2020・8・10

§13 Ideal と normal subgroup

Def 12.1 $\mathfrak{h}$ 実Lie代数

$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ $X+iY$, $(X, Y \in \mathfrak{h})$

① + ② スカラー積 ③ [,]

$[X+iY, K+iL] = [X\ K] - [Y\ L] + i([Y, K] + [X\ L])$

$\mathfrak{h}$ の base は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の base ∴ $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Thm 12.2 G 線形 Lie group, $\mathfrak{g}$ Lie alg.

(i) G が Abel ⇒ $\mathfrak{g}$ も Abel

(ii) G が connected, $\mathfrak{g}$ が Abel ⇒ G は Abel

∵ (i) $\mathfrak{g} \ni X, Y$ に対して $e^{[X\,Y]} = \lim_{n} \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} e^{-\frac{1}{n}X} e^{-\frac{1}{n}Y}\right)^{n^2} = 1$ ∴ $[X, Y] = 0$

(ii) easy

• $G \ni x, y$ $x = e^{X_1} \cdots e^{X_n}$, $y = e^{Y_1} \cdots e^{Y_n}$ ∴ $e^X e^Y = e^Y e^X$

$$\left(\begin{aligned} &e^X e^Y e^{-X} = e^{\exp \operatorname{ad}(X) Y} = e^Y \\ &\exp \operatorname{ad}(X) Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{ad}^n(X) Y \\ &= Y + \frac{[X\,Y]}{1!} + \frac{[X[X\,Y]]}{2!} + \cdots \end{aligned} \right)$$

$\mathfrak{su}(2) \ni X \Leftrightarrow X + X^* = 0$

↑ $\mathbb{R}$-vector space

Def 12.3 Lie alg $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ sub space

$X, Y \in \mathfrak{k} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{k}$ のとき sub alg. という

Def 12.4 Lie alg $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ subspace

$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{h}$ のとき ideal という

ex. $\underset{\text{// trace=0の行列全体}}{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})}$ は $\underset{\text{// } M(n,\mathbb{K})}{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}$ の ideal

$X \in \mathfrak{sl}, \quad Y \in \mathfrak{gl} \quad tr([X,Y]) = 0, \quad \therefore [X, Y] \in \mathfrak{sl}$

Thm 12.5 $G \supset H$ closed subgroup (Lie group)

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ Lie alg

(i) $H \triangleleft G \Rightarrow \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の ideal

(ii) H, G connected. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の ideal $\Rightarrow H \triangleleft G$

∵ (i) $\mathfrak{h} \ni X, \mathfrak{g} \ni Y$ のとき $e^{[X, Y]}$

$$e^{t[X, Y]} = \lim_n \Big(\underbrace{e^{\frac{t}{n}X} e^{\frac{t}{n}Y} e^{-\frac{t}{n}X}}_{\in H} \underbrace{e^{-\frac{t}{n}Y}}_{\in H} \Big)^{n^2} \in H \quad \therefore [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

(ii) $H \lhd G$ の ☺

$H \ni Y,\ G \ni X$ 　 $XYX^{-1} \in H$ をいいたい 　 $e^{X_1}\cdots e^{X_n}$ 　 $e^{Y_1}\cdots e^{Y_m}$

$ad(X)Y \in \mathfrak{h}$

- $e^{tX} e^{sY} e^{-tX} = e^{s\exp(t\,ad(X))Y} \in H$

$Y \in \mathfrak{h} \quad X \in \mathfrak{g}$

つまり $e^{X_1}\cdots\cdots e^{X_n} e^{Y_1}\cdots\cdots e^{Y_m} e^{-X_n}\cdots\cdots e^{-X_1} \in H$ //

$e^X e^Y = e^{Y'} e^X$ をくり返し使う

- -

ideal

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 　 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 線形空間としての商空間

$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \ni \bar{X} = X + \mathfrak{h}$ のとき

$\bar{X}, \bar{Y}$ において $[\bar{X}, \bar{Y}] \overset{def}{=} \overline{[X, Y]}$ と定める

$[X+a,\ Y+b] = [X, Y] + \underset{\mathfrak{h}}{[X, b]} + \underset{\mathfrak{h}}{[a, Y]} + \underset{\mathfrak{h}}{[a, b]}$ //

代表元の選び方に依らない

Ex. $\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ homo

$\ker\rho$ は ideal of $\mathfrak{g}$

∵ $\ker\rho \ni X$, $\mathfrak{g} \ni Y$ とする.

