写像のAn構造について

九大理　岩瀬則夫（ Norio Iwase ）

§0. J.D. Stasheff[1] の導入したA_n空間、つまりA_n構造を持つ空間あるいは、(同値であるが) A_n形式を許す空間、に対して、そのような空間の間の写像：$X \to Y$は、YがA_∞構造を持つときに、あるいは、nが3以下のときに、各々 J.D. Stasheff[2], A. Zabrodsky [4] により、「A_n写像」という概念が定められ、[4]では、これを用いて有限H空間のホモトピー結合性が論じられ、又$n \geqq 4$についても言及されているが、その場合のA_n写像の明確な定義は与えられていない。（$n=4$ に対しては、J.D. Stasheff[3] が、写像のA_4形式を与える、パラメーターの複体を図示しているが、そのような複体の、統一的な定義は、見当たらない。）　又、A_n空間の間の写像としては、空間のA_n構造に付随するA_n形式と strictly commute する写像（A_n準同型と呼ばれる）という概念があるが、これは、ホモトピーに対して閉じた

概念ではない。ここでは、「A_n 構造を保つ写像」という、ホモトピーに対して閉じた概念を、A_n 準同型を含むものとして定め、これを A_n 写像と呼ぶことにする。このとき、A_2 写像、A_3 写像、A_∞ 写像は、各々 H 写像、ホモトピー結合性を保つ写像、loop 写像と一致する。また、A_n 写像は、次のような性質を持つことが、確められる。

(1) その homotopy fibre は、A_n 構造を持つ。

(2) 二つの A_n 写像による Pull-Back は、A_n 構造を持つ。

このとき、次の様な問題が、考えられる。

問題1．X が A_n 空間のときに、

$$\mathcal{E}_k = \begin{cases} \{ f : X \to X \mid f \text{ は } A_k \text{ 写像} \}, & n \geqq k \geqq 2 \\ \{ f : X \to X \}, & k = 1 \end{cases}$$

とおくとき、$\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{E}_{n-1} \supseteq \mathcal{E}_n$ となるが、等号を成立させない空間が、各段階に対して存在するか。

問題2．X が有限 A_n 空間のとき、次のホモトピー同値は、A_{n-1} 写像にとれるか。また、A_n 写像にとれるか。

$$X_{(0)} \simeq \prod_{i=1}^{l} S_{(0)}^{2n_i-1}, \quad l \text{ は } X \text{ の rank}.$$

§1. A_n 空間

空間 X の A_n 構造を、J.D.Stasheff は、次の様に定義した。

<u>定義 1-1</u>　X の A_n 構造とは、次の準ファイバー空間の列 $\{(E^i(X), p_i^X, XP^{i-1}), 1 \leqq i \leqq n\}$ である。

$$\begin{array}{ccccccc}
X = E^1(X) & \subset & E^2(X) & \subset & \cdots & \subset & E^n(X) \\
\downarrow p_1^X & & \downarrow p_2^X & & & & \downarrow p_n^X \\
* = XP^0 & \subset & XP^1 & \subset & \cdots & \subset & XP^{n-1} \subset XP^n
\end{array}$$

を可換な図式とし、さらに、$E^k(X)$ は $E^{k+1}(X)$ で可縮。又 XP^{k+1} は、p_{k+1}^X の mapping cone である。

X が A_n 構造を持つとき、J.D.Stasheff は、n 重積の多重ホモトピー（A_n 形式）の存在を示し、これを用いて、上のような準ファイバー空間を標準的に構成した。それを次に述べる。先ず、次の様な相対同相 $\sigma_{k+1} : (D^k, E^k) \to (P^k, P^{k-1})$ が存在する。

i)
$$\begin{array}{ccccc}
D^{k-1}(X) & \subset & E^k(X) & \subset & D^k(X) \\
\downarrow \sigma_k^X & & \downarrow p_k^X & & \downarrow \sigma_{k+1}^X \\
XP^{k-1} & = & XP^{k-1} & \subset & XP^k
\end{array} \quad : \text{可換}$$

ii)　$(D^k, E^k) \simeq (C(E^k), E^k)$: ホモトピー同値

次に、A_n 形式を定義するために、次の、J.D.Stasheff の複体 $\{K_i\}$ を用意する。

(1) $K_i \cong [0,1]^{i-2}$ ；同相写像

(2) $\partial K_i = \bigcup_{1\leqq k\leqq r,\ 2\leqq r,\ 2\leqq s,\ r+s=i+1} K_k(r,s)$

