*:* $\quad S^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 = \mathrm{Sp}(2)^{(3)},$

$$S^6 \to \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \cup e^7 = \mathrm{Sp}(2)^{(7)},$$

$$S^9 \to \mathrm{Sp}(2)^{(7)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2)) = 3.$$

(5) $X = \mathrm{G}_2$*:* $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = {\mathrm{G}_2}^{(5)},$

$$(S^5 \vee e^7) \to {\mathrm{G}_2}^{(5)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(5)} \cup (e^6 \vee e^8) = {\mathrm{G}_2}^{(8)},$$

$$(S^8 \vee e^{10}) \to {\mathrm{G}_2}^{(8)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(8)} \cup (e^9 \vee e^{11}) = {\mathrm{G}_2}^{(11)},$$

$$(S^{13}) \to {\mathrm{G}_2}^{(11)} \hookrightarrow \mathrm{G}_2, \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2) = 4.$$

定義 1.8 $\quad \mathrm{gd}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{Y(\simeq X)\}}\, dim Y = m \right\}$

問題[Eilenberg-Ganea [3]] 離散群Gについての次の不等式は常に等号となるか？

$$\mathrm{cd}(BG) \leq \mathrm{cat}(BG) \leq \mathrm{Cat}(BG) \leq \mathrm{gd}(BG).$$

1.2 「弱い」猫たち

定義 1.9 (Whitehead [24, 25])

$$w\mathrm{cat}(X)=\mathrm{Min}\left\{m{\geq}0\;\middle|\;\begin{array}{l}\bar{\Delta}^{m+1}:X\to\bigwedge^{m+1}X\\ \textit{is trivial.}\end{array}\right\}$$

ここで$\prod^{m+1}X/\prod_m^{m+1}X=\bigwedge^{m+1}X$（smash積）に注意すれば位相空間$X$に対して次が成立する。

定理 1.10 (Whitehead) *(1)* $w\mathrm{cat}(X)\leq\mathrm{cat}(X)$である。

(2) h^*を乗法的一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$のどれかm個の元の積が0でないなら$w\mathrm{cat}(X)\geq m$である。

定義 1.11 *cup-length*は$\mathrm{c}(-)$と表わされることも多いが、ここでは*Chern class*との重複を避けて$\mathrm{cup}(-)$と表わす：

(1) hを乗法的コホモロジーとするとき、次で定義する。

$$\mathrm{cup}(X;h)=\mathrm{Min}\left\{m{\geq}0\;\middle|\;\forall_{\{u_0,\cdots,u_m\in\tilde{h}^*(X)\}}u_0\cdots\cdot u_m=0\right\}$$

(2) $\mathrm{cup}(X)=\mathrm{Max}\{\mathrm{cup}(X;h)\,|\,h$：乗法的コホモロジー$\}$

注 1.12 $h^*{=}H^*(\;;R)$のとき$\mathrm{cup}(X;h)$を$\mathrm{cup}(X;R)$で表す。

定理 1.13 $h^*(-)$を乗法的コホモロジー論とする。

(1) $\mathrm{cup}(X;h){\leq}\,\mathrm{cup}(X){\leq}\,w\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{Cat}(X)$.

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \\ \textit{is stably trivial} \end{array} \right\}$

例 1.14 *(1)* $\mathrm{cup}(S^n; R) = 1 = \mathrm{Cat}(S^n)$, h は任意の環。

(2) $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m; \mathbb{Z}) = [\frac{m}{2}]$, $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = m = \mathrm{Cat}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m)$.

(3) $\mathrm{cup}(\mathrm{L}^n(p); R) = n < 2n{+}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{L}^n(p))$, p は奇素数で R は任意の環。

(4) $\mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n); \mathbb{Z}) = n{-}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(n))$.

(5) $\mathrm{cup}(\mathrm{G}_2; \mathbb{Z}) = 3 < 4 = \mathrm{cup}(\mathrm{G}_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2)$.

