2020 · 7 · 27

- G : 系統的 Lie group i.e., $GL(n, \mathbb{C})$ の closed subgroup
- $\mathfrak{g}$: G の Lie alg i.e. $X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow e^{tX} \in G \ (\forall t \in \mathbb{R})$

Ex $GL(n, \mathbb{C})$ の Lie alg は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$

Ex $SU(2)$ の Lie alg は ($e^{tX} \in GL(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow X \in M(n, \mathbb{C})$)

$\mathfrak{su}(2) \ni X \Leftrightarrow e^{tX} \in SU(2) \ (\forall t \in \mathbb{R})$

$$\mathfrak{su}(2) = \{ X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^* + X = 0, \ \mathrm{tr}\, X = 0 \}$$

($(e^{tX})^* e^{tX} = \bar{E} \Leftarrow X^* + X = 0$, $\det e^{tX} = e^{t\,\mathrm{tr}\, X} = 1 \Leftarrow \mathrm{tr}\, X = 0$)

(注) $\mathfrak{su}(2)$ は vector space / $\mathbb{R}$

$\mathfrak{su}(2)$ の base は $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ 2×2- Pauli matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prop 8.5 (Trotter product 公式)

$X, Y \in M(n, \mathbb{C})$

① $e^{X+Y} = \lim_n \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y}\right)^n$

② $e^{[X,Y]} = \lim_n \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} e^{-\frac{1}{n}X} e^{-\frac{1}{n}Y}\right)^{n^2}$ ⌟

※ $[X,Y]=0$ のとき $e^{X+Y} = e^X e^Y$

Thm 8.6 G : 線形 Lie group
$\mathfrak{g}$: Lie alg.
このとき ① $\mathfrak{g}$ は vector space / $\mathbb{R}$
② $X, Y \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}$

(∵) Trotter prod. による

① $X \in \mathfrak{g} \to e^{tX} \in G$ ∴ $e^{taX} \in G$ $\forall a, \forall t \in \mathbb{R}$
∴ $aX \in \mathfrak{g}$ — ①'

$X, Y \in \mathfrak{g} \to e^{t(X+Y)} \in G$
∵) $e^{t(X+Y)} = \lim_n \left(e^{\frac{t}{n}X} e^{\frac{t}{n}Y}\right)^n \in G$
($e^{\frac{t}{n}X} \in G$, $e^{\frac{t}{n}Y} \in G$) ∴ $X+Y \in \mathfrak{g}$
①'

③ と ① より ① が従う.
② の (∵) も 同じ,

$[X, Y] = XY - YX$ だった (commutator)

$[\cdot,\cdot]$ は次を満たす. $a, b \in \mathbb{C}$

(1) $[X, X] = 0$

(2) $[aX+bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ / $[X, aY+bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$

(3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$

Jacobi恒等式という

(1) ～ (3) を Lie 条件と呼ぶ

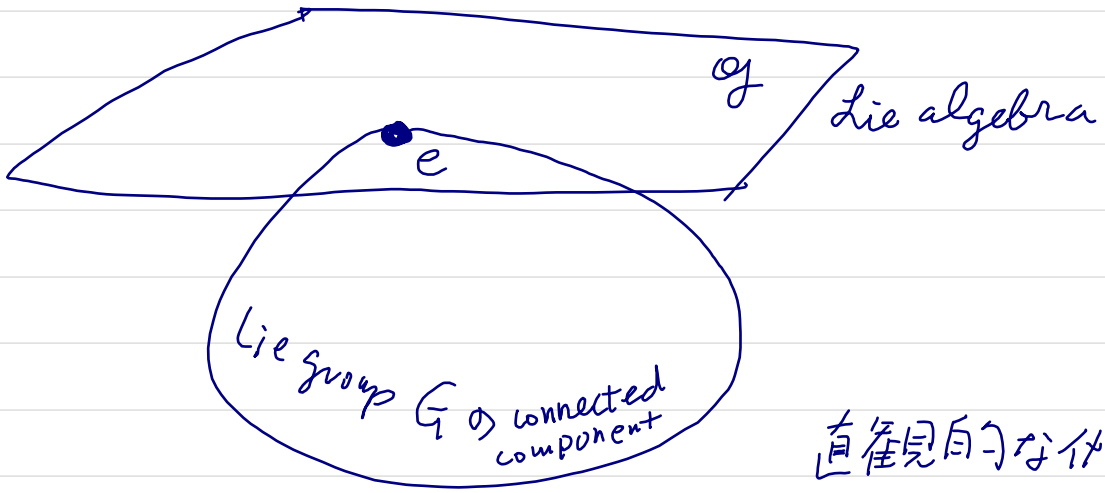
Def 抽象的 Lie alg. $\mathfrak{g}$ (コーギでは考えない)

