A_∞ 構造と L-S カテゴリ数

岩 瀬　則 夫

はじめに

0　幾何的な猫たち

（可微分）閉多様体 M 上の smooth な実関数の critical points は、いくつあるであろうか？　その最少数（あるいはここから1を引いた数）を $\mathrm{Crit}(M)$（あるいは $f\mathrm{Cat}(M)$）で表す。　Morse 関数ならば critical points はハンドル分解に対応するが、Hessian の退化があり得る状況ではむしろ embedded closed balls による被覆に対応するようである：

定理 0.1 (Takens 1968 [115]) $\mathrm{Crit}(M) \leq \dim(M){+}1$　（$f\mathrm{Cat}(M) \leq \dim(M)$）.

さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせるであろうか？　その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[115] の証明から次の不等式が得られる：

定理 0.2 (Takens [115]) $\mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \dim(M){+}1$.

次の $g\mathrm{Cat}(-)$ も $f\mathrm{Cat}(-)$ とともにホモトピー不変ではない幾何的な猫の一種である。

定義 0.3 *CW 分割可能な位相空間 X の複体分割は、いったい何枚の可縮な部分複体で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から1を引いた数を $g\mathrm{Cat}(M)$ で表す。*

系 0.4 $g\mathrm{Cat}(M) \leq f\mathrm{Cat}(M) = \mathrm{Crit}(M){-}1 \leq \dim(M)$.

Brittenham [14] によれば1930年代初め、J. H. C. Whitehead は S^3 にホモトピー同値な3次元閉多様体 M から1点を除いた残りが contractible open submanifold となり、これが open ball と同相であることを示すことで、Poincaré 予想の証明に至る計画を立てた。　現実にはこれは失敗し、contractible open manifold であって open ball と同相でないものが存在することが J. H. C. Whitehead 自身によって発見された。

注 0.5 1点ではなく *embedded open disk* を M から取り除けば、残りは2次元球面を境界にもつ3次元の可縮なコンパクト多様体となる。

第1章　L-Sカテゴリ数

1　LusternikとSchnirelmannの猫たち

1.1　古典的な猫たち

さて幾何的な猫 $g\mathrm{Cat}(-)$ をホモトピー不変量としたものがLusternikとSchnirelmannの猫たちである：まず次の言葉を用意する。位相空間 X の部分集合 A は、その包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が定置写像にhomotopicであるときcategorical（猫的）と呼ばれる。　この概念を「可縮」のかわりに用いることで、次の不変量が得られる。

定義 1.1 (Lusternik-Schnirelmann [75]) 閉多様体 M は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から1を引いた数 を $\mathrm{cat}(M)$ で表す。

R. Fox [34] によれば、閉多様体 M のLusternik-Schnirelmannの猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「開集合」に置き換えても、値は変わらない。

さらにG. W. Whitehead [125, 126] によれば、閉多様体 M のL-Sの猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「NDR-閉集合」に置き換えても、値は変わらない。　ホモトピー論では通常、次が「L-Sの猫」の定義として採用される：

定義 1.2 (G. W. Whitehead [125, 126])

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \textit{The } m{+}1\textit{-fold diagonal map } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \\ \textit{is conpressible into } \prod_m^{m+1} X \subseteq \prod^{m+1} X \end{array} \right\}$$

（この $\prod_m^{m+1}(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) | \exists_i x_i = *\}$ は「*fat wedge*」などと呼ばれる）

（Hint: 「位相空間 X が位相空間 Y を支配するならば $\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$」を証明する）

定理 1.3 (L-S [75], Takens [115], James [65], Whitehead [126])

(1) 閉多様体 M に対して次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cat}(M){+}1 \;\leq\; g\mathrm{Cat}(M){+}1 \;\leq\; \mathrm{Ball}(M) \;\leq\; \mathrm{Crit}(M) \leq \dim(M) + 1$$

(2) CW 複体 X に対して不等式「$\mathrm{cat}(X) \leq g\mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

上の (2) に挙げた不等式を用いて、Ganea の「強い」猫が次のように与えられる：

定義 1.4 (Ganea [37]) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な CW 複体 Y 全体を考え、$g\mathrm{Cat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表すことにする。

Ganea は cone-length などと呼ばれる、「強い」猫のもう一つの定義を与えている。

定義 1.5 連続写像 $A \xrightarrow{h} B$ に対する写像錐 $C(h)$ とは、位相和 $\{*\} \coprod A\times[0,1] \coprod B$ から $(a,1) \in A\times[0,1]$ と $h(a) \in B$ とを、また $(a,0) \in A\times[0,1]$ と $*$ とを同一視して得られる等化空間である。また B は、包含写像 $B \hookrightarrow \{*\} \coprod A\times[0,1] \coprod B$ と等化写像 $\{*\} \coprod A\times[0,1] \coprod B \to C(h)$ の合成写像ににより C の閉部分空間とみなされる。

定義 1.6 (Ganea [37]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : A_n \to Y_n \;\; m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n)$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表すことにする。

定理 1.7 (Ganea [37]) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

『略証』　$\mathrm{Cone}(X)$ の値による帰納法を用いて「$\mathrm{Cone}(X) \geq \mathrm{Cat}(X)$」が示される。　また逆向きの不等号は、$\mathrm{Cat}(X)$ の値による帰納法で示される。『終り』

Cornea は $A_n = \Sigma^n B_n$ に限定して「強い」猫の新たな定義を与えた。

定義 1.8 (Cornea [18]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n \;\; m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n)$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表すことにする。

定理 1.9 (Cornea [20]) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

さらに $\Sigma^n B_n$ として球面の一点和をとることで有理ホモトピー論における cone-length に類似した不変量 $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{Cl}_S(X)$ が得られるが、これ以上は立ち入らないことにする。

定理 1.10 (L-S [75], James [65], Takens [115, 116], Ganea [37])

(1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}\mathrm{cat}(M) \leq \mathrm{Cat}(M) \leq g\mathrm{Cat}(M)\\ < g\mathrm{Cat}(M) + 1 \leq \mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \dim(M){+}1.\end{aligned}$$

(2) CW 複体 X に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(X) - 1 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq g\mathrm{Cat}(X) \leq \dim(X).$$

1.2 弱い古典的猫たち

L-S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちが幾つか知られている。そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 1.11 (Whitehead [125, 126])

$$w\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \textstyle\prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \ \textit{is trivial.}\right\}$$

このとき $\bigwedge^{m+1} X = \dfrac{\prod^{m+1} X}{\prod_m^{m+1} X}$ に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 1.12 (Whitehead [125, 126]) *(1)* $w\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$w\mathrm{cat}(X) \geq m$ が成立する。

『略証』 まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod_m^{m+1} X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X$ は零ホモトープである。 従って $w\mathrm{cat}(X) \leq m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

次に (2) は対偶を示す：$w\mathrm{cat}(X) < m$ とすると、定義から reduced diagonal $\bar{\Delta}^m : X \to \wedge^m X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X) \otimes_{h^*} \cdots \otimes_{h^*} \bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X \wedge \cdots \wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

を通り、従ってすべて 0 である。 『終り』

定義 1.13 位相空間 X に対して *cup-length* を定める。*cup-length* は有理ホモトピー論では c と表示されるが、*(total) Chern class* との競合を避けて $\mathrm{cup}(-)$ と表示する：

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、

$\mathrm{cup}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{\{u_0,\cdots,u_m \in \tilde{h}^*(X)\}}\ u_0 \cdot u_1 \cdot \cdots \cdot u_m = 0\right\}$ と定める。

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h)\,|\,h$ は乗法的コホモロジー論$\}$ と定める。

定理 1.14 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する：

(1) $\mathrm{cup}(X;h) \ \leq\ \mathrm{cup}(()X) \ \leq\ w\mathrm{cat}(X) \ \leq\ \mathrm{cat}(X).$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1}X \text{ は } \textit{stably trivial}\right\}$

また位相空間が単連結の場合、これらの弱い猫たちと L-S の猫は全てを p-local で考えることにより、p-local version である $\mathrm{cup}()p, w\mathrm{cat}()p, \mathrm{cat}()p, \mathrm{Cat}()p$ とその間の不等式を得る。

$$\mathrm{cup}_p(X) \leq \mathrm{cup}(X), \quad w\mathrm{cat}_p(X) \leq w\mathrm{cat}(X),$$

$$\mathrm{cat}_p(X) \leq \mathrm{cat}(X), \quad \mathrm{Cat}_p(X) \leq \mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup}_p(X) \ \leq\ w\mathrm{cat}_p(X) \ \leq\ \mathrm{cat}_p(X) \ \leq\ \mathrm{Cat}_p(X).$$

2 L-S の猫の計算

2.1 L-S の猫の一般的性質

例 2.1 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0.$ より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}(D) = 0$ が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1.$ より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$ が成立する。

(3) 位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。特に、位相空間 X が位相空間 Y とホモトピー同値ならば、$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) *(James [65]) Fibre* 束 (E,p,B,F) は $\mathrm{cat}(E){+}1{\leq}(\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1)$ をみたす。

(5) (Fox [34]) 位相空間 X, Y に対して、$\mathrm{cat}(X{\times}Y) \le \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

定理 2.2 (James [65], Ganea [37])　位相空間 X が $(d{-}1)$ 連結ならば、$\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \dfrac{\dim(X)}{d}$（$d \ge 2$）が成立する。

『略証』　X の $(d{-}1)$-skeleton は $\{*\}$ であるとしてよい。まず $k \ge 0$ に対し X_k を X の $((k{+}1)d-1)$-skeleton とする。商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である：$X_0 = \{*\}$、$X_1 \simeq \Sigma K_1$ また $X_{k+1}/X_k \simeq \Sigma K_k$。よって

$$X_1 \simeq X_0 \cup_{h_0} C(K_0), \quad h_0 = * : K_0 \to \{*\} \quad \text{である一方で}$$

Blakers-Massey の定理から商写像 $(X_{k+1}, X_k) \to (X_{k+1}/X_k, \{*\})$ が同型

$$\pi_q(X_{k+1}, X_k) \cong \pi_q(X_{k+1}/X_k), \quad q \le (k{+}2)d{-}2$$

を誘導する。$\dim(K_k) \le (k{+}1)d-2$ より、skeleta についての帰納法を用いて bijection

$$[C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k] \cong [\Sigma K_k, X_{k+1}/X_k] = [\Sigma K_k, \Sigma K_k]$$