$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = 0$ // ∴ $[X, Y] \in \ker\rho$

Thm 12.6 $\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ homo

このとき $\mathfrak{g}/\ker\rho \cong \mathfrak{g}'$ (Lie alg としては同形)

∵ $\mathfrak{g}/\ker\rho \ni \bar{X}$ に対して $\varphi(\bar{X}) = \rho(X)$ とする.

このとき φ: bijective + homo ∴ φ は isomorphism

§ 13 Semi simple Lie algebra

Def 13.1

① $\mathfrak{g}$ はAbelではなく $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 以外に ideal をもたないとき simple という

② $\mathfrak{g}$ は Abel ではなく. 可換な ideal をもたないとき semi simple という.

Ex $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は simple

$\mathfrak{o}(n)$ $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ $(n = 3, 5, 6 \cdots)$ は simple

$\mathfrak{o}(4)$ $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ は simple でない

Def 13.2 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上の Lie alg

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)\right) \in \mathbb{K} \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

を killing 形式という

dim $\mathfrak{g} = n$ と思って

注 $\mathrm{ad}(X)\,Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}$ $\therefore\ \mathrm{ad}X : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$\uparrow$

$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$ の base $E_1 \cdots E_n$

$[E_i, E_j] = \sum_k C_{ij}^{k} E_k$ 構造定数

$X = \sum x^i E_i$, $Y = \sum y^i E_i$ を代入して計算する

$$(\mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Y)_{mk} = \sum_{ijl} x^i y^j C_{il}^{m} C_{jk}^{l}$$

$$\therefore B(X\,Y) = \sum_{ijlm} x^i y^j C_{il}^{m} C_{jm}^{l} = \sum_{ij} x^i g_{ij} y^j$$

$g_{ij} = \sum_{ml} C_{il}^{m} C_{jm}^{l}$ Cartan 計量 という

もちろん $g_{ij} = B(E_i\ E_j)$ のこと

symmetric $\underline{\underline{g_{ij} = g_{ji}}}$

Ex. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{E}{} \qquad \underset{F}{} \qquad \underset{H}{}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det g = -128 \neq 0$$

Ex $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ $(= M(n, \mathbb{K})$ のこと E_{ij} が base$)$

$$B(X, Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY) - 2\,\mathrm{tr}X \cdot \mathrm{tr}Y$$

Thm 13.3 Cartan の判定条件

Lie alg. $\mathfrak{g}$ が semi-simple $\Longleftrightarrow$ $\det g \neq 0$

Thm 13.4 Weyl の定理

semi simple Lie alg は完全可約

Thm 13.3

∵ ($\Leftarrow$) 「semi simple でないとする $\to$ $\deg g = 0$」を示す

$\mathfrak{g} \supset {}^{\exists}\mathfrak{a}$ (可換なideal)　　$\dim \mathfrak{g} = n$

$(E_1 \cdots E_r)$ を $\mathfrak{a}$ の base　　$E_1 \cdots E_r\, E_{r+1} \cdots E_n$ を $\mathfrak{g}$ の base

$$g_{ij} = \sum C_{il}^{\ m} C_{jm}^{\ l} = 0,\quad 1 \leq {}^{\forall}j \leq r \text{ が示せる.}$$

$1 \leq {}^{\forall}j \leq r$ を固定する

$$[E_j, E_m] = C_{jm}^{\ l} E_l \in \mathfrak{a}\ ({}^{\forall}m)$$

$\vee$ $r+1 \leq l \leq n$ で $\boxed{C_{jm}^{\ l} = 0}$ $({}^{\forall}m)$.