① $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$) 上の vector space

② $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は (1) − (3) の Lie 条件をみたす.
(Lie 積)

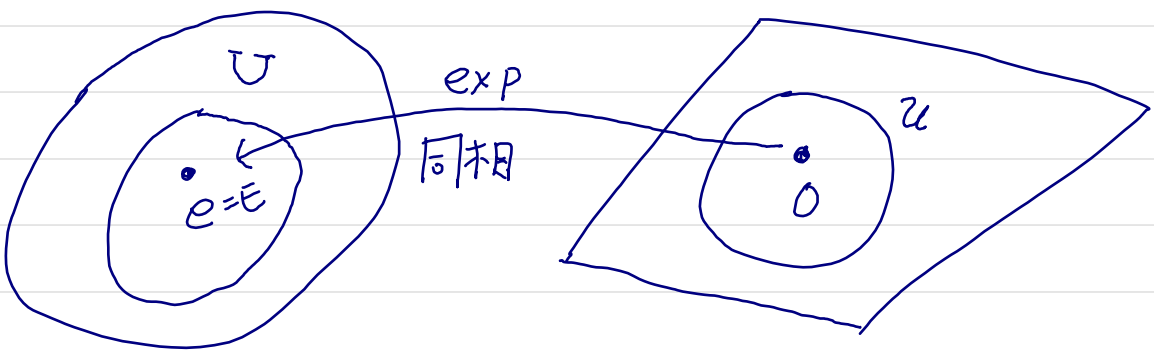
$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ を Lie alg という.

Lie group の局所構造と Lie alg.



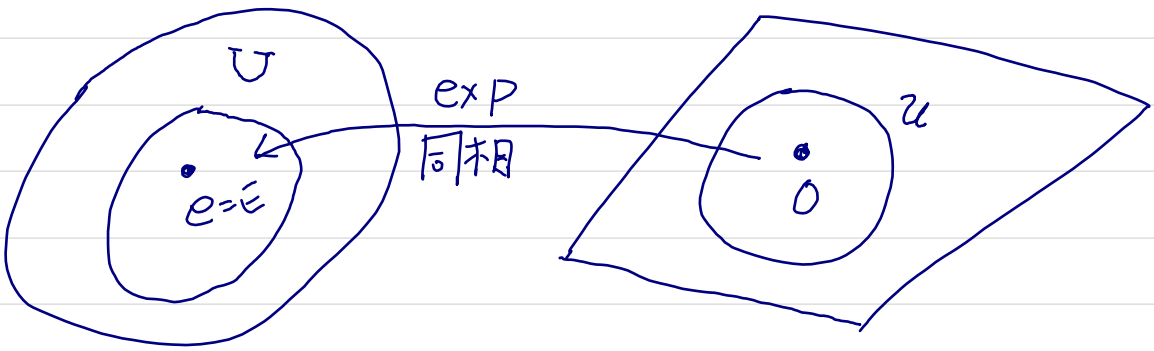
直感的なイメージ

- $\mathfrak{g}$ と e を含む G の connected component G_0 には深い関係がある.
- $\mathfrak{g}$ の representation から G_0 の representation をつくることができる.



connected Lie group G　　Lie alg. $\mathfrak{g}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \quad (\because\ G \text{ は connected})$$



connected Li group G ⟷ Lie alg. $\mathfrak{g}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \quad (\because\ G \text{ は connected})$$

上図を ☺ したい.

① $\forall X \in \mathfrak{g}$ において $\exp X \in G$ は ok

② $\forall A \in G$ において $\exists B \in \mathfrak{g}$ s.t. $\exp B = A$?