(3) 辺作用素 $\partial_k(r,s): K_r\times K_s \to K_k(r,s)$；同相写像

，が存在する。

(4) 退化作用素 $s_j : K_i \to K_{i-1}$ が存在する。$(1\leqq j\leqq i)$

(5) $\partial_k(r,\ s_1+s_2-1)(1\times\partial_j(s_1,s_2))$

$= \partial_{k+j-1}(r+s_1-1,\ s_2)(\partial_k(r,s_1)\times 1)$ ，$(1\leqq k\leqq r,\ 1\leqq j\leqq s_1)$

(6) $\partial_{k+r_2-1}(r_1+r_2-1,\ s)(\partial_j(r_1,r_2)\times 1)$

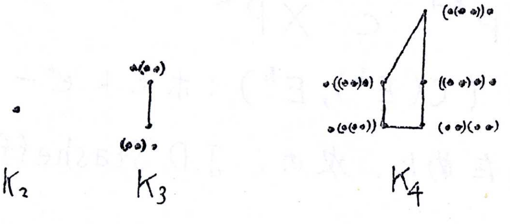
$= \partial_j(r_1+s-1,\ r)(\partial_k(r_1,s)\times 1)(1\times T)$ ，$(1\leqq j<k\leqq r$，

但し．$T(\rho,\sigma) = (\sigma,\rho))$

(7) $s_j\ \partial_k(r,s)$

$$= \begin{cases} \partial_{k-1}(r-1,\ s)(s_j\times 1), & (1\leqq j<k\leqq r,\ \ r>2) \\ \partial_k(r,\ s-1)(1\times s_{j-k+1}), & (k\leqq j<k+s,\ \ s>2) \\ \partial_k(r-1,\ s)(s_{j-s+1}\times 1), & (k+s\leqq j\leqq i,\ \ r>2) \\ \pi_1, & (r=2,\ k=2,\ j=1 \text{ または } r=2,\ k=1,\ j=i) \\ \pi_2, & (s=2,\ k=j,\ \text{または}\ s=2,\ j=k+1) \end{cases}$$

但し．π_t は．第 t 成分への射影



K_2 K_3 K_4

これを用いて、空間XのA_n形式が、次の様に与えられた。

<u>定義 1-2</u>　$\{ M_i^X : K_i \times X^i \to X \mid i \leqq n \}$ がA_n形式とは、次の三条件が成立する事である。

(1)　M_2^X は、Xの積を与える。

(2)　$M_i^X(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= M_r^X(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots, x_i)$

(3)　$M_i^X(\tau, x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$
$= M_{i-1}^X(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

さらに、$E^i(X)$, $D^i(X)$, XP^i は、次の条件を満たす様に帰納的に定まる。

(1)　$E^1(X) = X$, $\alpha_i : (K_{i+1} \times X^i, K_{i+1} \times X \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^i) \to (E^i(X), E^{i-1}(X))$; 相対同相 $(i \geqq 2)$

(2)　$XP^0 = *$, $\beta_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, K_{i+1} \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i-1}) \to (XP^{i-1}, XP^{i-2})$; 相対同相 $(i \geqq 2)$

(3)　$\gamma_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, K_{i+1} \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i-1}) \to (D^{i-1}(X), E^{i-1}(X))$; 相対同相 $(i \geqq 2)$

(4)　$\alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$
$= \alpha_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$, $(2 \leqq j \leqq i)$

(5)　$\alpha_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \\ \cdots, x_i), (k < r) \\ \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

(6) $\beta_i(\tau, x_2, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$= \beta_{i-1}(s_j(\tau), x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i), (2 \leqq j \leqq i)$

(7) $\beta_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_2, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} \beta_{r-1}(\rho, x_2, \cdots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots \\ \cdots, x_i), (1 < k < r) \\ \beta_{r-1}(\rho, x_{s+1}, \cdots, x_i), (k = 1) \\ \beta_{r-1}(\rho, x_2, \cdots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

(8) $\gamma_i(\tau, x_2, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$= \alpha_{i-1}(s_j(\tau), *, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i),$

$(2 \leqq j \leqq i)$

(9) $\gamma_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_2, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, *, x_2, \cdots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}) \\ , \cdots, x_i), (1 < k < r) \\ \alpha_{r-1}(\rho, M_{s-1}^X(s_1(\sigma), x_2, \cdots, x_s), x_{s+1}, \cdots, \\ x_i), (k = 1) \\ \alpha_{r-1}(\rho, x_2, \cdots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