を得る。右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k \in [C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k]$ を左辺から選び、$h_k = \chi_k|_{K_k} : K_k \to X_k$ とおけば次を得る：

$$X_{k+1} \simeq X_k \cup_{h_k} C(K_k), \quad h_k : K_k \to X_k \ (k \ge 1)$$

これは $\mathrm{Cat}(X_m) \le m$（$m \ge 0$）を意味する。そこで $\dim(X) = nd + r,\ 0 \le r < d$ とすると、$\dim X \le (n{+}1)d - 1$ より $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cat}(X_n) \le n \le \frac{\dim(X)}{d}$ を得る。　　『終り』

ホモトピー集合 $[\Sigma A, X]$ はよく知られているように自然な群構造をもつ。 $i_t : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A{\vee}\Sigma A$ を第 t 成分への包含写像（$t = 1, 2$）、$p_t : \Sigma A{\vee}\Sigma A \to \Sigma A$ を第 t 成分への射影（$t = 1, 2$）とすると、$i_t \in [\Sigma A, \Sigma A{\vee}\Sigma A]$ 及び $p_{s*} i_t = \begin{cases} 1_{\Sigma A} & (s = t) \\ 0 & (s \ne t) \end{cases}$ が成立する。

定理 2.3 (Ganea [38]) *CW* 複体 A, B に対して、次のような全単射が存在する。

$$[\Sigma B, \Sigma A{\vee}\Sigma A] \cong i_{1*}[\Sigma B, \Sigma A] \times i_{2*}[\Sigma B, \Sigma A] \times [ev_1, ev_2]_*[\Sigma B, \Omega\Sigma A{*}\Omega\Sigma A]$$

（i_{1*}, i_{2*}, $[ev_1, ev_2]_*$ は単射）ただし $[ev_1, ev_2]$ は $ev_1 = i_1{\circ}ev$ と $ev_2 = i_2{\circ}ev$ との一般 *Whitehead* 積であり、$ev : \Sigma\Omega\Sigma A \to \Sigma A$ は代入写像である。

定義 2.4 (B-H [9], I [57, 58], Stanley [106]) 任意の写像 $f : \Sigma B \to \Sigma A$ に対して

$$(i_1 + i_2)\circ f \sim i_1\circ f + i_2\circ f + [ev_1, ev_2]\circ g$$

をみたす $g : \Sigma A \to \Omega\Sigma A{*}\Omega\Sigma A$ が *up to homotopy* で一意的に存在する。この g を $H_1(f)$ で表し、*Berstein-Hilton* の（一次の）一般 *Hopf* 不変量と言う。

定理 2.5 (B-H [9]) 任意の写像 $f : S^q \to S^r$ に対して、接着空間 $Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ の *L-S* の猫は「$\mathrm{cat}(Q) = 1$ *iff* $H_1(f) = 0$」かつ 「$\mathrm{cat}(Q) = 2$ *iff* $H_1(f) \neq 0$」をみたす。

2.2 L-S の猫の計算と問題

例 2.6 *(1)* $\mathrm{cat}(T^r) = \mathrm{cat}(S^1{\times}S^1{\times}\cdots{\times}S^1) = r,\ r \geq 1.$

(2) $\mathrm{cat}(S^{n_1}{\times}S^{n_2}{\times}\cdots{\times}S^{n_r}) = r,\ n_i \geq 1,\ (1 \leq i \leq r).$

(3) (Singhof [102, 103]) $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{cup}(U(n)) = \mathrm{cat}(U(n)) = \mathrm{Cat}(U(n))\ (= n = \mathrm{cup}(U(n); H\mathbb{Z})),$$

$$\mathrm{cup}(SU(n)) = \mathrm{cat}(SU(n)) = \mathrm{Cat}(SU(n))\ (= n{-}1 = \mathrm{cup}(SU(n); H\mathbb{Z})).$$

(4) (James-Singhof [68]) $2 \leq n \leq 5$ に対して

$$\mathrm{cup}(SO(n)) = \mathrm{cat}(SO(n)) = \mathrm{Cat}(SO(n))\ (= \mathrm{cup}(SO(n); H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$$

(5) (I-Mimura [61], I-Mimura-Nishimoto [62]) $3 \leq n \leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(Spin(n)) = \mathrm{cat}(Spin(n)) = \mathrm{Cat}(Spin(n))\ (= \mathrm{cup}(Spin(n); KO)?).$$

(6) (Schweizer [100], Fernándes Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [31], I-M [61])

$$\mathrm{cup}(Sp(n)) = \mathrm{cat}(Sp(n)) = \mathrm{Cat}(Sp(n))\ (= 2n{-}1),\ n \leq 3.$$

問題 2.7 2 次元 *torus* T^2 上に、T^2 を覆う 3 枚の *closed disks* を図示せよ。

次の問題の肯定的な解答は通常 Arnold の予想と呼ばれる。

問題 2.8 (Arnold 196x (p.66 of [15])) *Symplectic* 多様体 M 上の *Hamiltonian diffeomorphism* $\phi : M \to M$ の固定点の個数 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は常に $\mathrm{Crit}(M)$ 以上あるか？

また次の問題の肯定的な解答は通常 Ganea の予想と呼ばれる。

問題 2.9 (Ganea 1971 [39]) $\mathrm{cat}(X \times S^n)$ の値は $\mathrm{cat}(X) + 1$ となるか？

定理 2.10 (Singhof 1979 [105], Rudyak 1997 [93]) 閉多様体 M が次元 $\dim(M) = d$ と *L-S* の猫 $\mathrm{cat}(M) = m$ に関する不等式 $m \geq \dfrac{d+1}{2}$ をみたすならば、*Ganea* の予想は正しい。つまりすべての $n \geq 1$ について $\mathrm{cat}(M \times S^n) = m + 1$ が成立する。

定理 2.11 (Hofer 1988 [48], Floer 1989 [32, 33]) *Symplectic* 多様体 M に対して、$\mathrm{Fix}(\phi) \geq \mathrm{cup}(M)+1$ が成立する。

定理 2.12 (Jessup 1990 [69], Hess 1991 [45]) 有理ホモトピー論の範囲内で *Ganea* の予想は正しい。

そして'90 年代末以後、これらの問題は急展開を迎えた。

定理 2.13 (Liu-Tian 1998 [74], Fukaya-Ono 1999 [36]) M を *Symplectic* 多様体とする。　固定点が非退化である場合に *Arnold* 予想は正しい。

定理 2.14 (I 1998 [55]) *Ganea* の予想を満たさない単連結な位相空間が存在する。

定理 2.15 (Rudyak 1999 [95], Oprea-Rudyak 1999 [91]) M を *Symplectic* 多様体とする。　条件 $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$（$\pi_2(M) = 0$ なら良い）の下で $\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Crit}(M) - 1 = \dim(M)$ が成立し、*Arnold* 予想は（この場合）正しい。

定理 2.16 (I 2001 [58]) *Ganea* の予想を満たさない単連結な閉多様体が存在する。

定理 2.17 (I [58], Lambrechts-Stanley-Vandembroucq [76]) 単連結閉多様体で、その *once-punctured* 部分多様体と同じ *L-S* の猫の値を持つものが存在する。

定理 2.18 (I [59]) 球面上の球面束の構造を持つ閉多様体の猫は *Hopf* 不変量で完全に記述され、*Ganea* の予想が成立する場合と成立しない場合がともに現れる。

定理 2.19 (Oprea-Rudyak [92]) 3 次元閉多様体は *Ganea* の予想を満たす。

第 2 章　A_∞ 構造

3　A_∞ 形式

3.1　Stasheff の胞体

定義 3.1 さて *Stasheff* の胞体は次の様な凸集合で与えられる（*[107, 54, 83, 60]*）：

$$K(n{+}1) = \left\{(t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \textstyle\prod_{i=0}^{n}[0,i] \,\middle|\, \sum_{i=0}^{k} t_i \le k,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = n\right\}, \quad n \ge 0.$$

注 3.2 $K(1) = \{(0)\},\ K(2) = \{(0,1)\},\ K(3) = \{(0,t,2-t)\,|\,0{\le}t{\le}1\} \approx [0,1]$ である。

定義 3.3 その境界作用素が次で与えられる（通常は $m{<}n$ に対して定義する）：

$$\partial_{j+1} : K(n{-}m{+}1) \to \mathrm{Map}(K(m{+}1), K(n{+}1)), \quad 0{\le}j{\le}m{\le}n,$$

$$\partial_{j+1}(u_0, \cdots, u_{n-m})(t_0, \cdots, t_m) = (t_0, \cdots, t_{j-1}, u_0, \cdots, u_{n-m-1}, u_{n-m}{+}t_j, t_{j+1}, \cdots, t_m).$$

注 3.4 $L_{j+1}(r{+}1, s{+}1) = \partial_{j+1}(K(s{+}1))(K(r{+}1)) \subset K(r{+}s{+}1)$ に対し次が成立する：

$$\partial K(n{+}1) = \bigcup_{\substack{0 \le j \le n-s \\ 1 \le s \le n-1}} L_{j+1}(n{-}s{+}1, s{+}1).$$

$K(n{+}1)$ $(n \ge 0)$ 内に点 $\beta_{n+1} = (0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2})$（$\beta_1 = (0), \beta_2 = (0,1)$）をとる。

定義 3.5 退化作用素 $s_{j+1} : K(n{+}1) \to K(n),\ (0 \le j \le n)$ が帰納的に与えられる：

$$s_{j+1}((1{-}t)\xi + t\beta_{n+1}) = (1{-}t)s_{j+1}(\xi) + t\beta_n,\ \xi = \partial_{k+1}(\tau)(\rho) \in \partial K(n{+}1),\ 0{\le}t{\le}1.$$

$$s_{j+1}(\xi) = \begin{cases} \partial_k(\tau)\circ s_{j+1}(\rho), & 0 \le j < k, \\ \partial_{k+1}(s_{j-k+1}(\tau))(\rho), & k \le j \le k{+}t,\ \ (\tau \in K(t{+}1),\ \rho \in K(n{-}t{+}1)). \\ \partial_{k+1}(\tau)\circ s_{j-t}(\rho), & j > k{+}t. \end{cases}$$

3.2　位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ と $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$

圏 $\mathcal{D}$ は、その任意の二つの対象 $A, B \in O(\mathcal{D})$ に対して、その間の射全体 $\mathcal{D}(A,B)$ が位相空間をなすとき、（広い意味の）位相圏であると呼ばれる。

また圏 $\mathcal{D}$ は、その対象全体 $O = O(\mathcal{D})$ および射全体 $M = M(\mathcal{D})$ が集合をなすとき、小圏であると呼ばれる。　さらにそれらが位相空間であるとき、位相小圏であると呼ばれる。　ここでは、前節で与えたStasheffの胞体を用いた位相小圏を定義する。