② に対しては A が e の 近傍であれば $B = \log A \in \mathfrak{g}$ であり $\exp B = A$ が示せる → Lemma 8.7

$\log A \in \mathfrak{g}$ は非自明. $\exp \log A = A$ は $\|A - E\| < 1$ のとき は 成立する. $\left(\log A \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow\right) e^{t \log A} \in X$ $(\forall_{t \in \mathbb{R}})$ を示さなくてはならない

Lemma 8.7 G 線形 Lie group このとき
$\exists a>0$ s.t. $A\in G,\ \|A-E\|<a \longrightarrow \log A \in \mathfrak{g}$ ┘

(注) $\exp(\log A) = A$ ただし $\|A-E\|<1$

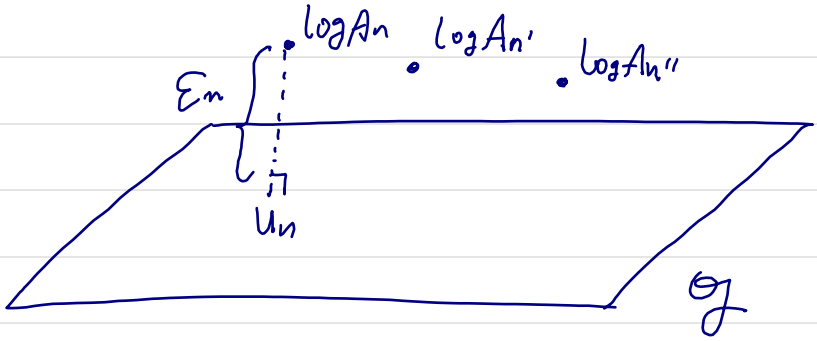
$\exp(t\log A) \in G$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

(∵) 背理法 $\forall a>0$ $\exists A\in G$ s.t. $\|A-E\|<a$ かつ $\log A \notin \mathfrak{g}$

を仮定して矛盾をみちびく.

$a=\frac{1}{n} \to \exists A_n$ s.t. $\|A_n-E\|<\frac{1}{n}$ $\log A_n \notin \mathfrak{g}$

$\{\log A_n\} \subset \mathfrak{g}^c$



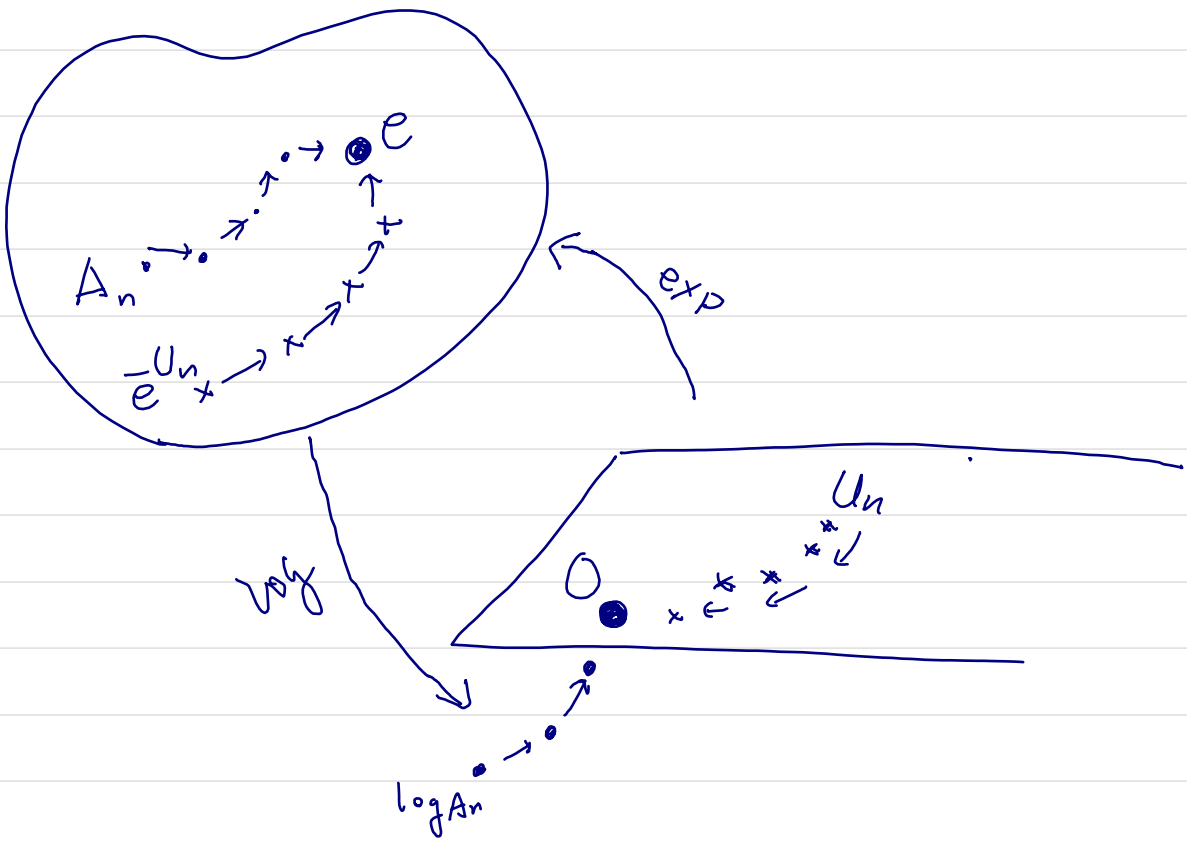
$\dim G = m$ ($\mathbb{C}$上) $\therefore \dim G = 2m$ ($\mathbb{R}$上)