(6) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2); R) = 2 < 3 = \mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2); KO) = \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2))$, R は任意の環で KO は実 K 理論。

(7) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3); KO) = 4 < 5 = \mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3)) = \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(3))$.

(8) $G = \mathrm{Spin}(\ell)$, $(\ell \leq 8)$, $G = \mathrm{SO}(m)$, $(m \leq 9)$ 又は $G = \mathrm{PU}(n)$, $(n \leq 5)$ のとき $\mathrm{cup}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ である。

(9) $t > r > 1$ とし、E を $S^{t=1}$ 上の S^r 束とすると、$\mathrm{cup}(E) = 2 \leq \mathrm{cat}(E) \leq \mathrm{Cat}(E) \leq 3$ が常に成立し、$\mathrm{cup}(E) = 2 < 3 = \mathrm{cat}(E) = \mathrm{Cat}(E)$ となる E も存在する。

2 A_∞構造とL-S category

空間Xに対し、そのループ空間ΩXはStasheffのA_∞構造を持つ。 − 準ファイバー空間列$\{p_m^{\Omega X} : E^{m+1}(\Omega X) \to P^m(\Omega X)\}$で、次の図を可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_1^{\Omega X}"] & E^2(\Omega X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_2^{\Omega X}"] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] & E^m(\Omega X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_m^{\Omega X}"'] & E^{m+1}(\Omega X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_{m+1}^{\Omega X}"'] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] & E^\infty(\Omega X) \arrow[d, "p_\infty^{\Omega X}"'] & \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^1(\Omega X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^{m-1}(\Omega X) \arrow[r, hook] & P^m(\Omega X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^\infty(\Omega X) & X \arrow[l, "\overset{h_X}{\simeq}"']
\end{tikzcd}$$

注 2.1 このような準ファイバー空間列は一意ではない。

定理 2.2 ([6] or [9]) 位相空間Xが$\mathrm{cat}(X) \leq m$を満たすには、$P^\infty(\Omega X) \supset P^m(\Omega X)$へのホモトピー同値$h^X : X \xrightarrow{\simeq} P^\infty(\Omega X)$の圧縮（$\mathrm{cat}(X) \leq m$の構造写像）$\sigma(X) : X \to P^m(\Omega X)$の存在が必要十分である。

StasheffのA_∞-構造の「普遍性」から次が得られる。

定理 2.3 ([9]) 位相空間X, Yが$\mathrm{cat}(X \times Y) \leq m$を満たすには、$P^\infty(\Omega X) \times P^\infty(\Omega Y) \supset \bigcup_{i+j=m} P^i(\Omega X) \times P^j(\Omega Y)$への$h^X \times h^Y$の圧縮$\sigma(X, Y) : X \times Y \to \bigcup_{i+j=m} P^i(\Omega X) \times P^j(\Omega Y)$の存在が必要十分である。

2.1 (高次Hopf不変量)

Berstein-Hilton [1] により高次Hopf不変量は次のように与えられた（s は diagonal map の fat wedge への圧縮)：

$$H^s_m : \pi_q(X;A) \to \pi_{q+1}(\prod^{m+1} X, \prod^{m+1}_m X; A), \quad q \geq 1$$

定義 2.4 (非安定および安定Hopf不変量)

1） $\mathrm{cat}(X) \leq m$ を満たす空間 X と懸垂空間 ΣV に対し

$$H_m : [\Sigma V, X] \to 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)]},$$
$$H_m(f) = \left\{ H^{\sigma(X)}_m(f) \;\middle|\; \sigma(X) \text{ は } \mathrm{cat}(X) = m \text{ に対する構造写像} \right\}$$
$$\subset [\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)] \quad for\ f \in [\Sigma V, X].$$

