2020・7・6

位相群 G top. space

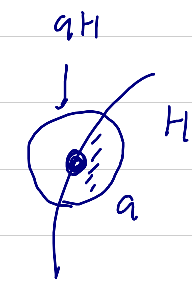
$G\times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy$, $G \longrightarrow G$, $x \longrightarrow x^{-1}$ が cont.

Thm 5.2 G, top. group $\Leftrightarrow$ $G\times G \to G$, $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$ が cont

Thm 5.3 G top. g. $G \supset H$ subgroup かつ open set
$\Rightarrow H = \bar{H}$

$\because$ $H \subset \bar{H}$ 自明
$H \supset \bar{H}$ を示す.

$\bar{H} \ni a$. aH は open, $aH \ni a$



$\therefore aH \cap H = \phi$

$aH \cap H \ni {}^{\exists}\xi = a\,{}^{\exists}y$ $y\in H$, $\xi \in aH$, $\xi \in H$

$\therefore \xi = ay$ $\therefore a = \xi y^{-1} \in H$ //

Ex $\quad GL(n,\mathbb{C})/SL(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}\setminus\{0\}$
$GL(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}\setminus\{0\} \times SL(n,\mathbb{C})$ } 位相群

$O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ 位相空間

G top. g. $\quad G \supset H$ subgroup

G/H に open sets を def したい.

$$\begin{array}{cccc} \pi : & G & \longrightarrow & G/H \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & xH \end{array} \quad \text{onto.}$$

$G/H \supset A$ が open $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(A)$ が G で open.

G/H は top. space になる.

Thm 5.4 $\quad \pi : G \to G/H$ は

onto, cont, "open" になる。

Remark: open map (= 開写像) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$f : X \to Y$, $A \subset X$ open ならば

$f(A)$ は Y で open.

onto $\rightarrow$ ok

cont. $\rightarrow$ $G/H \supset A$ ↙open $\quad \pi^{-1}(A)$ も open. //

open

$\because$) $G \supset N$ open "$\pi(N)$ が open" を示したい.

$\pi^{-1}(\pi(N))$ が open になることを示せばいい.

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(N)) \ni x &\Longleftrightarrow \pi(N) \ni \pi(x) \\
&\Longleftrightarrow {}^{\exists}yH = xH \quad ({}^{\exists}y \in N) \\
&\Longleftrightarrow xy^{-1} \in H \\
&\Longleftrightarrow x = \underbrace{xy^{-1}}_{H}\underbrace{y}_{N} \in HN
\end{aligned}$$

$$\pi^{-1}(\pi(N)) = HN = \bigcup_{a \in H} aN \quad \text{open} \quad //$$

G/H 位相空間としての性質のみみてきた.

$H = N$ (normal)

Thm 5.5 G top. g かつ $N \triangleleft G$ とする

G/N は top group になる.

$$\begin{array}{cccc} & G/N \times G/N & & G/N \\ F: & (A, B) & \longmapsto & AB^{-1} \end{array}$$

が cont になればいい.

"$\forall AB^{-1} \in W$ (近傍) に対して $F^{-1}(W)$ が近傍"

$A = aN$, $B = bN$ とおく $AB^{-1} = ab^{-1}N$

$\therefore AB^{-1} = \pi(ab^{-1})$

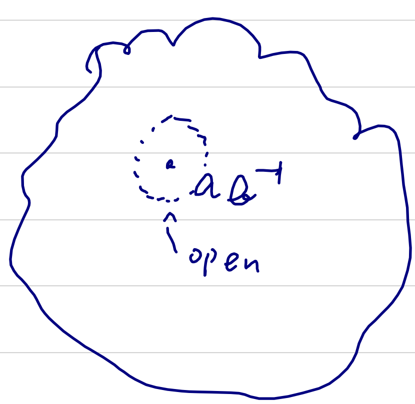
$\therefore \pi^{-1}(W) \ni ab^{-1}$ 　　 $\pi^{-1}(W)$ は ab^{-1} の近傍

∵) W は AB^{-1} の近傍だから

$W \supset \exists \underset{\text{open}}{C} \ni AB^{-1}$

これ!

$\therefore \pi^{-1}(W) \supset \underbrace{\pi^{-1}(C)}_{\text{open}} \ni ab^{-1}$ //



$\pi^{-1}(W) \ni ab^{-1}$ 　 $\because$
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ x, y & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$
は cont だった

$\therefore \pi^{-1}(W) \supset \exists N_a \exists N_b^{-1}$

$N_a \ni a$, $N_b \ni b$ は各々 open

$\therefore W \supset \pi(N_a N_b^{-1}) = \underbrace{\pi(N_a)}_{\text{open}} \underbrace{\pi(N_b)}_{\text{open}}{}^{-1}$, $\pi(N_a) \ni A$, $\pi(N_b) \ni B$ //

$G \times G \to G$ が cont
$(x, y) \mapsto xy^{-1}$ $\iff$ $\forall W \ni xy^{-1}$ に対して
(近傍) $W \supset N_x N_y^{-1}$
$N_x \ni x,\ N_y \ni y$ open.

Def 5.6 $f : G \to G'$ top groups.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(1)\ f: \text{homo} \quad (2)\ f: \text{cont}}_{\substack{\text{homomorphism} \\ (\text{top.g} \to \text{top.g})}} \quad (3)\ f: \text{open}}_{\text{open homomorphism}} \quad (4)\ f: \text{bijective}}_{\text{isomorphism}}$$

$G \cong G' \iff {}^{\exists} f : G \to G'$ isomorphism.

(3) open が いつも だいだい つらい.

5分休み.

Thm 5.7 $f : \underset{(\text{top. g})}{G} \to G'$ homo, open, onto

このとき $G/\ker f \cong G'$

∵ $F : G/\ker f \to G'$

$$\begin{array}{ccc} G/\ker f & \longrightarrow & G' \\ \Psi & & \Psi \\ X = x\ker f & \longmapsto & f(x) = F(X) = F(\pi(x)) \end{array}$$

$X = x \ker f$

$$F(X) = f(x)$$

i) well-defined $X = y \ker f$ のとき $f(x) = f(y)$ になる.

ii) homo (group として) $F(\underbrace{XY}) = f(xy) = f(x)f(y) = F(X)F(Y)$

$X = x\ker f \quad Y = y \ker f$

iii) onto $\forall y \in G'$ $\exists f(x) = y$ なので $X = x \ker f$ とすると $F(X) = y$

iv) 1:1 ok

v) open $\underset{\text{open}}{A} \subset G/\ker f$

$$F(A) = f \circ \pi^{-1}(A)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "@"] & G/\ker f \arrow[dl, "F"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

$\underline{f(x) = F \circ \pi(x) \quad \forall x \in G}$