※ $\mathfrak{g}$ は $2m$ 次元の vector space/$\mathbb{R}$ の subspace

$0<\|\log A_n - U_n\| = \varepsilon_n \leftarrow$ $\log A_n$ と $\mathfrak{g}$ との距り

◎ 形式的には $\log A_n - U_n = \log(A_n e^{-U_n})$

＊図を加えた



① $\varepsilon_n \to 0$, $U_n \to 0$

∵) $\log A_n \to 0 \in \mathfrak{g}$

∴ $\|\log A_n\| = \|\log A_n - 0\| \geq \|\log A_n - U_n\| = \varepsilon_n$

∴ $\varepsilon_n \to 0$ ∴ $U_n \to 0$ //

$$\|\log[\overbrace{\underset{\substack{\cap \\ G}}{A_n} \exp(-\underset{\substack{\cap \\ G}}{U_n})}^{\to E\ (n\to\infty)}]\| = \underline{\underline{\delta_n}}$$ とする

$\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ はすぐにわかる.

$\frac{1}{\delta_n}\log[A_n \exp(-U_n)]$ の大きさ 1

$\exists n_k$ st $\frac{1}{\delta_n}\log[A_n \exp(-U_n)] \to W$ $(n_k \to \infty)$ —⊛

部分列

(BW の Thm) n_k を改めて n とおく.