これらを用いて、次節において写像のA_n構造及び、写像のA_n形式を与える。

§2 A_n 写像

先ず、写像の A_n 構造を与える。X，Yを A_n 空間とし、写像 $f: X \to Y$ をとる。

定義2-1　fの A_n 構造とは、次を満たす写像の列 $\{\{f_k^D\}, \{f_k^P\}\ (1 \leqq k \leqq n)\}$ である。

i)
$$\begin{array}{ccc} (D^k(X),\ E^k(X)) & \xrightarrow{f_k^D} & (D^k(Y),\ E^k(Y)) \\ \downarrow \sigma_{k+1}^X & & \downarrow \sigma_{k+1}^Y \\ (XP^k,\ XP^{k-1}) & \xrightarrow{f_k^P} & (YP^k,\ YP^{k-1}) \end{array}$$
：可換

ii) $f_k^D = f_n^D|_{D^k(X)}$，$f_k^P = f_n^P|_{XP^k}$，$f = f_1^D|_X$

次に、写像の A_n 形式を定めるために、パラメーターの複体を与える。この複体 $\{\Gamma_i\}$ は、$\{K_i\}$ と同様に、次の様な性質を持つ様に、帰納的に定義される。

(1) $\Gamma_i \cong [0,1]^{i-1}$，$\varepsilon_i : [0,1] \times K_i \longrightarrow \Gamma_i$；同相写像，が存在する。

(2) $\partial \Gamma_i = (\bigcup_{1 \leqq k \leqq r,\, 2 \leqq s,\, r+s=i+1} \Gamma_k(r,s)) \cup (\bigcup_{2 \leqq t,\, 1 \leqq r_1,\, 1 \leqq r_2, \cdots, 1 \leqq r_t,\, r_1 + \cdots + r_t = i} \Gamma(t, r_1, \cdots, r_t))$

(3) 辺作用素　$\delta_k(r,s) ; \Gamma_r \times K_s \longrightarrow \Gamma_k(r,s)$；同相写像，が存在する。

(4) 辺作用素　$\delta(t, r_1, \cdots, r_t) : K_t \times \Gamma_{r_1} \times \cdots \times \Gamma_{r_t} \longrightarrow \Gamma(t, r_1, \cdots, r_t)$；同相写像，が存在する。

(5) 退化作用素　$d_j : \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_{i-1}$ が存在する。$(1 \leqq j$

$\leqq i)$

(6) $\delta_{k+s_1-1}(r+s_1-1,\ s_2)(\delta_j(r,\ s_1)\times 1)$

$= \delta_j(r+s_2-1,\ s_1)(\delta_k(r,\ s_2)\times 1)(1\times T)$, $(1\leqq j<k$
$\leqq r,\quad T(\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_2,\sigma_1))$

(7) $\delta_k(r,\ s_1+s_2-1)(1\times\partial_j(s_1,\ s_2))$

$= \delta_{k+j-1}(r+s_1-1,\ s_2)(\delta_k(r,\ s_1)\times 1)$, $(1\leqq j\leqq s_1,\ 1\leqq k\leqq r)$

(8) $\delta_{r_1+\cdots+r_{j-1}+k}(r,\ s)(\delta(t,\ r_1,\cdots,\ r_t)\times 1)$

$= \delta(t,\ r_1,\cdots,\ r_{j-1},\ r_j+s-1,\ r_{j+1},\cdots,\ r_t)(1\times 1\times\cdots$
$\times 1\times\delta_k(r_j,\ s)\times 1\times\cdots\times 1)T'$, $(1\leqq j\leqq t,\ 1\leqq k\leqq r_j$,
$T'(\tau,\ \rho_1,\ \rho_2,\cdots,\ \rho_t,\ \sigma)=(\tau,\ \rho_1,\cdots,\ \rho_j,\ \sigma,\ \rho_{j+1},\cdots,\ \rho_t))$

(9) $\delta(t+s-1,\ r_1,\cdots,\ r_{t+s-1})(\partial_k(t,\ s)\times 1\times\cdots\times 1)$