定義 3.6 圏 $\mathcal{A}_\infty$ は、自然数全体 $\{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \cdots\}$ が対象で $\underline{m{+}1}$ から $\underline{n{+}1}$ への射の全体が

$$\coprod_{\substack{a_0,\cdots,a_m \geq 0 \\ a_0+\cdots+a_m=n-m}} K(a_0{+}1)\times\cdots\times K(a_m{+}1)$$

で、射 $(\rho_0, \cdots, \rho_\ell) : \underline{\ell{+}1} \to \underline{m{+}1}$ と $(\sigma_0, \cdots, \sigma_m) : \underline{m{+}1} \to \underline{n{+}1}$ との合成 $(\tau_0, \cdots, \tau_\ell) : \underline{\ell{+}1} \to \underline{n{+}1}$ が次で与えられる。　$(\rho_i \in K(r_i+1), i \leq \ell; \sigma_j \in K(a_j+1), j \leq m)$

$$\tau_i = \partial_{0+1}(\sigma'_0)\circ\cdots\circ\partial_{r_i+1}(\sigma'_{r_i})(\rho_i) \in K(r_i{+}a'_0{+}\cdots{+}a'_{r_i}{+}1),$$
$$(\sigma'_j = \sigma_{r_0+\cdots+r_{i-1}+i+j}, \quad a'_j = a_{r_0+\cdots+r_{i-1}+i+j}).$$

問題 3.7 上の $\mathcal{A}_\infty$ が位相小圏となることを示せ。

この位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて、次の二つの圏を構成する（$1 \leq m \leq \infty$）：

定義 3.8 圏 $\mathcal{A}_m$ は、集合 $\{\underline{1}, \underline{2}, \cdots, \underline{m}\}$ を対象の全体とする $\mathcal{A}_\infty$ の充満部分圏である。

定義 3.9 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ は、集合 $\{\underline{1}, \underline{2}, \cdots, \underline{m}\}$ が対象の全体で $\underline{\ell{+}1}$ から $\underline{n{+}1}$ への射の全体が

$$\begin{cases} \displaystyle\coprod_{\substack{a_0,\cdots,a_\ell \geq 0 \\ a_0+\cdots+a_\ell=n-\ell}} K(a_0{+}1)\times\cdots\times K(a_\ell{+}1), & \ell \leq n, \\ \{(i_1, i_2, \cdots, i_{\ell-n}) \,|\, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{\ell-n} < \ell\}, & \ell > n \geq 1. \end{cases}$$

（$1 \leq m \leq \infty$）で与えられ、$(i_1, i_2, \cdots, i_{\ell-n})$ が退化作用素の合成写像 $s_{i_1+1}s_{i_2+1}\cdots s_{i_{\ell-n}+1}$ に対応する。

問題 3.10 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ $(1 \leq m \leq \infty)$ にうまく射の合成を定義して位相小圏とせよ。

注 3.11 *Stasheff* によるオリジナルの A_∞ 形式は、小圏 $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ を用いるものであったが、*Boardman-Vogt, Klein-Schwänzl-Vogt* によれば、小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて定義したものと同値である。　ただし、その同値性の明確な証明は現在まで出版されていない様である。

3.3　A_∞ 形式

二つの位相圏 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ の間の関手 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ が連続関手であるとは F の誘導する写像

$$F : \mathcal{D}(A, B) \to \mathcal{E}(F(A), F(B)), \quad A, B \in O(\mathcal{D}).$$

が連続写像なこととする。　まず Stasheff [107] による $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いる定義を記述する。

定義 3.12 位相空間 $X \in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な反変関手 $\underline{\tilde{X}} : \tilde{\mathcal{A}}_m^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ が三条件

(1) $\underline{\tilde{X}}(\underline{n}) = \prod^n X,$ *the n-fold product,*

(2) $\underline{\tilde{X}}(\beta_2) : X \times X \to X,\ (\beta_2 \in K(1+1)),$ *a multiplication with two-sided homotopy unit and inversion,*

(3) $\underline{\tilde{X}}(j_1, \cdots, j_{\ell-n})(x_0, \cdots, x_n) = (y_0, \cdots, y_\ell), \quad y_j = \begin{cases} *, & \textit{if } j = j_i, \\ x_{j+i}, & \textit{if } j_i < j < j_{i+1}. \end{cases}$

を満たすとき、X を $\tilde{A}_m$-空間、$\underline{\tilde{X}}$ を X の $\tilde{A}_m$-形式（$1 \le m \le \infty$）などという。

次に Stasheff [109] による A_m-形式（$1 \le m \le \infty$）の定義を圏論的に記述する。

定義 3.13 位相空間 $X \in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な反変関手 $\underline{X} : \mathcal{A}_m^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ が二条件

(1) $\underline{X}(\underline{n}) = \prod^n X$ *the n-fold product,*

(2) $\underline{X}(\beta_2) : X \times X \to X,\ (\beta_2 \in K(1+1)),$ *a multiplication with two-sided homotopy unit and inversion.*

を満たすとき、X を A_m-空間、$\underline{X}$ を X の A_m-形式（$1 \le m \le \infty$）などという。

さらに Boardman-Vogt[11], Klein-Schwänzl-Vogt [71] による co-A_m-形式（$1 \le m \le \infty$）の定義を圏論的に記述する。

定義 3.14 位相空間 $Y \in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な共変関手 $\underline{Y} : \mathcal{A}_m \to \mathcal{K}$ が二条件

(1) $\underline{Y}(\underline{n}) = \bigvee_n Y$ *the n-fold wedge sum (one-point-sum),*

(2) $\underline{Y}(\beta_2) : Y \to Y \vee Y,\ (\beta_2 \in K(1+1)),$ *a co-multiplication with two-sided homotopy unit $*$ and inversion.*

を満たすとき、Y を *co*-A_m-空間、$\underline{Y}$ を Y の *co*-A_m-形式（$1 \leq m \leq \infty$）などという。

注 3.15 これに対する *Stasheff [107]* の定義の双対は無意味である。　もう少し正確には、$\mathcal{A}_m$ の代わりに $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いた時点で *co*-A_m-空間の非存在が直ちに得られる（$m \geq 2$）。

例 3.16 *(1)* いかなる位相群も $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(2) 連結 CW 複体のホモトピー型を持ついかなる位相モノイドも $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(3) $\tilde{A}_\infty$-空間に基点付きホモトピーでホモトピー同値な空間は $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(4) A_∞-空間にホモトピー同値な空間は A_∞-空間である。

(5) いかなる単連結 CW 複体 X のループ空間 ΩX も A_∞-空間である。

(6) いかなる懸垂空間 ΣX も *co*-A_∞-空間である。

『略証』　(1) は自明である。　(2) は位相モノイド X のホモトピー逆元の存在のみが自明でないが、これは shearing map

$$\varphi : X \times X \to X \times X, \qquad \varphi(x, y) = (x, xy)$$

がホモトピー群の同型を誘導し、J. H. C. Whitehead の定理からホモトピー同値写像となる事実に従う。　(3), (4) は A_m-写像に対する I-M [60] の証明と同様に得られる。(5) はループ空間 ΩX が J. C. Moore のループ空間 $\tilde{\Omega} X$（位相モノイド）にホモトピー同値（基点は保たない）で Toda [117] によって CW 複体のホモトピー型を持つことから (2) と (4) に帰着する。　(6) は省略する。　『終り』

定理 3.17 (Stasheff [107]) 任意の $\tilde{A}_\infty$-空間は、ループ空間にホモトピー同値である。

定理 3.18 (Klein-Schwänzl-Vogt [71]) 任意の 2-連結 *co*-A_∞-空間は、単連結な空間の懸垂空間にホモトピー同値である。

注 3.19 上記の事実に *Klein-Schwänzl-Vogt* の与えた証明は２種類の異なる構成を用い、*little cube* のアイデアを取り入れるなどかなり入り組んだものとなっている。

3.4 標準的な A_∞ 構造

定義 3.20 連続な共変関手 $\underline{\tilde{K}} : \tilde{\mathcal{A}}_\infty \to \mathcal{K}$ を次で定める。

$$\begin{aligned}
&\underline{\tilde{K}}(\underline{n{+}1}) = K(n{+}1), \quad n \geq 0, \\
&\underline{\tilde{K}}(\sigma_0, \cdots, \sigma_m) = \ \partial_{0+1}(\sigma_0)\circ\cdots\circ\partial_{m+1}(\sigma_m) : K(m{+}1) \to K(n{+}1), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\sigma_i \in K(a_i{+}1), \quad a_0 + \cdots + a_m = n - m) \\
&\underline{\tilde{K}}(i_1, i_2, \cdots, i_{\ell-n}) = s_{i_1+1}s_{i_2+1}s_{i_{\ell-n}+1} : K(\ell{+}1) \to K(n{+}1),
\end{aligned}$$

さてここで次の機械を用意する。

定義 3.21 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A} : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ と $\underline{B} : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ それに反変関手 $\underline{C} : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ が連続関手であるとき、次の二つの空間を定義する。

(1) $\underline{A} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{C} = \displaystyle\coprod_{\underline{d}\in\mathcal{D}} \underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}(\underline{d})/\sim, \quad (\underline{A}(\chi)(a_{\underline{d}}), c_{\underline{d'}}) \sim (a_{\underline{d}}, \underline{A}(\chi)(c_{\underline{d'}})),\ (\chi : \underline{d} \to \underline{d'}),$

(2) $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}, \underline{B}) = \left\{ (\phi_{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathcal{D}} \in \prod^{\underline{d}\in\mathcal{D}} \mathcal{K}(\underline{A}(\underline{d}), \underline{B}(\underline{d})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall(\chi : \underline{d} \to \underline{d'}) \\ \underline{B}(\chi)\circ\phi_{\underline{d}} = \phi_{\underline{d'}}\circ\underline{A}(\chi) \end{array} \right\}.$

問題 3.22 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A} : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ と $\underline{B}_1, \underline{B}_2 : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ それに反変関手 $\underline{C}_1, \underline{C}_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ が連続関手であるとき、次を示しなさい。

(1) 自然変換 $\underline{c} : \underline{C}_1 \to \underline{C}_2$ に対し、写像 $\underline{A} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{c} : \underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1 \to \underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{A} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{c})(a_{\underline{d}}, c_{\underline{d}}) = (a_{\underline{d}}, \underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(2) 自然変換 $\underline{b} : \underline{B}_1 \to \underline{B}_2$ に対し、写像 $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}, \underline{b}) : \hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}, \underline{B}_1) \to \hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}, \underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}, \underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}}) = (\underline{b}(\underline{d})(\underline{d}(a_{\underline{d}})))$$

