場の理論における準古典近似と Wigner 測度

廣島文生 (九大数理)
joint with
Zied Ammari (Rennes I) and Marco Falconi (La Sapienza)

2019/8/31
夏の作用素論シンポジウム / 和歌山

1. はじめに
2. 有限次元=量子力学
3. 無限次元=場の量子論
4. 相互作用モデル
   - 古典的運動方程式の解と量子論的時間発展
   - Wigner 測度

有限自由度

▶P. L. Lions and T. Paul, Rev. Mat. Iberoamericana 9 (1993) 553-618.

無限自由度

▶Z. Ammari and F. Nier, Ann. Henri Poincaré 9 (2008) 1503-1574.

相互作用系

▶Z. Ammari. M. Falconi and F. Hiroshima, in preparation.

有限次元=QM

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{\text{プランク定数}}{2\pi}$$

- ▶ $\hat{P} = -i\hbar D_x$
- ▶ $\hat{Q} = x$
- ▶ CCR:

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = -i\hbar$$

Symplectic 構造

► $z = (p, q) \in T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$

► Phase translation:

$$T(z) = \exp(i(p\hat{Q} - q\hat{P}))$$

► Symplectic structure:

$$\sigma(z, z') = qp' - pq' = \Im(q + ip, q' + ip')_{\mathbb{C}^d}$$

► $T(z) = \exp\left(i\sigma\left(\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ \hbar D_x \end{bmatrix}\right)\right)$

► 代数的関係式

$$T(z)T(z') = e^{-i\hbar\sigma(z,z')/2}T(z + z')$$

$$T(z)^* = T(z)^{-1} = T(-z)$$

コヒーレント状態

- $z=(q,p)\in\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d$. BCH-formula

$$T(z)=e^{-i\hbar qp/2}e^{ip\hat{Q}}e^{-iq\hat{P}}$$

- $T(z)f(x)=e^{-i\hbar qp/2}e^{ipx}f(x-\hbar q)$
- ガウス関数

$$\phi_0(x)=(\pi\hbar)^{-d/4}\exp(-\frac{|x|^2}{2\hbar})$$

- $X\in\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d$

$$\phi_X=T(\frac{\sqrt{2}}{i\hbar}X)\phi_0$$

- コヒーレント状態

$$|\phi_X\rangle\langle\phi_X|\quad X\in\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d$$

- $\int_{\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d}|\phi_X\rangle\langle\phi_X|\frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}=1\!\!1_{L^2(\mathbb{R}^d)}$,i.e.,

$$f=\int_{\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d}(\phi_X,f)\phi_X\frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$$

Wigner 測度の気持ち

▶$\mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$

▶ フーリ変換

$$Ff(\xi) = \int_{\mathbb{C}^d} e^{-2i\pi\Re(\xi,z)} f(z)dz$$
$$F^{-1}f(z) = \int_{\mathbb{C}^d} e^{+2i\pi\Re(\xi,z)} f(\xi)d\xi$$

▶$\rho_\hbar = |\phi_X\rangle\langle\phi_X|$ は trace クラス

次を示すことは超簡単!

▶$\mathrm{Tr}[\rho_\hbar T(\sqrt{2}\pi Z)] = (\phi_X, T(\sqrt{2}\pi Z)\phi_X) \overset{\hbar\to 0}{\to} e^{2\pi i\Re(Z,X)} = F^{-1}[\delta_X](Z)$

▶ コヒーレント状態 $|\phi_X\rangle\langle\phi_X|$ の準古典近似で $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ 上のデルタ関数が現れる

Wick シンボル

► $B : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$

► $\sigma^{Wick}(B)(\cdot) : \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ を次で定める:

$$\sigma^{Wick}(B)(X) = (\phi_X, B\phi_X)$$

Theorem

B が *trace* クラスのとき

$$\mathrm{Tr}[B] = \int_{\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d} \sigma^{Wick}(B)(X) \frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$$

特に $\mathrm{Tr}[B] = 1$ のとき

$$\sigma^{Wick}(B)(X) \frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$$

は $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ 上の確率測度になる.

準古典測度=Wigner 測度

▶$(\rho_\hbar)_\hbar$ は非負な trace クラスの族で $\mathrm{Tr}[\rho_\hbar] = 1$ とする.

$$\sigma^{Wick}(\rho_\hbar)(X)\frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$$

は $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ 上の確率測度になる

Definition (Wigner 測度)

$\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $\sigma^{Wick}(\rho_\hbar)(X)\frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$ の $\hbar \downarrow 0$ の weak-$*$ 極限

$$\mu = \lim_{\hbar \to 0} \sigma^{Wick}(\rho_\hbar)(X)\frac{dX}{(2\pi\hbar)^d}$$

を Wigner 測度という.