$= \delta(t,\ r_1,\cdots,\ r_{k-1},\ r_k+\cdots+r_{k+s-1},\ r_{k+s},\cdots,\ r_{t+s-1})(1\times 1$
$\times\cdots\times 1\times\delta(s,\ r_k,\cdots,\ r_{k+s-1})\times 1\times\cdots\times 1)T''$, $(1\leqq$
$k\leqq t,\quad T''(\tau,\sigma,\quad ,\cdots,\ \rho_{t+s-1})=(\tau,\ \rho_1,\cdots,\ \rho_{k-1},\ \sigma$
$,\ \rho_k,\cdots,\ \rho_{t+s-1}))$

(10) $d_j\ \delta_k(r,\ s)$

$$= \begin{cases} \delta_{k-1}(r-1,\ s)(d_j\times 1),\ (j<k) \\ \delta_k(r,\ s-1)(1\times d_{j-k+1}),\ (k\leqq j<k+s,\ s>2) \\ \delta_k(r-1,\ s)(d_{j-s+1}\times 1),\ (k+s\leqq j) \\ \pi_1,\ (k=j,\ s=2 \text{ または } k+1=j,\ s=2,\ \pi_1(\rho,\sigma) \\ =\rho) \end{cases}$$

(11) $d_{r_1+\cdots+r_{k-1}+j}\ \delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$

$$= \begin{cases} \delta(t-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, r_{k+1}, \cdots, r_t)(s_j(\tau), \rho_1, \\ \cdots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t), \quad (1 = j = r_k,\ t > 2) \\ \delta(t, r_1, \cdots, r_{k-1}, r_k - 1, r_{k+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \\ \cdots, \rho_{k-1}, d_j(\rho_k), \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t), \quad (1 \leqq j \leqq r_k \\ r_k > 1) \\ \rho_1, \quad (j = r_1 = 1,\ k = 1,\ t = 2) \\ \rho_2, \quad (j = i,\ r_2 = 1,\ k = 2,\ t = 2) \end{cases}$$

これを用いて、写像 f の A_n 形式が、ここで次の様に与えられる。

<u>定義 2-2</u>　$\{F_i : \Gamma_i \times X^i \longrightarrow Y\}$ が A_n 形式とは、次の四条件が成立することである。

(1)　$F_1 = f$,

(2)　$F_i(\delta_k(r, s)(\rho, \sigma), x_1, \cdots, x_i)$

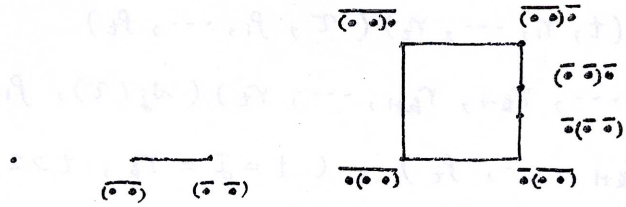
$= F_r(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots, x_i)$

(3)　$F_i(\delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t), x_1, \cdots, x_i)$

$= M_t^Y(\tau, F_{r_1}(\rho_1, x_1, \cdots, x_{r_1}), \cdots, F_{r_t}(\rho_t, x_{r_1+\cdots+r_{t-1}+1}, \cdots, x_{r_1+\cdots+r_t}))$

(4)　$F_i(\gamma, x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$= F_{i-1}(d_j(\gamma), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$



Γ_1　　Γ_2　　Γ_3　　- - -

このとき、次の定理を得る。

<u>定理2-3</u>　A_n空間の間の写像$f : X \to Y$に対し、次の条件は、同値である。

i)　fは、A_n構造を持つ。

ii)　fは　A_n形式を許す。

§3　定理の証明

同相写像$\varepsilon_i : I \times K_i \longrightarrow \Gamma_i$により、$\{1\} \times K_i$の部分は、$\cup \Gamma(t, r_1, \cdots, r_t)$　の上に写される。この部分からK_iへの射影$\omega_i : \varepsilon_i(\{1\} \times K_i) \to K_i$を、次の様に定める。

$$\omega_i(\varepsilon_i(1, \tau)) = \tau$$

このとき、定義から、ω_iは次の様な可換性を持つ。

<u>補題3-1</u>

i)　$s_j \omega_i(\gamma) = \omega_{i-1} d_j(\gamma)$

ii)　$\partial_k(r, s)(\omega_r \times 1) = \omega_i \, \delta_k(r, s)$

定理2-3の ii)⇒ i)を示す。K_{i+1}の元　$\sigma = \omega_{i+1}(\gamma)$, $\gamma = \delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$　に対して、次の様に、