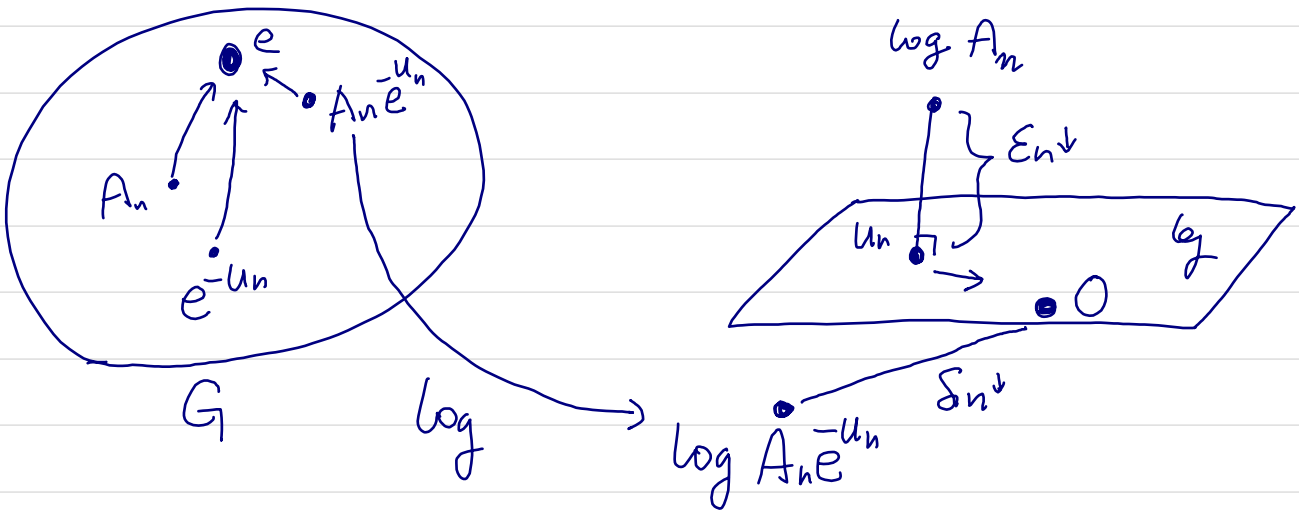
Lemma 8.8 で ☺ する

② $W \in \mathfrak{g}$ (☺ が必要. 今は認めることとする)

⊛ より $\log[A_n \exp(-U_n)] - \delta_n W = o(\delta_n)$ 行列

$\frac{o(\delta_n)}{\delta_n} \to 0$ $(n \to \infty)$

＊図を加えた



ε_n と δ_n の大きさを比べる。 併に $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\delta_n \downarrow 0$

- $A_n e^{-u_n} \to e$
- $\log(A_n e^{-u_n}) \to 0 \to$ 規格化 $\dfrac{\log(A_n e^{-u_n})}{\|\log(A_n e^{-u_n})\|} \to W$ $(= \xi_n)$
- $\log A_n \notin \mathfrak{g}$

$\therefore \log(A_n e^{-u_n}) \sim \delta_n W$ と思える

④ より $\log\left[A_n \exp(-U_n)\right] - \delta_n W = o(\delta_n)$

③ $\|o(\delta_n)\| \geqslant \varepsilon_n \quad (= \|\log A_n - U_n\|)$

∵)

$\|\exp A - \exp B\| \leq e^{a} \|A - B\| \qquad \|A\|, \|B\| < a$

$\|\log A - \log B\| \leq \frac{1}{1-a} \|A - B\| \qquad \|1 - A\| < a,\ \|1 - B\| < a$

より、

$\therefore \quad A_n \exp(-U_n) - \exp \delta_n W = o(\delta_n)$

$\therefore \quad A_n - \exp \delta_n W \cdot \exp(U_n) = o(\delta_n)$

$\therefore \quad \log A_n - \log\left(\exp \delta_n W \cdot \exp(U_n)\right) = o(\delta_n)$

$\log A_n - U_n + U_n - \log\left(\exp \delta_n W \cdot \exp U_n\right) = o(\delta_n)$

$\|\log A_n - U_n\| = \varepsilon_n$

$= z$ を estimate

$$\therefore \log A_n - \log\left(\exp \delta_n W \cdot \exp U_n\right) = o(\delta_n) \quad \text{—} \circledast$$

一般論 $\log\left(e^X e^Y\right) = X + Y + O\left(\|X\|\|Y\|\right)$

大文字

$$\boxed{\frac{O(\|X\|\cdot\|Y\|)}{\|X\|\,\|Y\|} < \infty}$$

$\|X\|, \|Y\|$ 小さいとき

$$\log\left(\exp \delta_n W \cdot \exp U_n\right)$$

$$= \delta_n W + U_n + O\left(\|\delta_n W\|\cdot\|U_n\|\right)$$

$$\therefore \log\left(\exp \delta_n W \cdot \exp U_n\right) - U_n = \delta_n W + O\left(\|\delta_n W\|\cdot\|U_n\|\right)$$

$$\therefore \circledast = \log A_n - U_n - \delta_n W - O\left(|\delta_n|\,\|W\|\,\|U_n\|\right) = o(\delta_n)$$

$$\frac{O\left(|\delta_n|\,\|W\|\,\|U_n\|\right)}{|\delta_n|} = \frac{O\left(|\delta_n|\,\|W\|\,\|U_n\|\right)}{|\delta_n|\,\|W\|\,\|U_n\|}\cdot\|W\|\cdot\underbrace{\|U_n\|}_{\to 0} \to 0$$

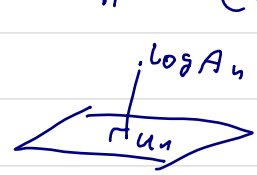
$< \infty$

(ユーギでは少しごまかしてしまった)

$$\therefore \log A_n - \delta_n W - U_n = o(\delta_n)$$

$$\therefore \varepsilon_n = \|\log A_n - U_n\| \le \|\log A_n - U_n - \delta_n W\| = o(\delta_n) \quad //$$