$\vee$ $1 \leq l \leq r$ で $r+1 \leq m \leq n$ で $C_{il}^{\ m} = 0$ $({}^{\forall}i)$

$[E_i, E_l] = C_{il}^{\ m} E_m \in \mathfrak{a}$ $({}^{\forall}i)$

$$\sum_{m,l} C_{il}^{\ m} C_{jm}^{\ l} = \sum_m \left(\sum_{r+1 \leq l \leq n} + \sum_{1 \leq l \leq r} \right) = \sum_m \sum_{1 \leq l \leq r}.$$

$$= \sum_{1 \leq m \leq r} \sum_{1 \leq l \leq r} = 0$$

$\mathfrak{a}$ は可換だから

$$g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \end{array} \right) \end{array} \quad \therefore \det g = 0\ /\!/$$

- semi-simple Lie alg $\mathfrak{g}$
- adjoint rep ad : $\mathfrak{g} \to Gl(\mathfrak{g})$

Weylの定理

- 表現空間は $\mathfrak{g}$ は ad の不変部分空間の直和

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r$$ になる

$Ad(X)\mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}_j \quad \forall j = 1 \ldots r$ つまり $[X, Y] \in \mathfrak{a}_j$

$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{a}_j$

- つまり $\mathfrak{a}_j$ は ideal

① $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_j] = \mathfrak{a}_j$

② $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = 0$

┘

- $\mathfrak{a}_i$ は可換でない
- $\mathfrak{a}_i$ は simple

Thm 13.5 $\mathfrak{g}$ semisimple Lie alg.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r$ (一意的な分解)

Def 13.6 $\overset{\mathbb{C}\text{上}}{\checkmark}$ Semisimple Lie alg $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ subalg.

① $\mathfrak{h}$ 極大可換部分代数

② $\mathfrak{h} \ni {}^{\forall}H$ において $ad(H) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は対角化可能

このとき $\mathfrak{h}$ を Cartan（カルタン）部分代数 という

Thm 13.7 ① $\exists$ Cartan subalg

② dim Cartan subalg は一定. 」(rank $\mathfrak{g}$ という)

Ex. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \cap d(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ の Cartan.

(trace=0 の行列) (対角行列全体)

① は ok

② $\mathfrak{h} \ni H = \begin{pmatrix} c_1 & & & & 0 \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_{n-1} & \\ 0 & & & & -c_1 - \cdots - c_{n-1} \end{pmatrix}$ と表される

$$\begin{cases} ad(H) = E_{ij} = (c_i - c_j) E_{ij} \\ ad(H)(E_{ii} - E_{nn}) = 0 \end{cases}$$

$(E_{ij}, \quad E_{ii} - E_{nn})$ を base にとると

$ad(H)$ の表現行列は対角行列 //

$\mathfrak{g}$ semi-simple Lie alg / $\mathbb{C}$ rank $\mathfrak{g} = r$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartan $ad(H_j) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

$\dim \mathfrak{g} = n$

- $ad(H)$ $H \in \mathfrak{h}$ は可換, 対角化可能

$\mathfrak{h}$ の base $H_1 \cdots H_r$ とすると

n本存在する

- $ad(H_j) \overset{\exists}{X} = m_j X$ $\boxed{X \in \mathfrak{g}}$ $j = 1, \cdots, r$

$\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}$ の dual) $\mu_1 \cdots \mu_r$ 双対 base

i.e, $\mu_i(H_j) = \delta_{ij}$

- $\alpha(H) = \sum_{j=1}^{n} m_j \mu_j (H)$ α は n コ存在する

$ad(H)X = ad(\sum a_j H_j) X = \sum a_j m_j X = \alpha(H) X$

$$\left(\begin{aligned} \alpha(H) &= \sum_j m_j \mu_j \left(\sum a_i H_i \right) \\ &= \sum a_j m_j \end{aligned} \right)$$

