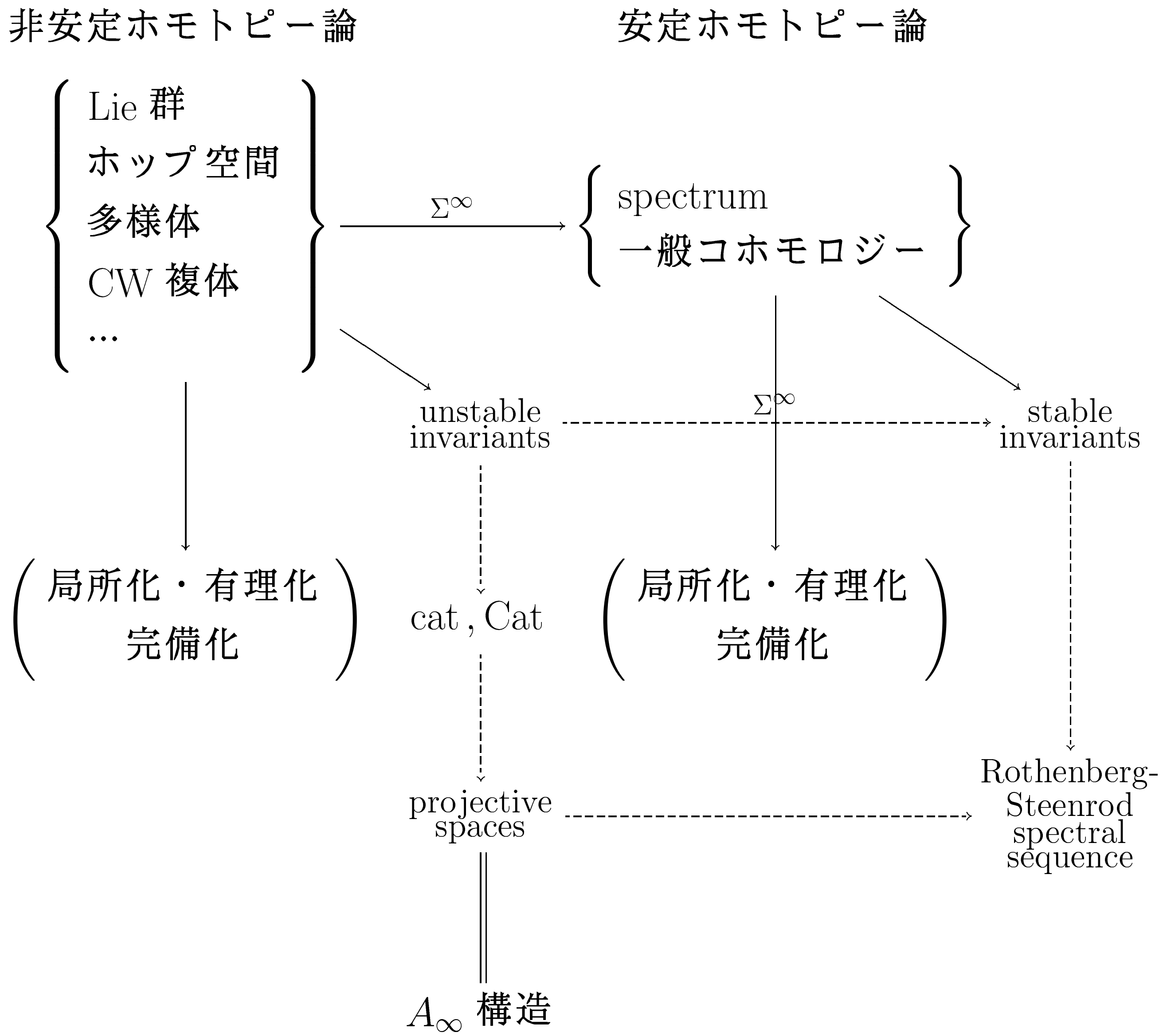
A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category

岩瀬 則夫 （九州大学数理学）

表題の話は、Lusternik と Schnirelmann により定義された（非安定）ホモトピー不変量 cat に関するものであり、定義・問題・性質・歴史などを述べた後、問題と stabilisation Σ^∞ の関係を明らかにする。



