2020・8・3

Def 8.12 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を Lie alg. とする

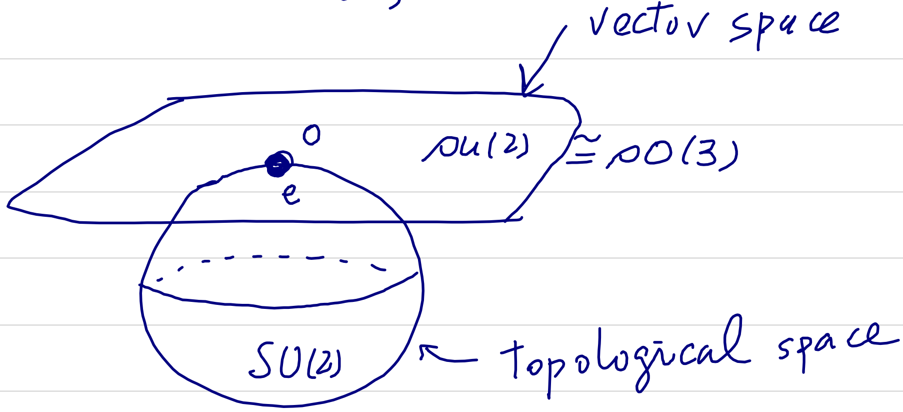
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ は linear map

- $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$ のとき <u>homomorphism</u>
- homo + bijective のとき isomorphism

例 $SU(2) \not\cong SO(3)$

$SU(2) = S^3$, $SO(3) = S^3/\{1, -1\}$

ところが $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$



Adjoint rep について

Thm 8.13 　G, G' Lie 群
　　　　　$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ Lie alg.

$f : G \to G'$ homo $\Longrightarrow {}^{\exists_1}\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ homo st

$$f(\exp(tX)) = \exp(t\rho(X)) \quad X \in \mathfrak{g}$$

$\because$ 　$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(\exp(tX)) \in G'$

は 1-parameter group

$\therefore$ ${}^{\exists_1} X' \in \mathfrak{g}'$ st $f(\exp(tX)) = \exp tX'$

$\rho : X \to X'$

① linear $\because$) $f(\exp(t(X+Y)))$

$$= \lim_n f(\exp(\tfrac{t}{n}X)\exp(\tfrac{t}{n}Y))^n$$

$$= \lim_n (\exp \tfrac{t}{n}\rho(X) \exp \tfrac{t}{n}\rho(Y))^n$$

$$= \exp[t(\rho(X)+\rho(Y))] = \exp t\rho(X+Y)$$

② $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$ も同じ //

(注) $\rho(X) = \frac{d}{dt} f(\exp tX) \Big|_{t=0}$ 　 || 　 $\rho = df$ とかく

$Ad(h)X = hXh^{-1}$ $\quad X \in \mathfrak{g},\ h \in G$

$e^{t hXh^{-1}} = h e^{tX} h^{-1} \in G \quad \therefore \quad hXh^{-1} \in \mathfrak{g}$

$Ad(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

$\therefore \ Ad(\cdot) : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$

$\mathfrak{g}$上の正則な線形変換

homo

$(Ad(\cdot),\ GL(\mathfrak{g}))$ を G の adjoint rep になる

$Ad(h_1h_2) = Ad(h_1)Ad(h_2)$

$Ad(\exp tX)Y = \exp(tX)\,Y\exp(-tX) \in \mathfrak{g}$

$(Y \in \mathfrak{g})$

$$\frac{d}{dt} Ad(\exp tX)Y\Big|_{t=0} = XY - YX$$

$ad(X)Y = XY - YX$

$\boxed{df = \rho}$ の書き方にならうと

$ad = dAd$

§9 Haar測度

有限群のとき $\#G<\infty$

$$A = \sum_{x\in G} f(x) \to \sum_{x\in G} f(ax) = \sum_{a^{-1}y\in G} f(y) = A$$