2） さらに安定化関手 Σ^∞ により安定化する。

$$\mathcal{H}_m : [\Sigma V, X] \xrightarrow{H_m} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)]} \xrightarrow{2^{\Sigma^\infty}{}_*} 2^{\{\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)\}}$$
$$\mathcal{H}_m(f) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}^{\sigma(X)}_m(f) \\ = \Sigma^\infty H^{\sigma(X)}_m(f) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(X) \text{ は } \mathrm{cat}(X) = m \text{ に} \\ \text{対する構造写像} \end{array} \right\}$$
$$\subset \{\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)\} \quad for\ f \in [\Sigma V, X]$$

3） また次が非安定 $crude$ ホップ不変量と呼ばれる。

$$\bar{H}_m : [\Sigma V, X] \xrightarrow{H_m} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)]} \to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma E^{m+1}(\Omega X)]}$$
$$\to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma\Omega X \wedge \cdots \wedge \Sigma\Omega X]} \to 2^{[\Sigma^2 V, X \wedge \cdots \wedge X]}.$$

４） また次が安定化された $crude$ ホップ不変量である。

$$\bar{\mathcal{H}}_m : [\Sigma V, X] \stackrel{\bar{H}_m}{\longrightarrow} 2^{[\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X]} \stackrel{2^{\Sigma^\infty}}{\longrightarrow} 2^{\{\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X\}}.$$

定理 2.5 ([10]) ΣV と X は *(*$d{-}1$*)*-連結（$d{\geq}2$）とする。また $\mathrm{cat}(X){=}m$、$W{=}X \cup_f C(\Sigma V)$ *(*$f : \Sigma V {\to} X$*)* とおく。

(1) $\mathrm{cat}(W){=}\,\mathrm{cat}(X)$ *if* $H_m(f) \ni 0$.

(2) $\dim X \leq d \cdot \mathrm{cat}(X) + d - 2$ *(*$d \geq 1$*)* のとき、

$$\mathrm{cat}(W){=}\,\mathrm{cat}(X){+}1 \quad \textit{if} \quad H_m(f) \not\ni 0.$$

定理 2.6 ([10]) 上でさらに $\mathrm{cat}(W){=}\,\mathrm{cat}(X){+}1$ とする。

(1) $\mathrm{cat}(W{\times}S^n) = \mathrm{cat}(W)$ *if* $\Sigma^n_* H_m(f) \ni 0$.

(2) $\dim X \leq d \cdot \mathrm{cat}(X) + d - 2$ *(*$d \geq 1$*)* のとき、

$$\mathrm{cat}(W{\times}S^n) = \mathrm{cat}(W) + 1 \quad \textit{if} \quad \Sigma^{n+1}_* H_m(f) \not\ni 0.$$

系 2.6.1 $W = X \cup_f C(\Sigma V)$ *(*$f : \Sigma V {\to} X$*)* かつ $\dim X \leq d \cdot \mathrm{cat}(X) + d - 2$ *(*$n \geq 1$*)* のとき次は同値である。

(1) $\mathrm{cat}(W{\times}S^n) = \mathrm{cat}(W) + 1$ が全ての $n \geq 1$ で成立する。

(2) 「$H_m(f) \not\ni 0$」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathcal{H}_m(f) \not\ni 0$」

3　問題１ (Lie群のL-S猫)（Mimura-Nishimoto-I）

$G \hookrightarrow E \xrightarrow{p} \Sigma A$ を構造群を G とする主fibre束とする。

定理 3.1　*cofibre列* $K_i(G) \xrightarrow{\rho_i} F_{i-1}(G) \hookrightarrow F_i(G)$*, (*$1 \leq i \leq m$*)* と k（$1 \leq k \leq m$）が次を満たせば $\mathrm{Cat}(E) \leq m+k$ となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 構造群の積の制限 $F_i(G) \times F_j(G) \subseteq F_m(G) \times F_m(G) \simeq G \times G \to G$ が $F_{i+j}(G)$（$i \geq k$, $j \geq 0$）に圧縮可能。