1 LS cat の定義

定義 1.1 位相空間 X に対して、ホモトピー不変量 $\mathrm{cat}\,(X)$ は次の様に定義される。

$$\mathrm{cat}\,(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \Big| \begin{array}{l} \exists\{U_0, ..., U_m : \text{ open in } X\} \\ X = \cup_{i=0}^{m} U_i, \text{ each } U_i \text{ is contractible } \underline{\textit{in}}\ X \end{array} \right\}$$

同じような形で定義される位相不変量 $g\mathrm{cat}\,(X)$ は、ホモトピー不変量ではない。*(R. H. Fox)*

$$g\mathrm{cat}\,(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \Big| \begin{array}{l} \exists\{U_0, ..., U_m : \text{ open in } X\} \\ X = \cup_{i=0}^{m} U_i, \text{ each } U_i \text{ is contractible} \end{array} \right\}$$

この $g\mathrm{cat}\,(X)$ をホモトピー不変量にしたものが次の Cat である。

$$\mathrm{Cat}\,(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \Big| \exists_{\{Y(\simeq X)\}} \text{ such that } g\mathrm{cat}\,(Y) = m \right\}$$

ホモトピー不変量 cat が定義された理由の一つが次の結果である。

定理 1.2 (Lusternik-Schnirelmann) 閉多様体 M 上の C^{∞} 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の特異点の個数は、$\mathrm{cat}\, M + 1$ 以上である。

これらの不変量について次の関係が知られている。

定理 1.3 (T. Ganea) $\mathrm{Cat}\, X - 1 \leq \mathrm{cat}\, X \leq \mathrm{Cat}\, X \leq g\mathrm{cat}\, X.$

2 Ganea の問題

問題 (T. Ganea, 1971)

1. 多様体の cat を計算せよ。
2. $\mathrm{cat}\, X \times S^n = \mathrm{cat}\, X + 1.$ これは正しいか？

…（中略）

4. 球面上の球面束の全空間の cat をバンドルの特性写像のホモトピー不変量を用いて書き表せ。

…（中略）

10. $\mathrm{cat}\, X \leq 1$ をみたす空間 X は、双対積を持つコホップ空間となるが、これらは一般に S^1 のいくつかの一点和と単連結な空間の一点和に空間としてホモトピー同値となるか？

…（後略 - 全１５題）

注 2.1 この中で問題 *2* は *LS category* の古典的な話題の一つとして、また問題 *10* はコホップ空間の古典的な話題の一つとして、共に正しいと信じられ、各々の領域で *Ganea conjecture* と呼ばれていた。

3　LS cat の性質

定理 3.1 (I. M. James) X が $(d-1)$連結のとき $\mathrm{cat}\,X \leq \frac{\dim X}{d}$.

定理 3.2 (I. Berstein and P. J. Hilton) 写像 $f: S^q \to S^r$ による接着空間 $Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ に対し、$\mathrm{cat}\,Q = \begin{cases} 1, & H_1(f) = 0 \\ 2, & H_1(f) \neq 0 \end{cases}$

ただし、$H_m : \pi_q(X; A) \to \pi_q(\prod^{m+1}(X), T^{m+1}(X); A)$ は Berstein-Hilton の Hopf不変量であり、$T^m(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) | \exists_i x_i = *\}$。

定理 3.3 (G. W. Whitehead) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$ の m 個の元の積が *0* でないならば、$\mathrm{cat}\,X \geq m$.

例 3.4　*1)* $\mathrm{cat}\,\{*\} = 0$. より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}\,D = 0$.

2) $\mathrm{cat}\,S^n = 1$. より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}\,\Sigma V \leq 1$.

3) $\mathrm{cat}\,T^n = n$, $\mathrm{cat}\,U(n) = n$, $\mathrm{cat}\,Sp(1) = 1$, $\mathrm{cat}\,Sp(2) = 3$, $\mathrm{cat}\,G_2 = 4$, $\mathrm{cat}\,Spin(3) = 1$, $\mathrm{cat}\,Spin(4) = 2$, $\mathrm{cat}\,Spin(5) = 3$, ...

4) 空間 X が空間 Y を支配すれば、$\mathrm{cat}\,X \geq \mathrm{cat}\,Y$.