G : 位相群　　$f: G \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\,dx$$

$f(ax) = {}_a f(x)$　　$f(xa) = f_a(x)$

左平行移動　　右平行移動

Def 9.1　G : 局所cpt Hausdorff群

$I : C_0(G) \to \mathbb{C}$ が次をみたすとき

左不変積分という

非負関数

① linear　② $I(h) \geq 0$ $\forall h \in C_0^+(G)$

③ $I[{}_a f] = I[f]$　$a\in G,\ f\in C_0(G)$

Thm 9.2 (Haar) $\exists^1$ 左不変積分 (up to 定数倍)

Thm 9.3. σ cpt, 局所 cpt, Hausdorff 群 G の左不変積分 に対して

$\exists_1$ 正則 Borel meas μ on G s.t.

$$I(f) = \int_G f(x)\,d\mu(x)$$

and

① $\forall K \subset G$ cpt に対して $\mu(K) < \infty$

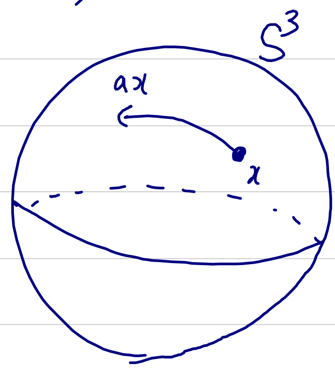
② $\forall U \subset G$ open $(\neq \phi)$ に対して $\mu(U) > 0$

③ $\forall \mu$-meas $E (\subset G)$, $\forall a \in G$ に対して

$$\mu(aE) = \mu(E) \quad \perp$$

μ を Haar 測度という.

Ex.1 $SU(2)$ $(\cong S^3 \subset \mathbb{R}^4)$



・ $x \longmapsto ax$ は S^3 上の回転になる.

・ S^3 上に $\exists_1$ Haar 測度
それは回転不変になっている
唯一の measure

$$SU(2) \ni \begin{pmatrix} ix_3 + x_4 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -ix_3 + x_4 \end{pmatrix} = A \quad (x_j \in \mathbb{R})$$

$$(A^*A = AA^* = E, \quad \det A = 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_4 = \cos\varphi & & 0 \le \varphi \le \pi \\ x_3 = \sin\varphi\cos\psi & & 0 \le \psi \le \pi \\ x_2 = \sin\varphi\sin\psi\cos\xi & & 0 \le \xi \le 2\pi \\ x_1 = \sin\varphi\sin\psi\sin\xi & & \end{array}}$$

(S^3 上の点の極座標表示.)

Jacobian $\longrightarrow \sin^2\varphi \sin\psi$

$$I(f) = \int_{S^3} f(\varphi, \psi, \xi)\, d\mu$$

$2\pi^2 \cdots$ 面積
$\sin^2\varphi \sin\psi \cdots$ Jacobian

ここで $d\mu(\varphi, \psi, \xi) = \underbrace{\frac{1}{2\pi^2} \sin^2\varphi \sin\psi \, d\varphi\, d\psi\, d\xi}_{\text{Haar meas.}}$

は $SU(2)$ で不変になっている。

Ex. 2 $\quad SO(3) \qquad SO(3) \cong SU(2)/\{E, -E\}$

$f : SO(3) \to \mathbb{C}$

$Ad : SU(2) \to SO(3)$ homo

$SO(3) \cong SU(2)/\{1, -1\}$ の同型対応の復習

$$\boxed{Ad : SU(2) \to SO(3) \text{ homo}}$$

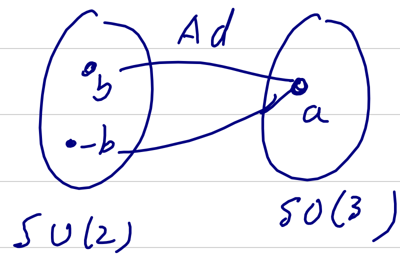
$SU(2)/\mathrm{Ker}\,Ad \cong SO(3)$

$Ad(g) \cdot X = \underset{\substack{\cap \\ su(2)}}{g} X g^{-1} \qquad X \in \underset{3次元}{su(2)}$ (＝Vとかいた)