(3) より一般に上の *(1)* でさらに自然変換 $a : \underline{A} \to \underline{A'}$ が任意に与えられた時、写像 $\underline{a} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{c} : \underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1 \to \underline{A'}(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{a} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{c})(a_{\underline{d}}, c_{\underline{d}}) = (\underline{a}(a_{\underline{d}}), \underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(4) より一般に上の *(2)* でさらに自然変換 $a:\underline{A}\to\underline{A'}$ が任意に与えられた時、写像 $\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b}):\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\underline{A'},\underline{B}_1)\to\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}})=(\underline{b}(\phi_{\underline{d}}(\underline{a}(\underline{d})(a_{\underline{d}}))))$$

定義 3.23 反変関手 $\underline{\tilde{X}}:\tilde{\mathcal{A}}_m^{op}\to\mathcal{K}$ を $\tilde{A}_m$ 形式とする $\tilde{A}_m$ 空間 X をとる（$1\le m\le\infty$）。反変関手 $\tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}}):\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op}\to\mathcal{K}$（$0\le k\le m$）、$\tilde{D}^k(\underline{\tilde{X}}),\tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}}):\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op}\to\mathcal{K}$（$0\le k\le m{+}1$）と自然変換 $\tilde{p}^k_{\underline{\tilde{X}}}:\tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}})\to\tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}})$ を次で定める（ただし $\sigma_i\in K(a_i{+}1)$, $\sum_i a_i=n{-}m$）：

(1) $\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1})=\underline{X}(\underline{n})=X^n,\quad n\ge 0,$

$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)(x_1,\cdots,x_n)=\underline{\tilde{X}}(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)(x_{a_0+1},\cdots,x_n),$

$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_\ell),$

$$y_j=\begin{cases}*, & \textit{if } j=j_i,\\ x_{j+i}, & \textit{if } j_i<j<j_{i+1}.\end{cases}$$

(2) $$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1})=\begin{cases}\underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1})=X^n, & n\le m,\\ X^m\times\{*\}^{n-m}, & n>m,\end{cases}$$

$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)=\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$

$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})=\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$

(3) $$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1})=\begin{cases}\underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1})=X^{n-1}, & n\ge 1,\\ \emptyset, & n=0,\end{cases}$$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)(x_1,\cdots,x_{n-1})=\underline{\tilde{X}}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1})(x_{a_0+1},\cdots,x_{n-a_m-1}),$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})(x_1,\cdots,x_{n-1})=(y_1,\cdots,y_{\ell-1}),$

$$y_j=\begin{cases}*, & \textit{if } j=j_i,\\ x_{j+i}, & \textit{if } j_i<j<j_{i+1}.\end{cases}$$

(4) $\tilde{p}_{\underline{\tilde{X}}}(\underline{n{+}1})(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_{n-1}).$

このように定めた関手等に対して定義 3.21 を用いて新たに空間と写像を作る。

定義 3.24 $\tilde{E}^k(X)=\underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{B}^k(X)=\underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{p}^k_X=\underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{p}^{\underline{\tilde{X}}}$（$0\le k\le m$）とおき、$X$ の <u>標準的</u> な $\tilde{A}_m$ 構造と言う。

定理 3.25 (Stasheff [107], 三村 [83]) 反変関手 $\underline{\tilde{X}}:\tilde{\mathcal{A}}_m^{op}\to\mathcal{K}$ を $\tilde{A}_m$ 形式とする $\tilde{A}_m$ 空間 X（$1\le m\le\infty$）に対し、以下が成立する。

(1) $\tilde{B}^1(X)=\{*\}$ かつ $\tilde{E}^1(X)=X$ であり、$\tilde{p}_{\underline{X}}$ は自明な写像である。

(2) $\tilde{E}^k(X)$ は $\tilde{E}^{k+1}(X)$ の中で可縮（$k<m$）となる。　従って $m=\infty$ のとき $\tilde{E}^\infty(X)$ は可縮である。

(3) $\tilde{p}^k_X:\tilde{E}^k(X)\to\tilde{B}^k(X)$（$k\le m$）は X を *fibre* とする *quasi-fibration* である。

(4) $\tilde{D}^k(X)$ $(\supset\ \tilde{E}^k(X))$ は可縮（$k\ \le\ m$）であり、$\tilde{B}^{k+1}(X)$（$k\ \le\ m$）は接着空間 $\tilde{B}^k(X)\cup_{\tilde{p}^k_X}\tilde{D}^k(X)\simeq C(\tilde{p}^k_X)$ に同相である。

ただし $E\ \xrightarrow{p}\ B$ が $F\ \overset{i}{\hookrightarrow}\ E$ を *fibre* とする *quasi-fibration* とは、$p\circ i\ \sim\ *$ かつ同型 $\pi_*(E,F)\xrightarrow{p_*}\pi_*(B)$ が誘導されることである。

$$F(p)=\{(\omega,e)\,|\,\omega:[0,1]\to B,\ \omega(0)=*,\ \omega(1)=p(e),e\in E\}$$

定義 3.26 *CW*複体 X に対して、上記の *(1)*〜*(3)* の３条件（$\tilde{E}^k(X)$, $\tilde{B}^k(X)$, $\tilde{p}^k_X:\tilde{E}^k(X)\to\tilde{B}^k(X)$ を $E^k(X)$, $B^k(X)$, $p^k_X:E^k(X)\to B^k(X)$ に置き換える）を満たすものの集まり $\{(E^k(X),B^k(X),p^k_X)\,|\,0{\le}k{\le}m\}$ が存在する時、これを X の A_m 構造と言う。

定理 3.27 (Stasheff [107]) *CW*複体 X が A_m-構造 $\{B^{k+1}(X)\,|\,k\le m\}$ を持つならば、X は $\tilde{A}_m$-空間 X' にホモトピー同値であり、X' の $\tilde{A}_m$-構造 $\tilde{B}^{k+1}(X')$ から X' への写像は X の A_m-構造 $B^{k+1}(X)$ から X への写像を経由する *compatible* な構造を与える。

系 3.28 *CW*複体 X に対して、$\tilde{\Omega}X$ の $\tilde{A}_\infty$-構造 $\{B^{k+1}(X)\}$ は $B^\infty(X)\simeq X$ をみたす。

例 3.29　*(1)* $\tilde{B}^{k+1}(S^0)=\mathbb{R}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^1)=\mathbb{C}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^3)=\mathbb{H}P^k$（$0\le k\le\infty$）。

(2) $\tilde{B}^1(S^7)=*$、$\tilde{B}^2(S^7)=S^8$、$\tilde{B}^3(S^7)=\mathcal{O}P^2$ *(Cayley plane)*。

注 3.30 古典的な射影空間との類比から、$\tilde{B}^{k+1}(X)$ を $\tilde{P}^k(X)$ によって表すことがある。

系 3.31 $\mathrm{Cat}(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))\le m$ であり、従って $\mathrm{cat}(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))\le m$ である。

定理 3.32 (Cornea [18]) $\mathrm{cat}(X)=m$ のとき、$i\le m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X))=i$ であり、$i\ge m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X))=m$ である。

定理 3.33 (Ganea [37], Gilbert [40], I [55], Sakai [98]) $\mathrm{cat}(X) \le m$ となるには $e^X_m : \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X) \simeq X$ が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である。従って、次式が成立する：

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \ge 0 \,|\, \exists_{\sigma:X\to P^m(\tilde{\Omega}X)} \text{ such that } e^X_m \circ\sigma \sim 1 = X\}.$$

定理 3.34 (Fox [34]), I [55]) 常に $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \le \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ であり、等号が成立する為には $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}Y) \simeq X{\times}Y$（$\mathrm{cat}(X){=}m$, $\mathrm{cat}(Y){=}n$ は共に 1 以上）が右ホモトピー逆写像を 持たない ことが必要十分である。

『略証』　まず $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}Y) \simeq X{\times}Y$ が右ホモトピー逆写像を持つとする：k についての帰納法で $\mathrm{Cat}(\bigcup_{i+j<k} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y)) \le k$ が得られるから、$\mathrm{cat}(\bigcup_{i+j<k} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y)) \le k-1$ であり、$X{\times}Y$ は仮定から $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y)$ に支配されるので $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ がわかる。
　次に $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ とすると、定理 3.33 から $X{\times}Y$ は $\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}(X{\times}Y))$ に支配される。　ここで、$\bigcup_{i+j\le k} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y)$ は $\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}Y) \simeq X{\times}Y$ の標準的ではない A_∞-構造を与え、定理 3.27 から標準的な写像 $X{\times}Y$ は $\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}(X{\times}Y)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}Y)$ は $\bigcup_{i+j\le k} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}Y)$ を経由する。従って $X{\times}Y$ は $\bigcup_{i+j\le k} \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^j(\tilde{\Omega}Y)$ にも支配される。　『終り』

系 3.35 (I [55]) $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ となる為には、$\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}S^n \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}S^n \simeq X{\times}S^n$（ただし $\mathrm{cat}(X) = m \ge 1$）が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である。

『略証』　まず $\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\} \cup \tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^1(\tilde{\Omega}S^n) \cup \cdots \cup \tilde{P}^1(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}S^n) \cup \{*\}{\times}\tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}S^n) \subseteq \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\} \cup \tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}S^n) \subset \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}S^n)$ に注意する。　従って定理 3.34 から、$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ ならば、$\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\} \cup \tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}S^n) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}\tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}S^n) \simeq X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。従って $\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}S^n \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X){\times}S^n \simeq X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。　逆は $\mathrm{Cat}(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\tilde{\Omega}X){\times}S^n) \le m$ より明らか。　『終り』

定理 3.36 (Ganea) $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{cat}(X){+}1$.