(3) 構造写像 $\alpha : A \to G$ が $F_{k-1}(G)$（$k \geq m$）に圧縮可能。

これを用いると単連結compact Lie群のL-S猫の良いupper boundが得られ、多くの場合にcup()に一致する。さらに単連結でないLie群を取り扱う為に次の定理を用意した。

$F \hookrightarrow X \to B$ を G を構造群とするfibre束とする。ただし B は $(d-1)$-連結（$d \geq 1$）で有限次元であるものとする。

定理 3.2　*cofibre列* $K_i(G) \xrightarrow{\rho_i} F_{i-1}(G) \hookrightarrow F_i(G)$*, (*$1 \leq i \leq m$*)* が次を満たせば $\mathrm{Cat}(E) \leq m + \frac{\dim B}{d}$ となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 積の制限 $F_i(G)\times F_j(G)\subseteq F_m(G)\times F_m(G)\simeq G\times G\to G$ が $F_{i+j}(G)$（$i\geq k,\ j\geq 0$）に圧縮可能。

(3) 構造群の作用の制限 $\psi|_{G^{(d\cdot(i+2)-2)}\times F_j}: G^{(d\cdot(i+2)-2)}\times F_j\to F$ が F_{i+j}（$0\leq i,j\leq i+j\leq m$）に圧縮可能。

定理 *3.1* と定理 *3.2* の略証*:*　どちらも実際に全空間の cone-decomposition を構成できる。　終り.

これらを用いることで、階数が 4 以下のほとんどの compact Lie 群の L-S 猫の値が決定された。

階数	1		2		3		4	
A_n	SU(2)	1	SU(3)	2	SU(4)	3	SU(5)	4
	PU(2)	3	PU(3)	6	PU(4)	9	PU(5)	12
B_n	Spin(3)	1	Spin(5)	3	Spin(7)	5	Spin(9)	?
	SO(3)	3	SO(5)	8	SO(7)	11	SO(9)	20
C_n	Sp(1)	1	Sp(2)	3	Sp(3)	5	Sp(4)	?
	PSp(1)	3	PSp(2)	8	PSp(3)	?	PSp(4)	?
D_n					Spin(6)	3	Spin(8)	6
					SO(6)	9	SO(8)	12
					PO(6)	9	PO(8)	18
例外			G_2	4			F_4	?

3.1　新しい計算可能な不変量

定義 3.3 *Toomer*不変量の改良版を準同形$(e^X_m)_*: h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega X))$を用いて導入する。*Toomer*不変量はe( )と表示されることが多いが、ここでは*Adams* e不変量との重複を避けてwgt( )と表記する：

(1) hを乗法的コホモロジーとする。

$$\text{i)}\ \mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m\geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* \textit{ is a mono} \right\}$$

$$\text{ii)}\ M\mathrm{cat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m\geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e^X_m)_* \textit{ is a split mono} \\ \textit{of } h^*h\textit{-modules} \end{array} \right\}$$

$$\text{(2)}\quad \text{i)}\ \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{wgt}(X;h) \,\middle|\, h \text{ は乗法的コホモロジー} \right\}$$

$$\text{ii)}\ M\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Max}\left\{ M\mathrm{cat}(X;h) \,\middle|\, h \text{ は乗法的コホモロジー} \right\}$$

定理 3.4　次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq M\mathrm{cat}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X).$$

さてRudyakとStromはFadell-Husseini [4]の与えた位相不変量category weightをホモトピー不変量となるように再定義し、L-Sの猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 3.5 (Rudyak [16, 17], Strom [21]) $u \in \tilde{h}^*(X)$（hは乗法的コホモロジー）に対して次のように定義する。

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e_m^X)_*(u) \neq 0\right\}$$

（右辺が空のときは$\mathrm{wgt}(u;h) = \infty$とする）

定理 3.6 (Rudyak [16, 17], Strom [21]) hを乗法的なコホモロジーとするとき次が成立する。

(1) $\mathrm{Min}\{\mathrm{wgt}(u;h), \mathrm{wgt}(v;h)\} \leq \mathrm{wgt}(u+v;h)$.