$\therefore Ad(g) : su(2) \to su(2)$

かつ $Ad(g) \in SO(3)$ になっている

$SO(3) \cong SU(2)/\{-E, E\}$



$*$ $SU(2)$ は $SO(3)$ の2重被覆になっている

$0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 4\pi$

$SU(2) \ni U = U_3(\varphi_1)\, U_1(\theta)\, U_3(\varphi_2)$ と表せる

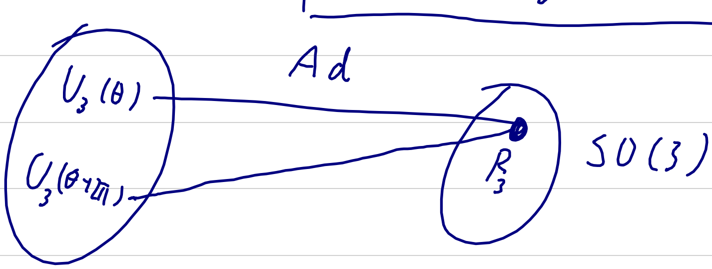
$$U_3(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \qquad U_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$SO(3) \ni Ad\big(U_3(\varphi_1)\, U_1(\theta)\, U_3(\varphi_2)\big) = R_3(\varphi_1)\, R_1(\theta)\, R_3(\varphi_2)$$

Euler角

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} Ad: & U_3(\varphi_2) & \to & R_3(\varphi_2) \\ & \neq & & \parallel \\ & U_3(\varphi_2+2\pi) & \to & R_3(\varphi_2+2\pi) \end{array}}$$



$f : C_0(SO(3))$

ok

$$I(f) = \int_{SU(2)} f(\mathrm{Ad}(x))\, d\mu(x)$$

$SU(2)\ (\cong S^3)$ 上の Haar measure

$a \in SO(3)$

$$I(af) = \int_{SU(2)} f(a\,\mathrm{Ad}(x))\, d\mu(x)$$

$$SU(2) \ni b \xrightarrow[\text{onto}]{\mathrm{Ad}} a \in SO(3)$$

$a = \mathrm{Ad}\,{}^{\exists}b$ ← 2つある

$$= \int_{SU(2)} f(\mathrm{Ad}(bx))\, d\mu(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Ad}\, bx &= \mathrm{Ad}\, b \cdot \mathrm{Ad}\, x \\ &= a\, \mathrm{Ad}\, x\end{aligned}}$$

$$= \int_{SU(2)} f(\mathrm{Ad}(x))\, d\mu(x)$$

$$= I(f)$$

$\lrcorner$

Thm 9.4 σ-cpt, 局所cpt, Hausdorff 群 G

の Haar meas. μ. $\underline{\mu(G)<\infty \Leftrightarrow G : \text{cpt}}$

∵ (⇐) は μ の性質だった

(⇒) 対偶：　G cpt でないとする

$U \ni e$ の cpt な近傍

$\exists \{a_n\}$ s.t. $\underbrace{a_1 U}_{\text{cpt}} \not\ni^{\exists} a_2 \to \underbrace{a_1 U \cup a_2 U}_{\text{cpt}} \not\ni a_3 \to \cdots \to \bigcup_j^n a_j U \not\ni a_{n+1}$

- -

$e \in {}^{\exists} V V^{-1} \subset U$ $(V : \text{open})$

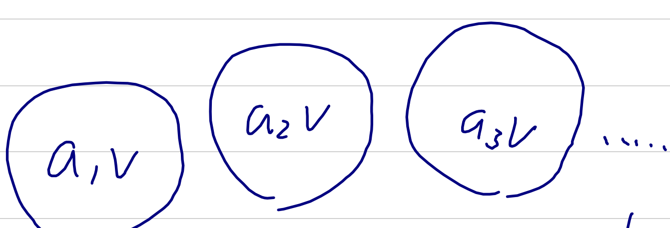
$a_j V \cap a_i V = \emptyset$ ∵) $a_j V \cap a_i V \ni^{\exists} h$

$a_j x = a_i y$

$\therefore a_j = a_i y x^{-1} \in a_i V V^{-1} \subset a_i U$

結局 $\mu(G) \geqq \sum_i^n \mu(a_i V) = \sum_i^n \underbrace{\mu(V)}_{>0} = n\mu(V)$

