

特論6/無限解析大意 レポート

2020/8/11

2問以上答えること

1. $GL(2, \mathbb{C}) \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\mathbb{C}$ 上の一次分数変換を

$$\rho(g)z = \frac{az + b}{cz + d}$$

によって定義する. $B = \{\rho(g) \mid g \in GL(2, \mathbb{C})\}$ とする.

- (1) B が群であることを示せ.
 - (2) $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow B$ を $\Phi(g) = \rho(g)$ とする. Φ が上への準同型で $\text{Ker} \Phi = \{-E, E\}$ であることを示せ.
2. G を有限群とし, ρ, σ を G の表現とする. $\chi^\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ を ρ の指標とする. つまり $\chi_\rho(g) = \text{Tr} \rho(g)$. 次を示せ.
- (1) $\chi^\rho(e) = \deg \rho$
 - (2) $\chi^\rho(gag^{-1}) = \chi^\rho(a)$
 - (3) $\rho \cong \sigma$ ならば $\chi^\rho = \chi^\sigma$
 - (4) $\chi^{\rho \oplus \sigma} = \chi^\rho + \chi^\sigma$
 - (5) $\chi^{\rho \otimes \sigma} = \chi^\rho \chi^\sigma$
 - (6) $\overline{\chi^\rho(a^{-1})} = \chi^\rho(a)$
3. 位相群として $SU(2)/\{-E, E\} \cong SO(3)$ を示せ.
4. $\xi : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ は $\forall s, t \in \mathbb{R}$ で $\xi(s+t) = \xi(s)\xi(t)$ を満たすとする. このとき $\xi(t) = e^{tA}$ となる $A \in M(n, \mathbb{C})$ が存在することを示せ.
5. G, G' をリー群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をそのリー代数とする. $f : G \rightarrow G'$ は準同型とする. このときリー環の準同型 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が存在して $f(\exp(tX)) = \exp(t\rho(X)) \forall X \in \mathfrak{g}$ となることを示せ.
6. (1) $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底であることを示せ.
- (2) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ のカルタン計量が $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ であることを示せ.