注 $U_n + \delta_n W \in \mathfrak{g}$



④ $\delta_n = \|O(\varepsilon_n)\|$

↑ 大文字

∵) $A_n - \exp U_n = \exp \log A_n - \exp U_n$

$= O(\|\log A_n - U_n\|) = O(\varepsilon_n)$ は ○K

↑大文字　行列のノルム

$\therefore A_n \exp(-U_n) - 1 = O(\varepsilon_n)$ —(*)

$\therefore \log A_n \exp(-U_n) = \log A_n \exp(-U_n) - \log 1$

$= O(\|A_n \exp(-U_n) - 1\|) = \|O(\varepsilon_n)\|$ ∵) (*) より

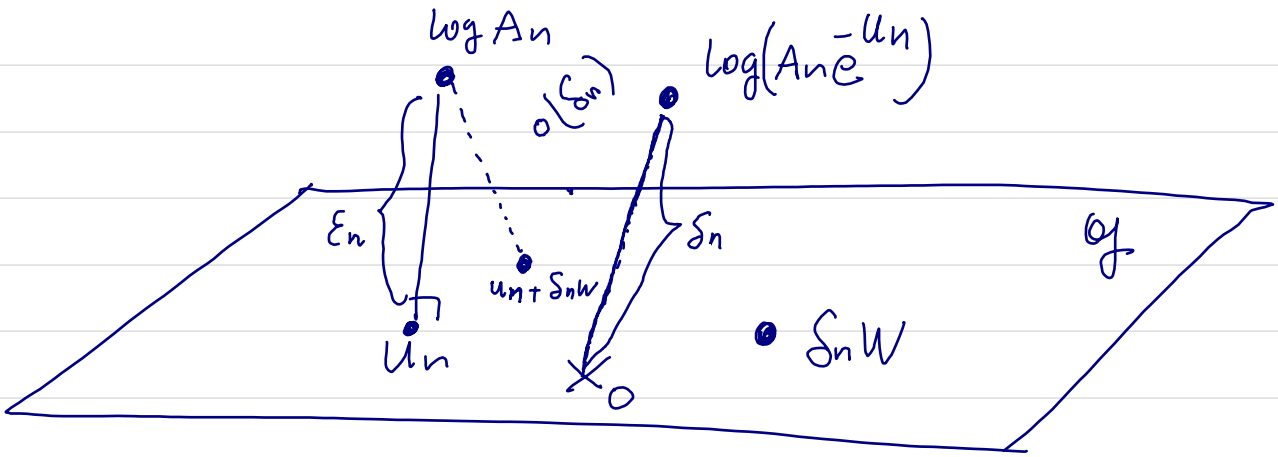
$\delta_n = \|\log A_n \exp(-U_n)\| = \|O(\varepsilon_n)\|$ //

⑤ $\|o(\delta_n)\| \geq \varepsilon_n$ と $\delta_n = \|O(\varepsilon_n)\|$ は矛盾

∵) $\frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \to 0$　$\frac{\delta_n}{\varepsilon_n} < C$ ∃　as $n \to \infty$

この 2 つは矛盾する.

＊ 図を加えた．



$\delta_n W \fallingdotseq \log(A_n e^{-u_n})$ と思っている

$\log A_n - \delta_n W - u_n = o(\delta_n)$

$\log A_n$ 全体 ならば

$\frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \to 0$, $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n} \to C\ (<\infty)$ が証明できる

これは 矛盾

コーギでは☺しなかった

Lemma 88 G Lie group の Lie alg $\mathfrak{g}$ への同値

1) $X \in \mathfrak{g}$ i.e. $e^{tX} \in G$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

2) $\exists A_n \in G$ $\exists \varepsilon_n > 0$ s.t. $\varepsilon_n \to 0$, $X = \lim_n \frac{\log A_n}{\varepsilon_n}$

☺

1) → 2) $A_n = e^{\frac{1}{n}X} \in G$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ とする $\| e^{\frac{1}{n}X} - E \| < 1$ $(n \gg)$

$\lim_n n \log e^{\frac{1}{n}X} = X$

2) → 1) $n\varepsilon_{p_n} \to 0$ となるように p_n を選ぶ

$q_n = \left[\frac{1}{n\varepsilon_{p_n}} \right] \in \mathbb{Z}$ とする.