(2) $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$.

定理 3.7 乗法的なコホモロジーhに対し次が成立する。

$$\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h) \,|\, u \in \tilde{h}^*(X)\}$$

定義 3.8 (Rudyak [17])

$$r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{(stably)\ \sigma:X\to P^m(\Omega X)}\ e_m^X \circ \sigma \sim 1_X\}.$$

定理 3.9 上述の関係式と*Rudyak [17]*から次が成立する。

$$\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = M\mathrm{cat}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X).$$

4　crudeホップ不変量とcup-length（A. Konoと共同）

まずBoardman-Steer [2] の定理5.14はcrudeホップ不変量を用いて次の様に拡張される。

定理 4.1 (I [10]) $V \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} W \xrightarrow{q} \Sigma V$ を*cofibration sequence*とし、$\mathrm{cat}(X) = m$ とする。このとき*reduced diagonal* $\overline{\Delta}_{m+1} : W \to \prod^{m+1} W \to \wedge^{m+1} W$ は次をみたす：

$$\{\overline{\Delta}_{m+1}\} = (\wedge^{m+1} i)_* q^* \bar{H}_m(f)$$

$$\{\Sigma^\infty \overline{\Delta}_{m+1}\} = (\wedge^{m+1} i)_* q^* \bar{\mathcal{H}}_m(f)$$

従ってcrudeホップ不変量は多くの場合にcup()を規定する。実際 $Q(n) \overset{j_n}{\subset} \mathbf{Sp}(n)$ を、$\mathbf{Sp}(n)$ を生成するJamesの与えた部分複体とする。すぐに分かるのは

$$\mathrm{cup}(Q(n); \mathbb{Z}) = 1$$

である。しかし一方で $Q(n)$ が $\mathbb{H}P^{n-1}$ 上の実3次元ベクトル束のThom空間であることを用いると

$$\mathrm{Cat}(Q(n)) \leq [\log_2 n]{+}1, \quad n \leq 8.$$

であり、その中間にある $\mathrm{cat}(Q(n))$ の値を決めるのは難しい様に見える。しかし、$H_*(\Omega Q(n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に注目すると、

そこには自明でないコホモロジー作用素が現れる：

命題 4.2 $j_{n*}: H_*(\Omega Q(n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_*(\Omega\mathbf{Sp}(n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$は全射であり、次が成立する。

$$H_*(\Omega\mathbf{Sp}(n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[u_2,\cdots,u_{4n-2}],$$

$$\deg u_{4i-2} = 4i-2, \quad u_6\,Sq^2 = u_2^2, \quad u_{14}\,Sq^2 = u_6^2, \ldots$$

この最初の関係式$u_6\,Sq^2 = u_2^2$がQ_2の7次元セルの接着写像$\omega_1 : S^6 \to S^3{=}Q_1$のcrudeホップ不変量が$\bar{H}_1(\omega_1) = \eta$であることを意味し、2番目の関係式$u_{14}\,Sq^2 = u_6^2$が$Q_4/Q_1$の15次元セルの接着写像$\omega_3 : S^{14} \to Q_3$のcrudeホップ不変量が$\bar{H}_1(\omega_3) = \{\eta\}$であることを意味する。従って$\bar{\Delta}_2 : Q_2 \to \wedge^2 Q_2$は本質的に$\eta$で与えられ次を得る：

定理 4.3 $\mathrm{cup}(Q(2)) = \mathrm{cat}(Q(2)) = \mathrm{Cat}(Q(2)) = 2.$

さらにreduced diagonal $\bar{\Delta}_3 : Q_4 \to \wedge^3 Q_4$を計算すれば$\bar{\Delta}_3$は本質的には$\eta^2 : S^{15} \to S^3{\wedge}S^3{\wedge}S^7$で与えられ次を得る：