5) ファイバー空間 (E, p, B, F) に対し $\mathrm{cat}\,E \leq \mathrm{cat}\,F \cdot \mathrm{cat}\,B + \mathrm{cat}\,F + \mathrm{cat}\,B$.

6) $\mathrm{cat}\,X \times Y \leq \mathrm{cat}\,X + \mathrm{cat}\,Y$. 特に $\mathrm{cat}\,X \times S^n = \mathrm{cat}\,X$ *or* $\mathrm{cat}\,X + 1$.

4　最近の進展から

有理ホモトピー論における cat を用いた Jessup による Ganea 予想についての結果を Hess が改良し、有理ホモトピー論の世界では Ganea 予想が正しいことが証明された。

定理 4.1 (B. Jessup, K. Hess) $\mathrm{cat}_0 X \times S^n = \mathrm{cat}_0 X + 1,\ n \geq 2.$ ただし、cat_0 は cat の有理化である。

また Singhof による古典的な結果を Rudyak が改良し、ある種の多様体の族に対して、Ganea 予想が正しいことが分かった。

定理 4.2 (W. Singhof, Y. B. Rudyak) その次元と cat の値に関するある不等式を満たす多様体については *Ganea* 予想は正しい。

5　私の方法

ホップ空間の原始性の議論においては、空間の filtration を考えることが有効であった。

ここでもその考え方を踏襲し、filtration としてループ空間の A_∞ 構造に付随する射影空間による filtration を考え、Ganea 予想に対する criterion を与えることを考えた。

6　A_∞ 構造

空間 X に対してそのループ空間 ΩX は、A_∞ 構造をもつ。すなわち、次のような quasi-fibrations $\{p_m^{\Omega X}\}$ からなる梯子がとれる。

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, hook, "*"] \arrow[d, "p_1^{\Omega X}"] & E^2(\Omega X) \arrow[r, hook, "*"] \arrow[d, "p_2^{\Omega X}"] & \cdots \arrow[r, hook, "*"] & E^m(\Omega X) \arrow[r, hook, "*"] \arrow[d, "p_m^{\Omega X}"'] & E^{m+1}(\Omega X) \arrow[r, hook, "*"] \arrow[d, "p_{m+1}^{\Omega X}"'] & \cdots \arrow[r, hook, "*"] & E^\infty(\Omega X) \arrow[d, "p_\infty^{\Omega X}"'] \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^1(\Omega X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^{m-1}(\Omega X) \arrow[r, hook] & P^m(\Omega X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^\infty(\Omega X)
\end{tikzcd}$$

このような梯子の存在は、ループ空間 ΩX に対する次の高次結合性 $\{M_m^{\Omega X}\}_{m\geq 1}$ の存在と同値であり、$\{M_m^{\Omega X}\}_{m\geq 1}$ に付随する梯子が、その中である種の普遍性をもつ。(J. D. Stasheff)

$$M_m^{\Omega X} : K_m \times \prod^m (\Omega X) \to \Omega X, (M_1^{\Omega X} = 1_{\Omega X}),$$

ただし、$K_m = \{(t_1, t_2, ..., t_m) | \sum_{i=1}^k t_i \leq k-1, \sum_{i=1}^m t_i = m-1\}$.

注 6.1 これに対応して、ループ写像 $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ に対する A_∞ 構造は上の梯子と可換な写像の組として与えられ、それは、次の高次結合性 $\{F_m^{\Omega f}\}_{m\geq 1}$ の存在と同値である。*(I)*

$$F_m^{\Omega f} : J_m \times \prod^m (\Omega X) \to \Omega Y, (F_1^{\Omega f} = \Omega f),$$

ただし、$J_m = \{(t_1, t_2, ..., t_m) | \sum_{i=1}^k t_i \leq 2k-1, \sum_{i=1}^m t_i = 2m-1\}$.