このとき $\lim_n n q_n \varepsilon_{p_n} = 1$ がわかる.. そこで

$$\lim_n n q_n \log A_{p_n} = \lim_n n q_n \varepsilon_{p_n} \frac{\log A_{p_n}}{\varepsilon_{p_n}} = X$$

つまり $\exp\left[n q_n \log A_{p_n} \right] \to \exp X$

ところで $\exp\left[n q_n \log A_{p_n} \right] = \left(\exp \log A_{p_n} \right)^{n q_n}$

$= (A_{p_n})^{n q_n} \in G$ $\therefore$ $\exp X \in G$. $\therefore X \in \mathfrak{g}$

⓪ $G \ni e$ $\quad \|A-e\| < \exists a \to X = \log A \in \mathfrak{g}$

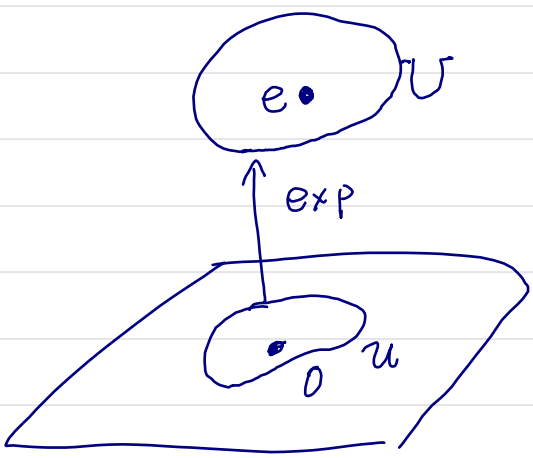
つまり $A = \exp X$, $X \in \mathfrak{g}$ と表せることがわかった.

Thm 8.9 G 線形 Lie groupe, $\mathfrak{g}$ Lie alg. このとき
$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍 $\exists \mathcal{U}$ と G の e の近傍 $\exists U$ s.t.
$\exp : \mathcal{U} \to U$ は同相写像になる.

← ☺ を加えた. コーギでは ☺ しなかった.

☺ Thm 8.7 により $\quad U = \{A \in G \mid \|A-e\| < \exists a\}$
s.t. $A \in U \to X = \log A \in \mathfrak{g}$ かつ $\exp X = A$
$\mathcal{U} = \log U \subset \mathfrak{g}$ とする

① $\mathcal{U}$ は 0 の近傍
☺ $\|X\| < \alpha$ とする



- $\|\exp X - e\| \le e^{\alpha}\|X\| < a$
  は $\|X\| \ll 1$ のときみたされる.
- さらに $\log \exp X = X$ $(\|X\| \ll 1)$
  $\therefore X \in \log U = \mathcal{U}$ $\therefore \mathcal{U}$ は近傍

② onto OK ③ 1:1 $\quad \exp X = \exp Y$
かく $X = \log A$, $Y = \log B$
$\therefore A = B$ つまり $X = Y$ //

④ exp は cont
⑤ log も cont

Thm 8.10 G : connected Lie group, $\mathfrak{g}$ は Lie alg.

$\forall h \in G$ において $\exists X_1 \cdots X_n \in \mathfrak{g}$ で

$$h = \exp X_1 \cdots \exp X_n$$

(∵) Thm 8.8 より

$\exists \mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ $\exists U \subset G$ s.t. $\exp : \mathcal{U} \to U$ 同相

G は connected だから

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \ni h \quad \text{なので}$$

$h \in \exists U^n$ つまり $h = \exp X_1 \cdots \exp X_n$ //

Cor 8.11 G_1, G_2 を connected Lie alg.

$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ とする. このとき $G_1 = G_2$

(∵) $\forall h \in G_1$ は $h = \exp X_1 \cdots \exp X_n$ $X_i \in \mathfrak{g}_1$

また $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ より $\exp X_1 \cdots \exp X_n \in G_2$

$\therefore h \in G_2$ $\therefore G_1 \subset G_2$

$G_1 \supset G_2$ も同様 $\therefore G_1 = G_2$ //