写像 $\{f^E_{i-1} : E^{i-1}(X) \to E^{i-1}(Y)\}$，$\{f^P_{i-1} : XP^{i-1} \to YP^{i-1}\}$，$\{f^D_{i-1} : D^{i-1}(X) \to D^{i-1}(Y)\}$ を定める。

定義 3-2

(1) $f^E_{i-1}(\alpha^X_{i-1}(\sigma, x_1, \cdots, x_{i-1}))$

$= \alpha^Y_{t-1}(\tau, F_{r_1}(\rho_1, x_1, \cdots, x_{r_1}), \cdots, F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1}, x_{r_1+\cdots+r_{t-2}+1}, \cdots, x_{r_1+\cdots r_{t-1}}))$

(2) $f^P_{i-1}(\beta^X_i(\sigma, x_2, \cdots, x_i))$

$= \beta^Y_{t-1}(\tau, F_{r_2}(\rho_2, x_{r_1+1}, \cdots, x_{r_1+r_2}), \cdots, F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1}, x_{r_1+\cdots+r_{t-2}+1}, \cdots, x_{r_1+\cdots+r_{t-1}}))$

(3) $f^D_{i-1}(\gamma^X_i(\sigma, x_2, \cdots, x_i))$

$$= \begin{cases} \alpha^Y_{t-1}(\tau, F_{r_1-1}(d_1(\rho_1), x_2, \cdots, x_{r_1}), \cdots, F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1}, x_{r_1+\cdots+r_{t-2}+1}, \cdots, x_{r_1+\cdots+r_{t-1}})), & (r_1 > 1) \\ \gamma^Y_{t-1}(\tau, F_{r_2}(\rho_2, x_2, \cdots, x_{r_2+1}), \cdots, F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1}, x_{r_2+\cdots+r_{t-2}+2}, \cdots, x_{r_2+\cdots+r_{t-1}+1})), & (r_1 = 1) \end{cases}$$

このとき、$f^E_{i-1} = f^D_{i-1}|E^{i-1}(X)$ であり，$\{\{f^D_i\}, \{f^P_i\}\}$ が、f の A_n 構造を与える。

また、定理2-3の i) ⇒ ii) の証明は、次の関係式を用いて、Stasheff[1] における、空間の A_n 形式の存在証明と同様に得られる。

$$F_i(\gamma, x_1, \cdots, x_i) = f^D_i(\gamma^X_{i+1}(\partial_1(i+1, 2)(\tau, *), x_1, \cdots, x_i))$$

$$(\ \tau = \omega_{i+1}(\gamma'),\quad \gamma' = \delta(2, i, 1)(*, \gamma, *)\ )$$

§4 A_n 準同型

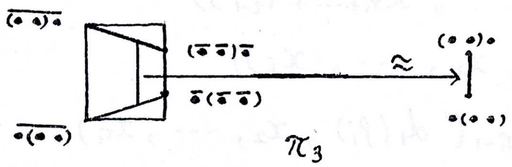
最後に、A_n 準同型が、A_n 形式を許すことをみる。複体 Γ_i は、$[0,1]\times K_i$ を多面体分割して作られるが、次の条件をみたす様に、射影 $\pi_i : \Gamma_i \longrightarrow K_i$ を定める。

(1) $s_j \pi_i = \pi_{i-1} d_j$

(2) $\pi_i \, \delta_k(r,s) = \partial_k(r,s)(\pi_r \times 1)$

(3) $\pi_i \, \delta(i,1,\cdots,1)(\tau,*,\cdots,*) = \tau$

例えば、π_3 は次の様に定める。



Γ_3 K_3

そこで、f を A_n 準同型とする。つまり、各 $i \leqq n$ に対し、$f M_i^X(\tau, x_1, \cdots, x_i) = M_i^Y(\tau, f(x_1), \cdots, f(x_i))$ が成立する。このとき、$\{F_i : \Gamma_i \times X^i \longrightarrow Y\}$ を、

$$F_i(\gamma, x_1, \cdots, x_i) = f M_i^X(\pi_i(\gamma), x_1, \cdots, x_i)$$

とおくと、この $\{F_i\}$ が、射影 π_i の性質から、f の A_n 形式を与える。

文献

[1] J.D. Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces, I, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-292.

[2] J. D. Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces, II, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 293-312.

[3] J. D. Stasheff: H-spaces from a Homotopy Point of view, Lecture Notes in Math. 161 Springer-Verlag (1970).

[4] A. Zabrodsky: Homotopy associativity and finite CW-complexes, Topology, 9 (1970) 121-128.