『略証』 $\mathrm{cat}(X) = m$ とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ を定理 3.33 により与えられるものとする。 $\sigma : X \to \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ と包含写像 $\tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ のホモトピー pull-back を B_i とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ と写像 $\tilde{E}^{i+1}(\tilde{\Omega}X) \to \tilde{P}^i(\tilde{\Omega}X) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ のホモトピー pull-back を A_i とし、σ のホモトピー fibre を F する。 このとき、$X_i = B_i/F, Y_i = A_i/F$ とおけば、$X_0 \simeq \{*\}, X_m \simeq X{\vee}\Sigma F$ であり、$Y_i \to X_i \to X_{i+1}$ は up to homotopy で cofibration となる。従って $\mathrm{Cat}(X) \le m{+}1 = \mathrm{cat}(X){+}1$ が成立する。 『終り』

定理 3.37 (James) $F \to E \to B$ を *fibration* とする。 このとき次式が成立する：

$$\mathrm{cat}(E){+}1 \le (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1)$$

『略証』 $\mathrm{cat}(B) = m, \mathrm{cat}(F) = n$ とすると、定理 3.33 より必要なら B を $\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}B)$ に取り替えることにより $\mathrm{Cone}(B) = m$ と仮定してよい。 そこで $\{h_i : H_i \to B_i \,|\, 0{\le}i{\le}m\}$ を B の cone decomposition とし、$E_i = p^{-1}(B_i)$ とおく：

$$B_{i+1} = B_i \cup C(H_i), B_0 = \{*\} \text{ and } B_m = B,$$

$$E_{i+1} = E_i \cup C(H_i){\times}F, E_0 = F \text{ and } E_m = E.$$

さてここで帰納法を用いて $\mathrm{cat}(E_i){+}1 \le (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ を示す。

($i = 0$ の場合) 明らか。

($i{\le}j$ まで正しかったとして $i{=}j{+}1$ の場合) $E_{j+1} = E_j \cup C(H_j){\times}F$ であり、この式の中の F を定理 3.33 より $F' = \tilde{P}^n(\tilde{\Omega}F)$ に取り替えれば、$E'_{j+1} = E_j \cup C(H_j){\times}F'$ は E を支配する。 そこで $\{k_i : K'_i \to F'_i \,|\, 0{\le}i{\le}m\}$ を F' の cone decomposition とする：

$$F'_{i+1} = F'_i \cup C(K_i), F'_0 = \{*\} \text{ and } F'_n = F',$$

さらに $E'_{j,i} = E_j{\cup}C(H_j){\times}F'_i$ とおけば、次のような E_{j+1} の cone decomposition を得る：

$$E'_{j,i+1} = E_{j,i} \cup C(H_j){\times}C(K'_i), E'_{j,0} = E_j \text{ and } E'_{j,n} = E'_{j+1},$$

従って $\mathrm{cat}(E) \le \mathrm{cat}(E') \le (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}i + \mathrm{cat}(F){+}1 = (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ となり帰納法が成立する。 『終り』

第 3 章　L-S の猫の決定

4　二つのスタンス

4.1　計算可能な不変量を用いて良い状況での結果を得る

定義 4.1 *Toomer* 不変量とその改良版を導入する。*Toomer* 不変量は有理ホモトピー論では $\mathrm{e}(-)$ と表示されるが、*Adams* e 不変量との競合を避けて $\mathrm{wgt}(-)$ と表示する：

(1) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(a) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))$ は単射 $\right\}$

(b) $\mathrm{Mcat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))$ は h^*h-*modules* の間の *split mono* $\right\}$

(c) $\mathrm{Acat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))$ は h^*h-*algebras* の間の *split mono* $\right\}$

(2) *(a)* $\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なコホモロジー論$\}$

(b) $\mathrm{Mcat}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mcat}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なコホモロジー論$\}$

(c) $\mathrm{Acat}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Acat}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なコホモロジー論$\}$

(3) *(a)* $\mathrm{e}_{()}p(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{e}(X;h)\,|\,h$ は乗法的な *p-local* コホモロジー論$\}$

(b) $\mathrm{Mcat}_{()}p(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mcat}(X;h)\,|\,h$ は乗法的な *p-local* コホモロジー論$\}$

(c) $\mathrm{Acat}_{()}p(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Acat}(X;h)\,|\,h$ は乗法的な *p-local* コホモロジー論$\}$

定理 4.2 $\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq \mathrm{Mcat}(X;h) \leq \mathrm{Acat}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [28] (1992) の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L-S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 4.3 (Rudyak 1997 [93, 94], Strom 1998 [111]) $u \in \tilde{h}^*(X)$ に対して

$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0\right\}$ と定義する（h は乗法的コホモロジー論)。

定理 4.4 (Rudyak [93, 94], Strom [111]) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(1) $\underline{uv \neq 0}$ *in* $h^*(X)$ ならば $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(^{)}h(v) \leq \mathrm{wgt}(^{)}h(uv)$ が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h) \,|\, u \in \tilde{h}^*(X)\}$ が成立する。

定義 4.5 $\{(E_r^{**}(X;h), d_r) \,|\, r \geq 1\}$ を $X \simeq \tilde{P}^\infty(\tilde{\Omega}X)$ の *filtration* $\left\{\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X) \,|\, m \geq 0\right\}$ に *associate* し、$h^*(X)$ に収束する *Rothenberg-Steenrod* 型の *spectral sequence* とする。

定理 4.6 (Whitehead [125], Ginsburg [41], McCleary [82]) X を単連結とする。

(1) $h^*(\tilde{\Omega}X)$ が h^* 上 *free* ならば、$E_2^{**}(X;h) \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{h^*(\Omega X)}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E_r^{s,t}(X;h) \to E_r^{s+r,t-r+1}(X;h)$ であり、$H(E_r^{*,*}(X;h), d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}(X;h)$

(3) $E_\infty^{*,*}(X;h) \cong E_0 h^*(X), \qquad E_\infty^{s,t}(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$

$$F_m h^n(X) = \ker\left\{(e_m^X)_* : h^n(X) \to h^n(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))\right\}$$

(4) *(Whitehead)* $r > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_r^{s,t}(X;h) \cong E_\infty^{s,t}(X;h)$ である。

(5) *(Ginsburg)* $s > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_\infty^{s,t}(X;h) = 0$ である。

注 4.7 任意の $[u]\ (\neq 0) \in E_\infty^{s,*}(X;h),\ (u \in \tilde{h}^*(X))$ に対して $\mathrm{wgt}(u;h) = s$ である。

例 4.8 *(1)* $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \dim(L^n(p)) = n$（$p > 1$ は任意）である。

(2) *Symplectic* 多様体 M が $\pi_2(M)$=0 を満たせば $\mathrm{wgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = 2n$ である。

(3) $\mathrm{wgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mcat}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(Sp(2))$ である。

4.2 二つの「安定」な猫

最近になって、cup() とは異なる形で安定化された L-S の猫たちが導入された：

定義 4.9 (Rudyak [94]) $\sigma\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{(stably)\ \sigma : X \to P^m(\tilde{\Omega}X)}\ e_m^X \circ \sigma \sim 1_X\}$.

定義 4.10 (Vandembroucq [122])

$$\mathrm{Qcat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{\sigma : X \to (QP)^m(\tilde{\Omega}X)}\ (Qe)_m^X \circ \sigma \sim 1_X\},$$

ただし、*fibration* $E^{m+1}(\tilde{\Omega}X) \longrightarrow P^m(\tilde{\Omega}X) \xrightarrow{e^X_m} X$ を安定化関手 Q を用いて *fibrewise* に安定化したものが $Q(E^{m+1}(\tilde{\Omega}X)) \longrightarrow (QP)^m(\tilde{\Omega}X) \xrightarrow{(Qe)^X_m} X$ である。

定理 4.11 (Rudyak [94, 95], Vandembroucq [122]) *(1)* $\mathrm{Qcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) 有理化された空間 X_0 は $\mathrm{wgt}(X_0) = \sigma\mathrm{cat}(X_0) \leq \mathrm{Qcat}(X_0) = \mathrm{cat}(X_0)$ をみたす。

(3) $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Mcat}(X) = \sigma\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Acat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

一般に $\mathrm{cat}(X)$ の近似としては、$\mathrm{cup}(X;h)$ より $\mathrm{wgt}(X;h)$、$\mathrm{wgt}(X;h)$ より $\mathrm{Mcat}(X;h)$、$\mathrm{Mcat}(X;h)$ より $\mathrm{Acat}(X;h)$ の方が良い近似を与える。

4.3 高次の Hopf 不変量と L-S の猫

Berstein-Hilton [9] (1960) は R 係数のホモトピー群の元に対して高次の Hopf 不変量

$$H_m : \pi_n(X;R) \to \pi_{n+1}(\textstyle\prod^m X, \prod^m_{m-1} X; R), \quad n{\geq}2,\ m{\geq}1,$$

を用いて基点以外に二つだけ胞体を持つ複体の L-S 猫を決定した。 Stanley と I はこの高次 Hopf 不変量を ΩX の A_∞ 構造を用いて集合に値を持つ不変量として再定義した：

定義 4.12 (I 1998,2002 [57, 58], Stanley 2000 [106]) $\sigma : X \to \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)$ を定理 *3.23* で定まる $\mathrm{cat}(X) \leq m$ の構造を与える写像とする。 任意の $f : \Sigma V \to X$ に対して次の可換図を考える：($e^X_m{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = ev{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = f = 1_X{\circ}f = e^X_m{\circ}\sigma{\circ}f$)

$$\begin{tikzcd}
 & & \Sigma V \arrow[d, "f"] \arrow[dll, dotted, bend right=10, "H^\sigma_m(f)"'] \arrow[dd, dotted, bend left=10] \arrow[rrdd, "f"] \arrow[rd, "\Sigma\,\mathrm{ad}(f)"] & & \\
 & & X \arrow[d, "\sigma"'] & \Sigma\tilde{\Omega}X \arrow[ld, hook] \arrow[rd, "ev"'] & \\
\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}X) \arrow[rr, "p^{\tilde{\Omega}X}_{m+1}"'] & & \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X) \arrow[rr, "e^X_m"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

そこで $\sigma{\circ}f$ と $\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の差 $d^\sigma_m(f) = \sigma{\circ}f - \Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の持ち上げ（$p^{\tilde{\Omega}X}_{m+1}{\circ}H^\sigma_m(f) = d^\sigma_m(f)$）を $H^\sigma_m(f) \in [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}X)]$ とし、$\mathcal{H}^\sigma_m(f) = \Sigma^\infty H^\sigma_m(f) \in \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}X)\}$ とする。

問題 4.13 ΣV がホモトピー可換な *co-Hopf*空間ならば H_m^σ が準同型となるか？

定理 4.14 (I [58]) V が *co-Hopf*空間ならば任意の σ に対して H_m^σ は準同型である。

『略証』　$f, g : \Sigma V \to X$ に対してその adjoints を $\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g) : V \to \tilde{\Omega} X$ とする：

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f) : \Sigma V \to \Sigma\tilde{\Omega}X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(g) : \Sigma V \to \Sigma\tilde{\Omega}X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) : \Sigma V \to \Sigma\tilde{\Omega}X$$