$\to \infty$ //



$\mu(a_j V) = \mu(V)$

Thm 9.5 cpt + Hausdorff 群 G において
左不変 Haar meas = 右不変 Haar meas

I 左不変 とする

$J_b[f] = I[f_b]$ とすると $J_b[f]$ も左不変

∵) $J_b[{}_af] = I[{}_af_b] = I[f_b] = J_b[f]$

∴ $J_b[f] = \alpha_b I[f]$ つまり $I[f_b] = \alpha_b I[f]$

$f = 1$ とすると $\alpha_b = 1$ がわかる　　$I[1] =$ G の volume $< \infty$

∴ $I[f_b] = I[f]$　∴ I は右不変 //

§10 cpt 群の表現

$\rho : G \to GL(V)$ homo, $x \mapsto \rho(x)v$ cont

のとき rep という

$$\langle v, w \rangle = \int_G (\rho(x)v, \rho(x)w)\, d\mu(x) \quad \text{Haar meas.}$$

$\underline{v, w \in V}$

- $\langle \rho(y)v, \rho(y)w \rangle = \langle v, w \rangle$ $\rho(x)$ is unitary.

※ cpt 群の rep は ユニタリー表現と同値
完全可約 (有限群と同じ)

M: irreducible 表現の集合 (ユニタリー同値は同一視)

Thm 10.1 (Peter-Weyl) cpt 群の

$M = \{ U^\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ irreducible unitary rep とする

$d_\lambda = \deg U^\lambda$, $U^\lambda(x) = (u_{ij}^\lambda(x))$ 表現行列

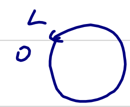
. $\{ \sqrt{d_\lambda}\, u_{ij}^\lambda(\cdot) \mid i, j = 1 \dots d_\lambda, \lambda \in \Lambda \}$ は $L^2(G)$ の base.

(∵) 略

Ex. 円周 $[0, L]$ 0 と L を同一視する

$\psi : [0, L] \to \mathbb{C}$ st $\psi(x+L) = \psi(x)$

$$\begin{cases} \rho_x \psi(\xi) = \psi(\xi - x) & \forall x \in [0, L) \\ \rho_L \psi = \psi \end{cases}$$

$G = \{\rho_x \mid x \in [0, L]\}$ は cpt群  と同一視される

$$\int_{\circlearrowleft} f(x) \frac{1}{L} dx = \int_{\circlearrowleft} f(x-y) \frac{1}{L} dx = \int_{\circlearrowleft} f(x) \frac{1}{L} dx$$

G は Abel $\therefore$ irreducible rep u^λ の次元は 1-dim

$u^\lambda(x) u^\lambda(y) = u^\lambda(x+y)$, $u^\lambda(0) = u^\lambda(L) = 1$

$u_n(x) = e^{-ik_n x}$ where $k_n = \dfrac{2n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$L^2([0, L], \mu)$ の base になる

$$M = \{ e^{-ik_n x} \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

§11 Lie 群と Lie alg の表現

$\mathfrak{gl}(V) = \{ A : V \to V \mid \text{linear} \}$ $\mathbb{K}$

$[A, B] = AB - BA$ が def されている.

<u>Def 11.1</u> $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ homo を $\mathfrak{g}$ の K 上 a rep という.

ie $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$, $\rho(cX) = c\rho(X)$, $\rho[X, Y] = [\rho(X), \rho(Y)]$

Ex $\mathfrak{g}$ Lie alg. $\ni A$

$ad(A)X = [A, X]$ $X \in \mathfrak{g}$ とすると

$ad(A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ① linear はすぐわかる

② $[ad(A), ad(B)]X = ad A\, ad B X - ad B\, ad A X$

$= [A, [B, X]] - [B, [A, X]] = -[B, [X, A]] - [X, [A, B]] - [B, [A, X]]$

$= [[A, B], X] = Ad[A, B] X$ //

Thm 11.2 G <u>connected</u>, $\mathfrak{g}$ の rep (ρ, V) に対して

G の rep (T, V) st $dT = \rho$

☺ $G \ni X = e^{X_1} \cdots\cdots e^{X_n}$ だったから $(X_j \in \mathfrak{g})$

$TX = e^{\rho(X_1)} \cdots e^{\rho(X_n)}$ とすれば. これは rep.