7 高次のホップ不変量

高次のホップ普遍量は、高次結合性を与えるホモトピーの存在に対する障害として定義される、次のような準同型である。

$$H_m : [\hat{E}^{m+1}(G), P^m(G)] \to [\hat{E}^{m+1}(G), \hat{E}^{m+1}(\Omega P^m(G))]$$

ただし、$\hat{E}^{m+1}(G)$ は G の $m+1$ 個の join であり、A_m 写像 $i^G_m : G \hookrightarrow \Omega P^m(G)$ は包含写像 $\iota : \hat{E}^{m+1}(G) \hookrightarrow \hat{E}^{m+1}(\Omega P^m(G))$ を誘導する。

予想 1 G が A_{m+1}-空間 となるためには、$H_m(f) = \iota$ となる f が存在することが必要かつ十分である。

定義 7.1 １） 懸垂空間 V を固定し、$\sigma(X)$ を $\mathrm{cat}\, X \leq m$ を与える構造（の一つ）とするとき、次の（非安定）ホップ不変量が定義される。

$$H^{\sigma(X)}_m : [V, X] \to [V, E^{m+1}(\Omega X)]$$

２） これは懸垂空間 V から 懸垂空間 $E^{m+1}(\Omega X)$ への写像のホモトピー集合に値を持ち、そのまま *stabilise* することができる。

$$\mathcal{H}^{\sigma(X)}_m : [V, X] \xrightarrow{H^{\sigma(X)}_m} [V, E^{m+1}(\Omega X)] \xrightarrow{\Sigma^\infty} \{V, E^{m+1}(\Omega X)\}$$

３） また、古典的なホップ不変量との仲立ちをするのが次の *crude* ホップ不変量である。

$$\begin{aligned}\bar{H}^{\sigma(X)}_m : [V, X] \xrightarrow{H^{\sigma(X)}_m} [V, E^{m+1}(\Omega X)] &\xrightarrow{\Sigma} [\Sigma V, \Sigma E^{m+1}(\Omega X)] \\ &\cong [\Sigma V, \Sigma\Omega X \wedge \cdots \wedge \Sigma\Omega X] \to [\Sigma V, X \wedge \cdots \wedge X].\end{aligned}$$

8　LS cat に関する Ganea 予想

次元が低ければ Ganea 予想は明らかに正しいので、次元に関する帰納法で Ganea 予想を証明することを考える。その為に必要となるのは、次元が一つ上がる時に cat がまた一つ上がるのはどういう場合かを確定することである。

定理 8.1 適当な条件の下では、接着空間 $W = X \cup_f C(V)$ $(f : V \to X)$ に対し次が成立する。

$$\operatorname{cat} W = \operatorname{cat} X + 1 \quad \textit{iff} \quad H_m^{\sigma(X)}(f) \neq 0.$$

ただし、$m = \operatorname{cat} X$.

定理 8.2 上の定理と同じ条件の下で、さらに $\operatorname{cat} W = \operatorname{cat} X + 1$ のとき、接着空間 $W = X \cup_f C(V)$ $(f : V \to X)$ に対し次が成立する。

$$\operatorname{cat} W \times S^n = \operatorname{cat} W + 1 \quad \textit{iff} \quad \Sigma^n H_m^{\sigma(X)}(f) \neq 0.$$

ただし、$m = \operatorname{cat} X$.

系 8.2.1 上の定理と同じ条件の下で、接着空間 $W = X \cup_f C(V)$ $(f : V \to X)$ に対し次の 2 条件は同値である。

a) *Ganea* 予想は正しい。

b) $H_m^{\sigma(X)}(f) \neq 0$ と $\mathcal{H}_m^{\sigma(X)}(f) \neq 0$ とは同値である。

9　問題の絞り込み

命題 9.1 *1)* g がコホップ写像なら、$H_m(f\circ g) \sim H_m(f)\circ g$.

2) h が *m-primitive* なら、$H_m(h\circ f) \sim E^{m+1}(\Omega h)\circ H_m(f)$.

系 9.1.1 $g : V' \to V$ がコホップ写像で、$h : V \to X$ がホップ不変量 1 を与える写像なら $f = h\circ g$ に対し、次が成立する。

1) $H_m(f) \sim g, \quad \mathcal{H}_m(f) \sim \Sigma^\infty g$.