ここで $+_S$ は suspension 構造によるホモトピー集合の積である。　ところが ΣV と V は、V の co-Hopf 構造によるホモトピー集合の積をもつので、これを $+_V$ で表せば

$$\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \mathrm{ad}(f{+_V}g) \sim \mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)$$

を得る。　従ってこれらの懸垂をとることで次のホモトピーを得る。

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma(\mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_S}\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$$

従って $\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_S}\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$ となり、定義から $H_m^\sigma(f{+}g) \sim H_m^\sigma(f){+}H_m^\sigma(g)$ が成立する。　『終り』

問題 4.15 任意の σ に対して $H_m^\sigma(f\circ(\Sigma g)) = H_m^\sigma(f)\circ(\Sigma g)$ が成立することを確かめよ。

例えば $\tilde{A}_m$ 空間 G に対して $X = \tilde{P}^m(G)$ とおけば、標準的な構造写像 $\sigma : \tilde{P}^m(G) \to \tilde{P}^m(\tilde{\Omega}\tilde{P}^m(G))$ に対して $H_m^\sigma : [\Sigma V, \tilde{P}^m(G)] \to [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}\tilde{P}^m(G))]$ が定まる（I [58]）。

定理 4.16 球面 S^{n-1} *(*$n = 1, 2, 4, 8$*)* はノルムを保つ（非結合的）積を持つ $\mathbb{R}$ 代数の単元の全体としての積構造を持つ。　このとき高次 *Hopf* 不変量 $H_m^S : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ が 1 となる元の存在が S^{n-1} の A_{m+1} 構造の存在と同値である。

『略証』　まず $H_m^S : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}\tilde{P}^m(S^{n-1})))$ であり、

$$\pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}\tilde{P}^m(S^{n-1}))) \cong \pi_{n(m+1)-1}(S^{n(m+1)-1}) \cong \mathbb{Z}$$

となるから、$H_m^S : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ と考えて良い。

$H_m^S(f) = 1$ となる $f : S^{n(m+1)-1} \to \tilde{P}^m(S^{n-1})$ が存在すれば、f のホモトピー fibre が Serre spectral sequence を用いて $S^{n-1})$ にホモトピー同値であることが分かり、X の Stasheff の意味の A_{m+1}-構造が作られる。　よって定理 3.27 から X は $\tilde{A}_{m+1}$-空間である。　逆は明らかである。　『終り』

4.4　必要十分条件を用いて決定的な結果を得る

定義 4.17 (I [58]) 位相空間 X は $\mathrm{cat}(X)=m$ をみたす空間であるとする。高次の（非安定および安定）*Hopf* 不変量は

$$\begin{cases} H^S_m(\alpha)=\{H^\sigma_m(\alpha)\,|\,\sigma \text{ is a structure of } \mathrm{cat}(X)=m\}\subseteq[\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}X)], \\ \mathcal{H}^S_m(\alpha)=\{\mathcal{H}^\sigma_m(\alpha)\,|\,\sigma \text{ is a structure of } \mathrm{cat}(X)=m\}\subseteq\{\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}X)\}. \end{cases}$$

という集合として各々定義される。

問題 4.18 $d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2\geq\dim(X)\geq d\cdot\mathrm{cat}(X)$ ならば σ は一意的であることを示せ。

例 4.19 $X=S^n,\mathbb{R}P^n,\mathbb{C}P^n,\mathbb{H}P^n$（各々 $n\geq 1$）は上の条件をみたす。

定理 4.20 (I [58]) *CW* 複体 X が $\mathrm{cat}(X)=m$（$m\geq 1$）かつ $(d-1)$ 連結（$d\geq 2$）で条件「$\dim(X)\leq d\,\mathrm{cat}(X)+d-2$」を満たすとき $W=X\cup_\alpha D^{e+1}\overset{i}{\hookleftarrow}X$（$e\geq d$）とおく。

(1) 「$\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ である」為には「$H^S_m(\alpha)\neq 0$ である」が必要十分である。

(2) また $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ のとき、「すべての $n\geq 1$ に対して $\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)+1$ である」為には「$\mathcal{H}^S_m(\alpha)\neq 0$ である」が必要十分である。

『略証』　(2) は省略し、(1) のみを示す：$\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\sigma:X\to\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X)\hookrightarrow\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}W)$ が W に extend できるための障害が

$$\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\sigma\circ\alpha\simeq\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\sigma\circ\alpha-\Sigma\,\mathrm{ad}\,(i\circ\alpha)\simeq\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\sigma\circ\alpha-\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha$$

$$\simeq\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ(\sigma\circ\alpha-\Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha)\simeq p^m_{\tilde{\Omega}W}\circ\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}i)\circ H^\sigma_m(\alpha)$$

で与えられ、$p^m_{\tilde{\Omega}W*}$ は単射であるので本質的には $\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}i)\circ H^\sigma_m(\alpha)$ である。　ここで $m\geq1$ で $\tilde{\Omega}i:\tilde{\Omega}X\hookrightarrow\tilde{\Omega}W$ は $e-1$ 連結かつ $\tilde{\Omega}W$ は連結であるので、$\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}i)$ は $e+1$ 連結となる。　従って $\tilde{E}^{m+1}(\tilde{\Omega}i)_*$ も単射であり、$\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}i)\circ\sigma$ が W に extend できるための障害は $H^\sigma_m(\alpha)$ で与えられる。　『終り』

定理 4.21 (I [55]) *CW* 複体の族 $\{Q_\ell\,;\,\ell\geq2$ は素数$\}$ で次を満たすものが存在する。

$$\begin{cases} \mathrm{cat}(Q_2\times S^n)=\mathrm{cat}(Q_2) \quad \text{for all } n\geq 1, \\ \mathrm{cat}(Q_\ell\times S^n)=\mathrm{cat}(Q_\ell) \quad \text{for all } n\geq 2 \text{ and } \ell>2. \end{cases}$$

『$\ell=2$の場合の略証』　$\sigma\in\pi_{15}(S^8)$をHopf不変量1を与える元とすると、$H_1(\sigma)=1\in\pi_{15}(\tilde{\Omega}S^8{*}\tilde{\Omega}S^8)\cong\mathbb{Z}$である。　S^{15}に対するHopf不変量1の元の非存在は、Toda [118]によって証明され，特に$[\iota_{15},\iota_{15}]\in\pi_{29}(S^{15})$は懸垂準同型$E:\pi_{28}(S^{14})\to\pi_{29}(S^{15})$の像に含まれる自明でない元である。　問題4.15に挙げた事実から$H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])=i_*[\iota_{15},\iota_{15}]$（$i:S^{15}\hookrightarrow\tilde{\Omega}S^8{*}\tilde{\Omega}S^8$はbottom cellの包含写像）となり、$\tilde{\Omega}S^8{*}\tilde{\Omega}S^8$は無限個の球面の一点和にホモトピー同値であるから$i_*$はsplit monoである。　従って$H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])\neq 0$であり、Berstein-Hiltonの定理から$Q_2=S^8\cup_{\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]}e^{30}$は$\mathrm{cat}(Q_2)=2$をみたす。

一方でWhitehead積の懸垂は必ず0になることから、$\Sigma([\iota_{15},\iota_{15}])=0$である。　また$Q_2{\times}S^n = Q_2{\times}\{*\}\cup S^8{\times}S^n\cup_{\psi_n}e^{n+30}$というCW分割を考えると$\mathrm{cat}(Q_2{\times}\{*\}\cup S^8{\times}S^n)=2$であり、$\psi_n$は$\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]$と$\iota_n\in\pi_n(S^n)$の相対Whitehead積で与えられる。従って$\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = 3$となる為には、$H^S_2(\psi_n)$が0を含んではならない。　しかし$H^S_2(\psi_n)\ni S^{n-1}{*}H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])=0$（$n\geq 1$）となるので、$\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n)=\mathrm{cat}(Q_2)=2$（$n\geq 1$）が成立する。　『終り』

$\mathbb{C}P^3$はS^4上のS^2束の構造を持つことに注意して、うまく自明でないco-Hopf写像$\beta:S^q\to S^3$を選び、$\Sigma\beta:S^{q+1}\to S^4$をsmooth mapで近似する。　$E(\beta)$を$\Sigma\beta$による$\mathbb{C}P^3$の引き戻しとして定義すれば、$E(\beta)=S^2\cup_{\eta\circ\beta}e^{q+1}\cup_{\psi(\beta)}e^{q+3}$となる。　これに対して$H^S_3$の計算を自明でないToda bracket（cf. [119]）を用いて実行することで次の二つの定理を得る。

定理 4.22 (I [58], L-S-V [76]) 単連結な閉多様体Nで次を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(N\smallsetminus\{*\})=\mathrm{cat}(N).$$

定理 4.23 (I [58]) 単連結な閉多様体Mで次の条件を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(M{\times}S^n)=\mathrm{cat}(M)\quad \textit{for all } n\geq 2,$$

予想 4.24 (I [55]) $n(X)=\mathrm{Max}\{n\mid \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1\ \textit{or}\ n{=}0\}$は次をみたす。

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n)=\begin{cases}\mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n\leq n(X),\\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n>n(X).\end{cases}$$

参考文献

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of the Hopf invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20–104.

[2] M. Arkowitz, *Co-H-spaces*, Handbook of algebraic topology, 1143-1173, North Holland, Amsterdam, 1995.

[3] M. Arkowitz and D. Stanley, *The cone length of a product of co-H-spaces and a problem of Ganea*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 735–742.

[4] H. Bass, *Projective modules over free groups are free*, J. of Algebra **1** (1964), 367–373.

[5] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, Amsterdam,1968.

[6] M. Bendersky, *A functor which localizes the higher homotopy groups of an arbitrary CW-complex*, Lecture Notes in Math. 418, Springer Verlag, Berlin (1975), 13–21.

[7] I. Berstein, *Homotopy mod C of spaces of category 2*, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 9–14.

[8] I. Berstein and E. Dror, *On the homotopy type of non-simply connected co-H-space*, Ill. Jour. Math. **20** (1976), 528–534.

[9] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **12** (1968), 421–432.

[10] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.

[11] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1117–1122.

[12] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math. 304, Springer Verlag, Berlin (1972).

[13] A. Borel, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Lect. Notes in Math. **36**, Springer Verlag, Berlin (1967).

[14] M. Brittenham, *Life gets better as n gets larger (topology-style) The (continuing) saga of the Poincare Conjecture*, http://www.math.unl.edu/ mbritten/ldt/poincare.html.

