写像のAn構造について

九大理　岩瀬則夫（ Norio Iwase ）

§０． J.D. Stasheff[1] の導入したA_n空間、つまりA_n構造を持つ空間あるいは、（同値であるが）A_n形式を許す空間、に対して、そのような空間の間の写像：$X \longrightarrow Y$は、YがA_∞構造を持つときに、あるいは、nが３以下のときに、各々 J.D. Stasheff[2], A. Zabrodsky [4] により、「A_n写像」という概念が定められ、[4]では、これを用いて有限H空間のホモトピー結合性が論じられ、又$n \geqq 4$についても言及されているが、その場合のA_n写像の明確な定義は与えられていない。（$n=4$に対しては、J.D. Stasheff[3] が、写像のA_4形式を与える、パラメーターの複体を図示しているが、そのような複体の、統一的な定義は、見当たらない。）　又、A_n空間の間の写像としては、空間のA_n構造に付随するA_n形式と strictly commute する写像（A_n準同型と呼ばれる）という概念があるが、これは、ホモトピーに対して閉じた

概念ではない。ここでは、「A_n 構造を保つ写像」という、ホモトピーに対して閉じた概念を、A_n 準同型を含むものとして定め、これを A_n 写像と呼ぶことにする。このとき、A_2 写像、A_3 写像、A_∞ 写像は、各々 H 写像、ホモトピー結合性を保つ写像、loop 写像と一致する。また、A_n 写像は、次のような性質を持つことが、確められる。

(1) その homotopy fibre は、A_n 構造を持つ。

(2) 二つの A_n 写像による Pull-Back は、A_n 構造を持つ。

このとき、次の様な問題が、考えられる。

問題 1. X が A_n 空間のときに、

$$\mathcal{E}_k = \begin{cases} \{ f : X \to X \mid f \text{ は } A_k \text{ 写像} \}, & n \geq k \geq 2 \\ \{ f : X \to X \}, & k = 1 \end{cases}$$

とおくとき、$\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{E}_{n-1} \supseteq \mathcal{E}_n$ となるが、等号を成立させない空間が、各段階に対して存在するか。

問題 2. X が有限 A_n 空間のとき、次のホモトピー同値は、A_{n-1} 写像にとれるか。また、A_n 写像にとれるか。

$$X_{(0)} \simeq \prod_{i=1}^{l} S^{2n_i - 1}_{(0)}, \quad l \text{ は } X \text{ の rank}.$$

§1. A_n 空間

空間 X の A_n 構造を、J.D.Stasheff は、次の様に定義した。

<u>定義 1-1</u> X の A_n 構造とは、次の準ファイバー空間の列 $\{(E^i(X), p_i^X, XP^{i-1}), 1 \leqq i \leqq n\}$ である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
X = E^1(X) & \subset & E^2(X) & \subset & \cdots & \subset & E^n(X) & & \\
\downarrow p_1^X & & \downarrow p_2^X & & & & \downarrow p_n^X & & \\
* = XP^0 & \subset & XP^1 & \subset & \cdots & \subset & XP^{n-1} & \subset & XP^n
\end{array}$$

を可換な図式とし、さらに、$E^k(X)$ は $E^{k+1}(X)$ で可縮。又 XP^{k+1} は、p_{k+1}^X の mapping cone である。

X が A_n 構造を持つとき、J.D.Stasheff は、n 重積の多重ホモトピー（A_n 形式）の存在を示し、これを用いて、上のような準ファイバー空間を標準的に構成した。それを次に述べる。先ず、次の様な相対同相 $\sigma_{k+1}:(D^k, E^k) \to (P^k, P^{k-1})$ が存在する。

$$\text{i)}\quad \begin{array}{ccccc}
D^{k-1}(X) & \subset & E^k(X) & \subset & D^k(X) \\
\downarrow \sigma_k^X & & \downarrow p_k^X & & \downarrow \sigma_{k+1}^X \\
XP^{k-1} & = & XP^{k-1} & \subset & XP^k
\end{array} \quad : 可換$$

$$\text{ii)}\quad (D^k, E^k) \simeq (C(E^k), E^k) : ホモトピー同値$$

次に、A_n 形式を定義するために、次の、J.D.Stasheff の複体 $\{K_i\}$ を用意する。

(1) $K_i \cong [0,1]^{i-2}$ ；同相写像

(2) $\partial K_i = \bigcup_{1 \leqq k \leqq r,\ 2 \leqq r,\ 2 \leqq s,\ r+s=i+1} K_k(r,s)$

(3) 辺作用素 $\partial_k(r,s) : K_r \times K_s \to K_k(r,s)$；同相写像

，が存在する。

(4) 退化作用素 $s_j : K_i \to K_{i-1}$ が存在する。$(1 \leqq j \leqq i)$

(5) $\partial_k(r, s_1+s_2-1)(1 \times \partial_j(s_1, s_2))$

$= \partial_{k+j-1}(r+s_1-1, s_2)(\partial_k(r, s_1) \times 1)$，$(1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq s_1)$

(6) $\partial_{k+r_2-1}(r_1+r_2-1, s)(\partial_j(r_1, r_2) \times 1)$

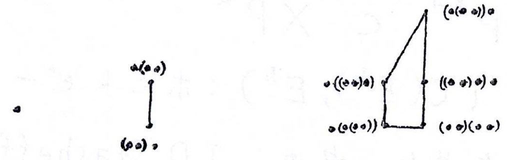
$= \partial_j(r_1+s-1, r)(\partial_k(r_1, s) \times 1)(1 \times T)$，$(1 \leqq j < k \leqq r$，

但し．$T(\rho, \sigma) = (\sigma, \rho))$

(7) $s_j\ \partial_k(r, s)$

$$= \begin{cases} \partial_{k-1}(r-1, s)(s_j \times 1), & (1 \leqq j < k \leqq r,\ r > 2) \\ \partial_k(r, s-1)(1 \times s_{j-k+1}), & (k \leqq j < k+s,\ s > 2) \\ \partial_k(r-1, s)(s_{j-s+1} \times 1), & (k+s \leqq j \leqq i,\ r > 2) \\ \pi_1, & (r=2, k=2, j=1 \text{ または } r=2, k=1, j=i) \\ \pi_2, & (s=2, k=j, \text{ または. } s=2, j=k+1) \end{cases}$$

但し．π_t は．第 t 成分への射影



K_2 K_3 K_4