2) $W = X \cup_f C(V')$ に対して次の 2 条件は同値である。

　a) Ganea 予想は正しい。

　b) $g \not\sim 0$ と $\Sigma^\infty g \not\sim 0$ は同値である。

10　反例の構成

$\iota_{15} : S^{15} \to S^{15}$ を恒等写像とし、その Whitehead 積 $[\iota_{15}, \iota_{15}] : S^{29} \to S^{15}$ をとる。この写像は non-trivial（S^{15} に対するホップ不変量 1 の写像の非存在）な懸垂写像である（H. Toda)。しかし、Whitehead 積は一般に一回でも懸垂をとると消えてしまう。そこで、（S^7 に対するホップ不変量 1 の）ホップ写像 $\sigma_8 : S^{15} \to S^8$ を用いて、

$$Q = S^8 \cup_f e^{30}, \quad f = \sigma_8\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]$$

とおくと、$H_1(f) \not\sim 0, \quad \Sigma^n H_1(f) \sim 0 \ (n \geq 1)$ が分かる。従って、

定理 10.1 $\operatorname{cat} Q = \operatorname{cat} Q \times S^n = 2$ *for all* $n \geq 1$.

11 局所化

さらに不変量 cat の素数 p における局所化を cat_p で表すと、

定理 11.1 *1)* $\mathrm{cat}_2 Q = \mathrm{cat}_2 Q \times S^n = 2$, *(*$n \geq 1$*).*

2) 奇素数 p については $\mathrm{cat}_p Q = 1, \quad \mathrm{cat}_p Q \times S^n = 2$, *(*$n \geq 1$*).*

従ってこの複体 Q は cat_2 に関する局所化された意味における Ganea 予想に対しても、その反例となる。同様に奇素数 p についても

定理 11.2 いかなる奇素数 p についても複体 Q_p が存在し、以下を満たす。

1) $\mathrm{cat}\, Q_p = \mathrm{cat}\, Q_p \times S^n = 2$ *(*$n \geq 2$*)* ただし $\mathrm{cat}\, Q_p \times S^1 = 3$*.*

2) $\mathrm{cat}_p Q_p = \mathrm{cat}_p Q_p \times S^n = 2$ *(*$n \geq 2$*)* ただし $\mathrm{cat}_p Q_p \times S^1 = 3$*.*

3) p と異なる素数 q に対しては $\mathrm{cat}_q Q_p = 1, \quad \mathrm{cat}_q Q_p \times S^n = 2$ *(*$n \geq 1$*).*

局所化された不変量と integral な不変量との間には次の非常に粗い関係が知られている。

定理 11.3 (O. Cornea) $\mathrm{cat}\, X \leq 2 \cdot \mathrm{Max}_p\{\mathrm{cat}_p X\} + 1$.

予想 2 $\mathrm{cat}\, X \leq \mathrm{Max}_p\{\mathrm{cat}_p X\} + 1$.

12 定理 8.1 & 定理 8.2 の証明

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H_m(f)"] & X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\sigma(X)"] & W \arrow[r, "q"] \arrow[dd, dashed, "\sigma'(W)"] & \Sigma V \\
E^{m+1}(\Omega X) \arrow[r, dashed, "p_m^{\Omega X}"'] \arrow[d, hook, "E^{m+1}(\Omega i)"] & P^m(\Omega X) \arrow[d, hook, "P^m(\Omega i)"] & & \\
E^{m+1}(\Omega W) \arrow[r, "p_m^{\Omega W}"'] & P^m(\Omega W) \arrow[r, hook, "\iota_m^{\Omega W}"'] & P^{m+1}(\Omega W) \arrow[r, "e_{m+1}^W"'] & W,
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
V{*}S^{n-1} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "H_m(f){*}1_{S^{n-1}}"] & W \cup X{\times}S^n \arrow[r, hook, "\hat{i}"] \arrow[d, "\sigma'(W){\times}1_{S^n}|_{W\cup X\times S^n}"] & W{\times}S^n \arrow[dd, dashed, "\sigma(W\times S^n)"'] \\
E^{m+1}(\Omega X){*}S^{n-1} \arrow[r, dashed, "\hat{p}_m^{\Omega X}"'] \arrow[d, hook, "E^{m+1}(\Omega i){*}j_{n-1}"] & P^{m+1}(\Omega W) \cup P^m(\Omega X){\times}S^n \arrow[d, hook] & \\
E^{m+1}(\Omega W){*}\Omega S^n \arrow[r, "\hat{p}_m^{\Omega W}"'] & P^{m+1}(\Omega W) \cup P^m(\Omega W){\times}S^n \arrow[r, hook] & P^{m+1}(\Omega W){\times}S^n
\end{tikzcd}
$$