[15] F. E. Browder, *Problems of present day mathematics*, in "Mathematical developments arising from Hilbert problems" (De Kalb, IL, 1974), 35–79, AMS, Providence, RI, 1976.

[16] W. Browder, *Torsion in H-spaces*, Ann. of Math. **74** (1961), 24–51.

[17] P. M. Cohn, *Free ideal rings*, J. of Algebra **1** (1964), 47–69.

[18] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95–111.

[19] O. Cornea, *There is just one rational cone-length*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 835–848.

[20] O. Cornea, Strong LS category equals cone-length, Topology **34** (1995), 377–381.

[21] M. C. Crabb, J. R. Hubbuck and Kai Xu, *Fields of spaces*, Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 1 (1990), 241–254, LMS. Lecture Note 175, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[22] M. Clapp and L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and minimal coverings with contractible sets*, Manuscripta Math. 58 (1987), no. 1-2, 37–45.

[23] M. Clapp and D. Puppe, *Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 603–620.

[24] C. R. Curjel, *A note on spaces of category* ≤ 2, Math. Z. **80** (1963), 293–299.

[25] C. R. Curjel, On the homology decomposition of polyhedra, Illinois J. Math. **4** (1963), 121–136.

[26] B. Eckmann, P. Hilton, *Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe*, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 2054–2056.

[27] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. **65** (1957), 517-518.

[28] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana **37** (1992), 151–161.

[29] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, GTM series **205**, 2001.

[30] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato and D. Tanré, *Hopf-Ganea invariants and weak LS category*, Top. Appl. **115** (2001), 305–316.

[31] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato, J. Strom and D. Tanré, *The Lusternik-Schnirelmann category of* $Sp(3)$, Trans. AMS., to appear.

[32] A. Floer, *Cuplength estimates on Lagrangian intersections*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 335–356.

[33] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575–611.

[34] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42**, (1941), 333–370.

[35] R. H. Fox, *Free differential Calculus I*, Ann. of Math. **57** (1953), 547–560.

[36] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), 933–1048.

[37] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[38] T. Ganea, *Cogroups and suspensions*, Invent. Math. **9** (1970), 185–197.

[39] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, Symposium on Algebraic Topology, Lect. Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin (1971) 13–22.

[40] W.J. Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Ill. J. Math. **12** (1968), 421-432.

[41] M. Ginsburg, *On the Lusternik-Schnirelmann Category*, Ann. of Math. **77** (1963), 538–551.

[42] D. Gonçalves, *Mod* 2 *homotopy associative H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 198–216.

[43] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña, *Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Topology **31** (1992), 791–800.

[44] H. W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 164–168.

[45] K. P. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, Topology **30** (1991), 205–214.

[46] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *On co-H-spaces*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 1–14.

[47] Y. Hirashima, *A convenient axiom to convenient categories for homotopy theory*, Math. J. Okayama U. **42** (2000) 115–122.

[48] H. Hofer, *Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 465–499.

[49] J. R. Hubbuck, *On homotopy-commutative H-spaces*, Topology **8** (1969) 119–126.

[50] J. R. Hubbuck, *Two examples on finite H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 282–291.

[51] J. R. Hubbuck, *Products with the seven sphere and homotopy associativity*, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. Ser. A **40** (1986), 91–100.

[52] J. R. Hubbuck, *Self maps of H-spaces*, Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 105–110, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 139, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[53] J. R. Hubbuck and N. Iwase, *A p-complete version of the Ganea conjecture on co-H-spaces*, Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Lusternik-Schnirelmann Category in the New Millennium (Mt.Holyoke, 2001), *Cont. Math.*, **316** (2003), 127–133.

[54] N. Iwase, "On the ring structure of $K^*(XP^n)$" (in Japanese), Master thesis (1983), Kyushu U.

[55] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. Lon. Math. Soc., **30** (1998), 623–634.

[56] N. Iwase, *Co-H-spaces and the Ganea conjecture*, Topology **40** (2001), 223–234.

[57] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category*, GSM Kyushu U. preprint series **1998-13** (1998).

[58] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 695–723.

[59] N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere*, Topology, **42** (2003), 701–713.

[60] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Proceeding of Arcata conference, Lec. Not. Math. 1370, (1989), 193–220.

[61] N. Iwase and M. Mimura, *L-S categories of simply-connected compact simple Lie groups of low rank*, Proc. of the Skye Conference, to appear.

[62] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of $Spin(7)$*, Topology and its appl., to appear.

[63] N. Iwase, S. Saito and T. Sumi, *Homology of the universal covering space of a co-H-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4837–4846.

[64] I. James, *The topology of Stiefel manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, London Math. Soc. Lec. Notes **24**.

[65] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[66] I. M. James, *Fibrewise Topology*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[67] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[68] I. James and W. Singhof, *On the category of fiber bundles, Lie groups, and Frobenius maps*, Contemp. Math. **227** (1999), 177-189.

[69] B. Jessup, *Rational L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655-660.

[70] D. M. Kan, *On monoids and their dual*, Bol. Soc. Math. Mex. **3** (1958), 52–61.

[71] J. Klein, R. Schwänzl and R. M. Vogt, *Comultiplication and suspension*, Topology Appl. **77** (1997), 1–18.

[72] K. Komatsu, *A boundary link is trivial if the Lusternik-Schnirelmann category of its complement is one*, Osaka J. Math. **29** (1992), 329–337.

[73] K. Komatsu and T. Matumoto, *Knot-link theory and Lusternik-Schnirelmann category*, Algebra and topology 1992 (Taejŏn), 211–216, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn, 1992.

[74] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. **49** (1998), 1–74.

[75] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les Problèmes variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[76] P. Lambrechts, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, Trans. AMS. **354** (2002), 3973–4013.

[77] S. Mac Lane, "Homology", Springer Verlag, Berlin, 1963.

[78] S. MacLane, "Categories for the working mathematician", Springer Verlag, Berlin, GTM series **5**, 1971.

[79] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 103–107.

[80] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement. II*, Topology **34** (1995), 177–184.

[81] J. P. May, *Fiberwise localization and completion*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 127–146.

[82] J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, Math. Lec. Ser. 12, Publish or Perish Inc., Wilmington Delaware (1985).

[83] M. Mimura, "Hopf Spaces" (In Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1986.

[84] L. Montejano, *A quick proof of Singhof's* $\mathrm{cat}(M \times S^1) = \mathrm{cat}(M)+1$ *theorem*, Manuscripta Math. **42** (1983), 49–52.

[85] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category: a geometric approach*, Geometric and algebraic topology, 117–129, Banach Center Publ., 18, PWN, Warsaw, 1986.

[86] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds*, Topology Appl. **27** (1987), 29–35.

[87] L. Montejano, *Geometric category and Lusternik-Schnirelmann category*, Geometric topology and shape theory (Dubrovnik, 1986), 183–192, Lecture Notes in Math., 1283, Springer, Berlin, 1987.

[88] L. Montejano, *Categorical and contractible covers of polyhedra; some topological invariants related to the Lusternik-Schnirelmann category*, Conference on Differential Geometry and Topology (Sardinia, 1988). Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **58** (1988), 177–264.

[89] N. Oda, *Pairings and copairings in the category of topological spaces*, Publ. RIMS Kyoto U. **28** (1992), 83–97.

[90] S. Oka, *The stable homotopy Groups of Spheres I*, Hiroshima Math. J. **1** (1971), 305–337.

[91] J. Oprea and Y. Rudyak, *On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 673–678.

[92] J. Oprea and Y. Rudyak, *Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Lusternik-Schnirelmann Category in the New Millennium (Mt.Holyoke, 2001), *Cont. Math.*, to appear.

[93] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[94] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[95] Y. Rudyak, *On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points)*, Math. Z. **230** (1999), 659–672.

[96] S. Saito, *Notes on Co-H-spaces*, J. Fac. Sci. Shinshu U. **6** (1971), 101–106.

[97] S. Saito, *On higher coassociativity*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 589–617.

[98] M. Sakai, *A proof of the homotopy push-out and pull-back lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2461–2466.

[99] H. Scheerer, *On rationalized H- and co-H-spaces*, Manuscripta Math. **51** (1984), 63–87.

[100] P. A. Schweizer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337–355.

[101] C. S. Seshadri, *Triviality of vector bundles over the affine space K^2*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **44** (1958), 456–458.

[102] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups*, Math. Z. **145** (1975), 111–116.

[103] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups II*, Math. Z. **151** (1976), 143–148.

[104] W. Singhof, *Generalized higher order cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Math. Z. **162** (1978), 7–26.

[105] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[106] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n+1$*, Topology, **39** (2000), 985–1019.

[107] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292.

[108] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 293–312.

[109] J. D. Stasheff, *H-spaces from a Homotopy Point of View*, Lecture Notes in Math. 161, Springer Verlag, Berlin (1970).

[110] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Annals of Mathematical Studies **50**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962).

[111] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhauser, Basel, 2001.

[112] M. Sugawara, *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama U. **5** (1956/57), 109–129.

[113] M. Sugawara, *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama U. **7** (1957), 123–149.

[114] D. Sullivan, "Geometric Topology, Part I", Localization and Galois Symmetry (3.1-4.42), M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[115] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category*, Invent. Math. **6** (1968), 197–244.

[116] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math., **22**(1970), 175–180.

[117] H. Toda, *Topology of standard path spaces and homotopy theory. I*, Proc. Japan Acad. **29** (1953), 299–304.

[118] H. Toda, *Non-existence of mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant 1*, J. Inst. Polytech. Osaka City U. Ser. A **8** (1957), 31–34.

[119] H. Toda, "Composition methods in homotopy groups of spheres", Princeton U. Press, Princeton N.Y., Ann. of math. studies **49**, 1962.

[120] G. Toomer, *Two applications of homology decompositions*, Canad. J. Math. **27** (1975), 323–329.

[121] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, Topology Appl. **105** (2000), 187–200.

[122] L. Vandembroucq, *Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 1239–1258.

[123] K. Varadarajan, *The Finiteness Obstruction of C.T.C. Wall*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[124] C. T. C. Wall, *An obstruction to finiteness of CW-complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 269–270.

[125] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: "Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", Georges Thone, Liége; 89–95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[126] G. W. Whitehead, "Elements of Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, GTM series **61**, 1978.

[127] K. Xu, *Space of rings*, PhD Thesis at University of Aberdeen (1989).

[128] A. Zabrodsky, "Hopf spaces", Notas de Matemática (59), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, **22** (1976).