注意 ▶μ は部分列のとり方による ▶μ は確率測度とは限らない

Wigner 測度の特徴づけ

Definition (Pure 状態)

$M = M(\rho_\hbar, \hbar \in (0,1))$ を Wigner 測度の集合とする. $\#M = 1$ のとき $(\rho_\hbar)_\hbar$ は pure という

N は調和振動子.

Theorem

$\exists \nu > 0$ *such that*

$$\mathrm{Tr}[N^\nu \rho_\hbar] \le C_\nu$$

とする. このとき

$$\rho_{\hbar_n} \to \nu \in M \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}[T(\frac{Z}{i\sqrt{2}})\rho_{\hbar_n}] = \int_{\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d} e^{i\sigma(x,Z)} d\mu(x)$$

例 $\rho_\hbar = |\phi_X\rangle\langle\phi_X|$ は pure で $M = \{\delta_X\}$.

純粋状態と時間発展

$H = -\hbar^2\Delta + V$ (V は十分に滑らか).

Theorem

(1) $(\rho_\hbar)_\hbar$ は *pure* で $M = \{\mu_0\}$ とする．このとき

$$\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H} \quad \hbar \in (0,1)$$

も *pure* である．

(2) $(\rho_\hbar(t))_{\hbar\in(0,1)}$ に対して $M = \{\mu_t\}$ とする．このとき
$\exists \Phi_t : \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ で

$$\mu_t = \Phi_t * \mu_0$$

と表されて $\Phi_t(x_0, \xi_0) = (x_t, \xi_t)$ は次をを満たす:

$$\text{古典的運動方程式}\begin{cases} \dot{x}_t = 2\xi_t \\ \dot{\xi}_t = -\nabla V \end{cases}$$

フォック空間

▶$\mathscr{H}$ はヒルベルト空間 e.g. $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

▶$\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty}[\otimes_s^n \mathscr{H}]$

▶$\Omega = 1 \oplus 0 \oplus, \ldots, \in \mathscr{F}$ フォック真空

▶ 生成消滅作用素 $a(f)$, $a^\dagger(g)$ は

$$a(f) : \otimes_s^n \mathscr{H} \to \otimes_s^{n-1} \mathscr{H}$$
$$a^\dagger(f) : \otimes_s^n \mathscr{H} \to \otimes_s^{n+1} \mathscr{H}$$

特に $a^\dagger(f)a(g) : \otimes_s^n \mathscr{H} \to \otimes_s^n \mathscr{H}$

▶CCR:

$$[a(f), a^\dagger(g)] = \hbar(\bar{f}, g)$$

▶$\{a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega\} \subset \mathscr{F}$ は稠密

第２量子化

▶ T の第 2 量子化:

$$\Gamma(T)a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega = a^\dagger(Tf_1)\cdots a^\dagger(Tf_n)\Omega$$

▶ $\Gamma(e^{itK}) = e^{it\exists d\Gamma(K)}$

▶ $\mathrm{d}\Gamma(K)a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega = \sum_{j=1}^n a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(Tf_j)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega$

▶ 個数作用素 $N = \mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})$

$$N\Omega = 0, \quad Na^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega = na^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega$$

▶ $[\mathrm{d}\Gamma(K), a(f)] = -a(Kf)$, $[\mathrm{d}\Gamma(K), a^\dagger(f)] = a^\dagger(Kf)$

コヒーレントベクトル

- 場の演算子:

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger(f) + a(\bar{f})) \sim x$$
$$\pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger(f) - a(\bar{f})) \sim -i\partial_x$$

- $W(f) = \exp(i\phi(f))$
- Weyl 関係式

$$W(f)W(g) = e^{-i\frac{\hbar}{2}\Im(f,g)}W(f+g)$$

- コヒーレントベクトル $W(\frac{f}{i\hbar})\Omega$

準古典測度=Wigner 測度

Theorem

$(\rho_\hbar)_\hbar$ を $\mathscr{F}$ の正規状態とする. $\exists\delta$ *such that* $\hbar$ に関して一様に

$$\mathrm{Tr}[\rho_\hbar N^\delta] \le C_\delta$$

が成立していると仮定する. このとき 0 への収束列 $\{\hbar_n\}$ に対して部分列 $\{\hbar_{n_k}\}$ と $\mathscr{H}$ 上の測度 μ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Tr}[\rho_{\hbar_{n_k}} b^W] = \int_{\mathscr{H}} b(z) d\mu(z)$$

例 $\rho_\hbar = |W(\frac{f}{i\hbar})\Omega\rangle\langle W(\frac{f}{i\hbar})\Omega|$ は pure で $M = \{\delta_f\}$.