$T e^{tX} = e^{t\rho(X)}$ で $dT = \rho$ //

$\exists \rho$: $\mathfrak{g}$ の rep

$\Longrightarrow$ T : G の rep s.t. $dT = \rho$
(connected)

◎ T : irr $\Longleftrightarrow$ ρ : irr

◎ $T_1 \cong T_2$ $\Longleftrightarrow$ $\rho_1 \cong \rho_2$

$\mathfrak{g}$ の rep から G の rep をつくる
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ から $SL(2,\mathbb{C})$ の rep. etc

Def 11.3 $\mathfrak{g}$ Lie alg

(ρ_1, V_1) (ρ_2, V_2) は rep とする。

$(\rho_1, V_1) \cong (\rho_2, V_2) \iff \exists \Lambda : V_1 \to V_2$ bijective linear

st $\Lambda \rho_1(X) = \rho_2(X) \Lambda \quad \forall X \in \mathfrak{g}$

$$\boxed{\begin{array}{l} G \text{ の rep と } \mathfrak{g} \text{ の rep の関係} \\ G \text{ の rep } T \quad \therefore\ T : G \to GL(V) \quad \text{homo} \\ \mathfrak{g} \text{ の rep } \rho \quad \therefore\ \rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \quad \text{homo} \\ \text{次の方 } \quad T(\exp tX) = \exp t\rho(X) \\ \qquad \rho = dT \text{ とかいて } T \text{ の微分表現という} \end{array}}$$

行列の積

[·,·]

Ex $V = \mathfrak{g}$ $T = Ad \Rightarrow dT = ad$ だった

Thm 11.4 G Lie群, $\mathfrak{g}$ Lie alg.

(T_1, V_1), (T_2, V_2) を G の rep とする

① $T_1 \cong T_2 \Rightarrow dT_1 \cong dT_2$

② G connected $dT_1 \cong dT_2 \Rightarrow T_1 \cong T_2$

∵ ① $\Lambda : V_1 \to V_2$ bijective, linear s.t.

$$\Lambda T_1(x) = T_2(x)\Lambda \quad \forall x \in G$$

$$\therefore \Lambda T_1(\exp tX) = T_2(\exp tX)\Lambda$$

$$\therefore \Lambda \exp(t\, dT_1(X)) = \exp(t\, dT_2(X))\Lambda$$

$$\therefore \Lambda\, dT_1(X) = dT_2(X)\Lambda$$ ✓ビブン

② $\Lambda\, dT_1(X) = dT_2(X)\Lambda$

$\downarrow$

$\Lambda\, dT_1(X)^m = dT_2(X)^m\Lambda$

$\downarrow$

$$\Lambda \exp(t\, dT_1(X)) = \exp(t\, dT_2(X))\Lambda$$

さらに $\forall x \in G$ は $x = e^{X_1} \cdots e^{X_n}$ $X_j \in \mathfrak{g}$ だった

$$\therefore T_1(x) = T_1(e^{X_1}) \cdots T_1(e^{X_n}) = \Lambda^{-1} T_2(e^{X_1})\Lambda \cdots \Lambda^{-1} T_2(e^{X_n})\Lambda$$

$$= \Lambda^{-1} T_2(x)\Lambda \quad //$$

$\mathfrak{g}$ Lie alg (ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の rep.

⊙ ρ が reducible とは $V \supset \exists U$ (subspace) st
$\rho(X) U \subset U \quad \forall X \in \mathfrak{g}$

Thm 11.5 G Lie 群, $\mathfrak{g}$ Lie alg
(T, V) を G の rep とする.

(1) $V \supset U. \quad T(x) U \subset U \ \ \forall x \in G \Rightarrow dT(X) U \subset U \ \ \forall X \in \mathfrak{g}$
(ゆえに dT irr $\Rightarrow$ T irr)

(2) G connected $\quad \forall X \in \mathfrak{g} \qquad \forall x \in G$
$V \supset U \quad dT(X) U \subset U \Rightarrow T(x) U \subset U$
(ゆえに T irr $\Rightarrow dT$ irr)

☺ (1) $T(e^{tX}) U \subset U \therefore e^{t\, dT(X)} U \subset U$ 微分する

(2) $\forall x \in G$ は $e^{X_1} \cdots e^{X_n} = x$ と表わすことができる
$T(x) U = e^{dT(X_1)} \cdots\cdots e^{dT(X_n)} U \subset U$ //