Def 13.8 $\mathfrak{h}$ Cartan 部分代数

$\mathfrak{h}^* \ni \alpha$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid ad(H)X = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

が $\{0\}$ でないとき、α を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルートという

$\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間という

※ $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \underset{[H,X]=0}{ad(H)X = 0} \quad \forall H\} \supseteq \mathfrak{h}$ max なので

$\alpha = 0$

Lem 13.9 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

∵

$X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ について

$$\underset{ad(H)([X,Y])}{[H\ [X,Y]]} \underset{\text{Jacobi-identity}}{=} -[X, [\underset{\mathfrak{g}_\beta}{Y}\ H]] - [Y, [H, \underset{\mathfrak{g}_\alpha}{X}]]$$

$$= [X, \underset{\beta Y}{[H, Y]}] + [\underset{\alpha X}{[H, X]}, Y]$$

$$= (\alpha+\beta)[X, Y] \quad //$$

Thm 13.10 $\mathfrak{g}$ semi simple Lie alg / $\mathbb{C}$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartan.

$\Delta = \{$ルート$\neq 0$ の全体$\}$ $\#\Delta < \infty$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\sum_{\alpha \in \Delta} \oplus \, \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

$\boxed{\mathfrak{g}_\alpha \text{ は } H_1 \cdots H_r \in \mathfrak{h} \text{ の同時eigenvectorみたいなもの}}$

Ex $\mathfrak{so}(3)$ を $\mathbb{C}$ 上で考える. $\mathfrak{so}(3) \ni X \leftrightarrow X + {}^tX = 0$

これは simple

$$\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad \tilde{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

交換関係は $-i\tilde{L}_j = L_j$ とすると

$[L_3, L_1 + iL_2] = L_1 + iL_2 = \mathrm{ad}(L_3)(L_1 + iL_2) = L_1 + iL_2$

$[L_3, L_1 - iL_2] = -(L_1 - iL_2) = \mathrm{ad}(L_3)(L_1 - iL_2) = -(L_1 - iL_2)$

$[L_3, L_3] = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\{cL_3 \mid c \in \mathbb{C}\} = \mathfrak{h}$ Cartan

$$xL_1 + yL_2 + zL_3 = x'(L_1 + iL_2) + y'(L_1 - iL_2) + zL_3$$

$\mathfrak{h} = \mathbb{C}L_3$ dim 1 $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ st

$\alpha(cL_3) = c$
$\beta(cL_3) = -c$ とすると

$$\mathfrak{so}(3) = \mathbb{C}L_3 \oplus \underbrace{\mathbb{C}(L_1 + iL_2)}_{\alpha = \mathbb{1}} \oplus \underbrace{\mathbb{C}(L_1 - iL_2)}_{\beta = -\mathbb{1}}$$ //

Thm 13.11 $(\mathfrak{g}, B(\cdot,\cdot))$ で $\alpha+\beta \neq 0$ ならば

$\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ i.e. $B(X,Y)=0$ $\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall Y \in \mathfrak{g}_\beta$

$\because$ $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ $\quad \mathrm{ad}(X)Y \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

$$\{\mathrm{ad}X \ \mathrm{ad}Y\}^n \mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{g}_{\gamma+n\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\neq 0}}$$

$$(\mathrm{ad}X \ \mathrm{ad}Y)^{m_\gamma} \mathfrak{g}_\gamma = 0$$

$$m = \max_\gamma m_\gamma \quad // \quad (\mathrm{ad}X \ \mathrm{ad}Y)^m = 0$$

$\therefore$ $\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y$ はべき零 $\to \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y) = 0 \Rightarrow B(X,Y)=0$

$\therefore$ $B(X,Y)=0$ $\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall Y \in \mathfrak{g}_\beta$ $(\alpha+\beta \neq 0)$