時間発展

有限自由度と同様に

► $\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}\rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}$ として $(\rho_\hbar(t))_{\hbar\in(0,1)}$ に対して $\mathscr{H}$ 上の Wigner 測度 μ_t を構成して, $\mu_t = \Phi_t * \mu_0$ で Φ_t を調べる.

相互作用モデル

▶Nelson model

$$H_\hbar = (-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V)\otimes \mathbb{1} + \sqrt{\hbar} H_{\mathrm{I}} + \hbar \mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}.$$

は $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes \mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上に定義される.

▶ 相互作用項 H_{I}:

$$H_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(a^\dagger(k)\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}e^{-ikx} + a(k)\frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega(k)}}e^{-ikx}\right) dk$$

▶ 自由ハミルトニアン H_{f}:

$$H_{\mathrm{f}} = \mathrm{d}\Gamma(\omega) = \int \omega(k)a^\dagger(k)a(k)dk$$

ここで ω は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛け算作用素:

$$(\omega f)(k) = |k|f(k)$$

古典的運動方程式の解と量子論的時間発展

▶$a^\dagger(k) \to \bar{u}(k)$, $a(k) \to u(k)$ に置き換える:

▶$\mathscr{H} = \mathscr{H}(p,q,u,\bar{u}) =$

$$\frac{p^2}{2m} + V(q) + \int \omega(k)|u(k)|^2 dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{e^{-ikq}\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \bar{u}(k) + \frac{e^{ikq}\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega(k)}} u(k) \right) dk.$$

▶$\mathscr{H}$ を古典的なハミルトン関数と思って (q_t, p_t, u_t) の古典的な運動方程式を考える:

$$(N) \begin{cases} \dot{q}_t & = \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta p_t} & = \frac{p_t}{m} \\ \dot{p}_t & = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta q_t} & = -\nabla V(q_t) - \nabla W(q_t) \\ i\dot{u}_t(k) & = \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \bar{u}_t} & = \omega(k) u_t(k) + \frac{e^{-ikq_t}\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \end{cases}$$

▶$$\nabla W(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int -ik \frac{e^{-ikq_t}\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega}} \bar{u}_t(k) + ik \frac{e^{ikq_t}\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega}} u_t(k) dk.$$

$e^{-i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}\Phi_0^\hbar$ の挙動

- $W^\hbar(u)\Omega = e^{-i(\sqrt{2}/\sqrt{\hbar})\pi(u)}\Omega = e^{\frac{1}{\sqrt{\hbar}}(a^\dagger(u)-a(\bar{u}))}\Omega$
- $\phi^\hbar_{q,p}(x) = T(q,p)\phi_\hbar = \dfrac{1}{(\pi\hbar/4)^{3/4}}e^{i\frac{px-(\hbar/2)qD_x}{\hbar/2}}e^{-2|x|^2/\hbar}$
- (N) の解を (q_t, p_t, u_t) として相互作用系のコヒーレントベクトル

$$\phi^\hbar_{q_t,p_t}\otimes W^\hbar(u_t)\Omega = \Phi^\hbar_t$$

- $\Phi_0^\hbar$ の時間発展

$$e^{-i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}\Phi_0^\hbar$$

Theorem (Zied+Falconi+H.)

$$\|e^{-i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}\Phi_0^\hbar - e^{\frac{i}{\hbar}\beta_t}(\tau^\hbar_{q_t,p_t}\otimes W_\hbar(u_t))U_2(t,0)\Phi_0^\hbar\| \le \sqrt{\hbar}C.$$

ここで β_t と $U_2(t,0)$ は $\hbar$ によらない.

►$\rho_\hbar$ の $H_\hbar$ による時間発展

$$\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H}$$

に対して $L^2(\mathbb{R}^d) \oplus \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$ 上の Wigner 測度 μ_t を構成する

►$\mu_t = \Phi_t * \mu_0$

►$\Phi_t : L^2(\mathbb{R}^d) \oplus \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \to L^2(\mathbb{R}^d) \oplus \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d$

►$\Phi_t(u_0, x_0, \xi_0) = (u_t, x_t, \xi_t)$

►(u_t, x_t, ξ_t) の満たす方程式系を導く $\Longrightarrow$ 古典的な運動方程式

e.g.,

►PF 模型 $\Longrightarrow$ Maxwell 方程式