5 Appendix

5.1 多様体の L-S category

(1) $\mathrm{cat}(\mathbb{F}P^n) = n,\ n{\geq}0\ (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{H})$. (2) $\mathrm{cat}(\mathcal{O}P^n) = n,\ 0{\leq}n{\leq}2$.

(3) $\mathrm{cat}(M^2) = \begin{cases} 1,\ \pi_1(M^2) = 0, \\ 2,\ \pi_1(M^2) \neq 0. \end{cases}$ (4) $\mathrm{cat}(M^3) = \begin{cases} 1,\ \pi_1(M^3) = 0, \\ 2,\ \pi_1(M^3) = \mathbb{Z}, \\ 3,\ \text{otherwise.} \end{cases}$

(5) $\mathrm{cat}(S^n) = 1,\ n{\geq}1$. (6) (Rudyak) $\mathrm{cat}(L^n(p)) = n,\ n{\geq}1, p{>}1$.

(7) (Rudyak) Symplectic 多様体 (M^{2n}, ω) が $\pi_2(M){=}0$ をみたせば $\mathrm{cat}(M^{2n}) = 2n,\ n{\geq}1$.

(8) (I) S^{t+1} 上の S^r 束 E と $Q = E \smallsetminus \{pt\} \simeq S^r \cup_\alpha e^{t+1}$ の L-S カテゴリ数

r	t	α	$\mathrm{cat}(Q{\times}S^n)$	$\mathrm{cat}(Q)$	$\mathrm{cat}(E)$	$\mathrm{cat}(E{\times}S^n)$
$r{=}1$	$t{=}0$		2	1	2	3
	$t{=}1$	$\alpha{=}\pm1$	1	0	1	2
		$\alpha{=}0$	2	1	2	3
		$\alpha{\neq}0, \pm1$	3	2	3	4
	$t{>}1$		2	1	2	3
$r{>}1$	$t{<}r$		2	1	2	3
	$t{=}r$	$\alpha{=}\pm1$	1	0	1	2
		$\alpha{\neq}\pm1$	2	1	2	3
	$t{>}r$	$H_1(\alpha){=}0$	2	1	2	3
		$H_1(\alpha){\neq}0\ \&\ \Sigma^r H_1(\alpha){=}0$	3 or 2	2	2	3
		$\Sigma^r H_1(\alpha){\neq}0$			3	3 or 4

(9) (Singhof, James, FGST, IM, IMN) コンパクト単純 Lie 群の L-S カテゴリ数

階数	1		2		3		4		$5 \leq n$	
A_n	$SU(2)$	1	$SU(3)$	2	$SU(4)$	3	$SU(5)$	4	$SU(n{+}1)$	n
	$PU(2)$	3	$PU(3)$	6	$PU(4)$	9	$PU(5)$	12	$PU(n{+}1)$	?
B_n	$Spin(3)$	1	$Spin(5)$	3	$Spin(7)$	5	$Spin(9)$	9	$Spin(2n{+}1)$	?
	$SO(3)$	3	$SO(5)$	8	$SO(7)$	11	$SO(9)$	20	$SO(2n{+}1)$	?
C_n	$Sp(1)$	1	$Sp(2)$	3	$Sp(3)$	5	$Sp(4)$	?	$Sp(n)$	?
	$PSp(1)$	3	$PSp(2)$	8	$PSp(3)$	?	$PSp(4)$	?	$PSp(n)$	?
D_n					$Spin(6)$	3	$Spin(8)$	6	$Spin(2n)$	?
					$SO(6)$	9	$SO(8)$	12	$SO(2n)$	?
					$PO(6)$	9	$PO(8)$	18	$PO(2n)$	?
例外			G_2	4			F_4	?	E_n	?

(10) (Singhof) 複素 Stiefel 多様体 $W_{n,r} = U(n)/U(n{-}r)$ は $\mathrm{cat}(W_{n,r}) = r$ をみたす。

5.2 L-S の猫たちに関連した（私的な）問題

問題 5.1 (Ganea) 多様体の *L-S* の猫の値を計算せよ。

問題 5.2 $\mathrm{Acat}(M) = \mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$ を満たす多様体 M のクラスを決定せよ。

問題 5.3 任意の *compact Lie* 群 G に対して $\mathrm{Acat}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

定理 5.4 (Cornea) $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le 2\mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\}$ となる。

問題 5.5 $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\} + 1$ となるか？

問題 5.6 $\underleftarrow{\mathrm{holim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\} + 1$ となるか？

定義 5.7 $\mathrm{cat}_p(X) = \mathrm{Min}\{m \ge 0\,;\, \exists_{\sigma:X\to P^m(\tilde{\Omega}X)}\ \textit{s.t.}\ \ e^X_m{\circ}\sigma$ は p-同値 $\}$ とおく。

問題 5.8 $\mathrm{cat}_p(X) = \mathrm{cat}(X_{(p)})$ となる為には X が単連結であることが必要十分か？

定理 5.9 (Cornea) $\mathrm{cat}(X) \le 2{\cdot}\,\mathrm{Max}\{\mathrm{cat}_p(X)\,;\, p \ge 0$ は素数 $\}$ となる。

問題 5.10 $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}_p(X)\,;\, p \ge 0$ は素数 $\} + 1$ となるか？

定義 5.11 $n(X) = \mathrm{Max}\{n \ge 0\,;\, \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1\ \textit{ or }\ n{=}0\}$ とおく。

定理 5.12 (I) 任意の $n{\ge}0$ に対して $2n \le n(X) \le 2n{+}1$ を満たす X が存在する。

問題 5.13 常に $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \left\{\begin{array}{ll}\mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n \le n(X),\\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n > n(X).\end{array}\right\}$ が成立するのか？

定理 5.14 (Roitberg) 有限型の無限次元複体 X と Y で、同じ *Mislin genus* を持ち異なる *L-S* の猫の値を取るものが存在する。

問題 5.15 有限複体 X と Y が、同じ *Mislin genus* を持つならば *L-S* の猫の値も同じか?

定義 5.16 $\lambda\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)^*\ :\ K^*(X)\ \to\ K^*(\tilde{P}^m(\tilde{\Omega}X))\ \text{は}\ \lambda\textit{-rings}\\ \text{の間の}\ \textit{split mono}\end{array}\right\}$

問題 5.17 コンパクト *Lie* 群 G に対して、$\lambda\mathrm{cat}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

5.3 co-Hopf 空間 = Hopf 空間の双対 = L-S の猫の値が 1 の空間

基点を two-sided homotopy unit とする連続な積を持つ空間を Hopf 空間と言い、またその積を Hopf 構造という。 Hopf 空間に支配された空間はまた Hopf 空間であり、従って Lie 群に支配された空間は Hopf 空間である。 特に $SO(8) \approx S^7 \times SO(7)$ であり S^7 は Hopf 空間である。

事実 5.18 連結な CW 複体が *Hopf* 構造を持つ為には、適当なループ空間に支配されることが必要十分である。

定理 5.19 (I. James) 連結な CW 複体が *Hopf* 構造をもてば、その構造は *two-sided homotopy inversion* をもつ。

定理 5.20 (A. Zabrodsky) 連結な CW 複体が *Hopf* 構造をもてば、その構造は *two-sided strict unit* をもつものに取り替えられる。

従って連結 CW 複体では、Hopf 構造を持つことと $\tilde{A}_2$-構造をもつことは同値である。

定理 5.21 (J. F. Adams) 球面 S^n が *Hopf* 構造を持つ為には n が $0, 1, 3, 7$ のいづれかであることが必要十分である。

定理 5.22 (W. Browder) 連結な有限 CW 複体が *Hopf* 構造をもてば、その空間はいくつかの S^1 と、$H^1 = 0$ を満たす連結な有限 CW 複体の直積にホモトピー同値である。

定理 5.23 (J. Hubbuck) 連結な有限 CW 複体が *homotopy abelian* な *Hopf* 構造をもてば、その空間は適当な次元の *torus* にホモトピー同値である。

定理 5.24 (J. Lin, R. Kane) 単連結な有限 CW 複体 X が *Hopf* 構造を持てば、そのループ空間 $\tilde{\Omega}X$ はホモロジー群に *torsion* 元を持たない。 さらに X は複素 K 群にも *torsion* 元を持たない。

予想 5.25 連結 CW 複体では、A_m-形式を持つことと $\tilde{A}_m$-形式をもつことは、*up to homotopy* で同値である。

基点を two-sided homotopy unit とする連続な co-積を持つ空間を Hopf 空間と言い、またその co-積を co-Hopf 構造という。　するとやはり co-Hopf 空間に支配された空間はまた co-Hopf 空間である。　従って懸垂空間に支配された空間は co-Hopf 空間である。

さて、上記の諸事実の双対はどうなるのであろうか？

定理 5.26 (Ganea) 連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持つ為には、適当な懸垂空間に支配されることが必要十分である。

問題 5.27 連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、その空間は *homotopy inversion* をもつ *co-Hopf* 構造を持つだろうか？

事実 5.28 自明でない連結な CW 複体の *co-Hopf* 構造は *strict unit* を決してもたない。

事実 5.29 *co-Hopf* 構造と *Hopf* 構造を共に持つ空間には S^1, S^3, S^7 があり、これらに限る。

問題 5.30 連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、その空間はいくつかの S^1 と、$\pi_1 = 0$ を満たす連結な有限 CW 複体の一点和にホモトピー同値だろうか？

最後の問題 5.30 は、その肯定的な解答が期待され co-Hopf 空間に関する Ganea 予想と呼ばれ、問題 5.27 と問題 5.30 は同値であることが直ちに分かる。

定理 5.31 (Berstein-Dror, Hilton-Mislin-Roitberg) 上記の問題 *5.27* と問題 *5.30* は、*co-Hopf* 構造についての適当な（結合性などの）条件のもとで成立する。

定理 5.32 (Henn, Hubbuck-I) いかなる素数 $p \geq 0$ に対しても、上記の問題 *5.27* と問題 *5.30* は、空間を *almost* p-完備化すれば成立する。

定義 5.33 *co-Hopf* 空間 X のホモロジー群が次元 1 と $n+1, \cdots, n+r$（n は自然数）に集中し、$H_{n+r}(\tilde{X})$ がねじれ元を持たないとき、安定次元が r 以下 であるという。

定理 5.34 (Saito-Sumi-I, I) 安定次元 2 までの連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、問題 *5.27* と問題 *5.30* は成立するが、安定次元 5 の連結な CW 複体でこれらを満たさないものが存在する。　ただし、安定次元 3 と 4 については不明である。