定理 4.4 $\mathrm{cup}(Q(4)) = \mathrm{cat}(Q(4)) = \mathrm{Cat}(Q(4)) = 3.$

系 4.4.1 $n \le 7$のとき次が成立する：

$$\mathrm{cup}(Q(n)) = \mathrm{cat}(Q(n)) = \mathrm{Cat}(Q(n)) = [\log_2 n]{+}1.$$

5　高次ホップ不変量とループ空間（A. Kono と共同）

$\mathrm{gd}(X) \leq q$, $\mathrm{cat}(X) = m$ を満たす X に対して

$$W = X \cup_\alpha D^{q+1}, \quad \alpha : S^q \to X$$

とする。このとき、$\Omega W \supset \Omega X \cup_{\hat{\alpha}} D^{q+1}$ となる。ただし $\hat{\alpha} : S^{q-1} \to \Omega X$ は α の adjoint 写像である。ここで仮定 $\mathrm{cat}(X) = m$ から恒等写像の圧縮 σ がとれ、次をみたす。

$$1_X \sim e^X_m \circ \sigma : X \xrightarrow{\sigma} P^m(\Omega X) \longrightarrow X.$$

そこで次の可換図を考える：

$$\begin{tikzcd}
\Sigma\Omega W & \Sigma\Omega X \cup_{\Sigma\hat{\alpha}} D^{q+1} \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] & \\
P^m(\Sigma\Omega W) \arrow[u, hookleftarrow] & P^m(\Omega X) \cup_{\Sigma\hat{\alpha}} D^{q+1} \arrow[l, hook'] & X \arrow[l, hook', "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

ここで、$\Sigma\hat{\alpha} : S^q \to P^1(\Omega X)$ の行き先を $P^m(\Omega X)$ に広げると $\Sigma\hat{\alpha} \sim \alpha + p_m \circ H^\sigma_m(\alpha) : S^q \to P^m(\Omega X)$ となり、$P^m(\Omega W)$ で non-trivial なコホモロジー作用素で高次ホップ不変量が detect される可能性がある。実際に $\mathbf{Spin}(9)$ に対してこれを実行すると $\mathrm{wgt}(\mathbf{Spin}(9); \mathbb{F}_2) = 6$ と共に次を得る：

$$8 \leq \mathrm{Mcat}(\mathbf{Spin}(9); \mathbb{F}_2) \leq \mathrm{Cat}(\mathbf{Spin}(9)) \leq 9.$$

文　献

[1] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalised Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **12** (1968), 421–432.

[2] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.

[3] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. **65** (1957), 517-518.

[4] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana **37** (1992), 151–161.

[5] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42**, (1941), 333–370.

[6] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[7] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, Symposium on Algebraic Topology, Lect. Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin (1971) 13–22.

[8] K. A. Hardie, *A note on fibraitons and category*, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351–352.

[9] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623–634.

[10] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category* (Kyushu Univ. preprint series in Math. **1998-13**, Kyushu Univ., 1998), Topology **41** (2002), 695–723.

[11] N. Iwase and M. Mimura, *L-S categories of simply-connected compact simple Lie groups of low rank*, In: "Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques", (Isle of Skye, 2001), 199–212, Progr. Math., **215**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[12] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of Spin*(7), Topology appl., **133** (2003), 1–14.

[13] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[14] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, In: "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[15] L. Lusternik and L. Schnirelmann, "Méthodes Topologiques dan les Problémes Variationnels", Actual. Sci. Ind., **88**, Hermann, Paris, 1934

[16] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[17] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[18] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[19] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length* $n+1$, preprint.

[20] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.

[21] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhauser, Basel, 2001.

[22] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.

[23] K. Varadarajan, *On fibrations and category*, Math. Z. **88** (1965), 267–273.

[24] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: "Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", 89–95, Georges Thone, Liége, Masson & Cie, Paris, 1957.

[25] G. W. Whitehead, "Elements of Homotopy Theory", GTM series **61**, Springer Verlag, Berlin, 1978.