2020・6・22

先週の復習

(ρ, V) G の rep.

$\chi^\rho : G \to \mathbb{C}$, $\chi^\rho(g) = \mathrm{tr}\,\rho(g)$

・$\chi^\rho(e) = \deg\rho$: matrix の大きさ ・$\chi^\rho(gag^{-1}) = \chi^\rho(a)$

Thm 3.3 $|G| < \infty$, (R, V) (S, W) irr. rep.

$$\sum_{a\in G} S_{ij}(a) R_{kl}(a^{-1}) = \begin{cases} 0 & R \not\cong S \\ \dfrac{|G|}{\deg R}\delta_{il}\delta_{jk} & R \cong S \end{cases}$$

∵ Schur's lem.

$C_\ell(G)$ … 類関数全体 (class ft)

class ft … $f(gag^{-1}) = f(a)$ 例 $\chi^\rho \in C_\ell(G)$

Thm 3.4 (ρ, V) rep $(|G| < \infty)$ $f \in C_\ell(G)$

$$\sum_{a\in G} \underbrace{f(a)}_{\in\mathbb{C}}\underbrace{\rho(a)}_{\in GL(V)} = \underbrace{\frac{|G|}{\deg\rho}\langle \overline{\chi_\rho}, f\rangle}_{\in\mathbb{C}} I_V$$

※ $\langle \alpha, \beta\rangle = \dfrac{1}{|G|}\sum_G \overline{\alpha(a)}\beta(a)$

∵ 左 $= A_f$ とおく $\quad A_f : V \to V$

$\rotatebox{90}{=}$

$\sum_a f(a)\rho(a)$

$$A_f \rho(g) = \rho(g) A_f \quad {}^\forall g \in G$$

Schur's lem より $\quad A_f = {}^\exists c\, I_V$

両辺の trace をとる

V の dim のこと

$$\operatorname{Tr} A_f = c \operatorname{Tr} I_V = c \deg \rho$$

$\rotatebox{90}{=}$

$$\sum_a f(a) \operatorname{Tr} \rho(a) = \sum_a f(a) \chi^\rho(a)$$

$$= |G| \langle \overline{\chi^\rho}, f \rangle$$

$$\therefore \quad c = \frac{|G| \langle \overline{\chi^\rho}, f \rangle}{\deg \rho} \qquad //$$

Thm 3.5 ρ, σ を G の irr. rep とする

$$\langle \chi^\rho, \chi^\sigma \rangle = \begin{cases} 0 & \rho \not\cong \sigma \\ 1 & \rho \cong \sigma \end{cases}$$

∵

$$\langle \chi^\rho, \chi^\sigma \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_a \overline{\chi^\rho(a)} \chi^\sigma(a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_a \chi^\rho(a^{-1}) \chi^\sigma(a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_a \mathrm{Tr}\, \rho(a^{-1}) \cdot \mathrm{Tr}\, \sigma(a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_a \sum_{ij} \rho_{ii}(a^{-1}) \sigma_{jj}(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{ij} \underbrace{\sum_a \rho_{ii}(a^{-1}) \rho_{jj}(a)}_{\text{Thm 3.3}}$$

$$\underset{\text{Thm 3.3}}{=} \frac{1}{|G|} \begin{cases} 0 & \rho \not\cong \sigma \\ \dfrac{|G|}{\deg \rho} \underbrace{\sum_{ij} \delta_{ij} \delta_{ij}}_{\deg \rho} = |G| & \rho \cong \sigma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \rho \not\cong \sigma \\ 1 & \rho \cong \sigma \end{cases}$$

//

Ex. $\rho_1, \dots, \rho_K$ irr rep 互いに同値でない

$\Rightarrow \chi^{\rho_1}, \dots, \chi^{\rho_K} \in C(G)$ は互いに直交.

$$\langle \chi^{\rho_i}, \chi^{\rho_j} \rangle = \delta_{ij}$$

ρ : G の rep とする. $|G| < \infty$

$$\rho = \underbrace{\rho^1 \oplus \cdots \oplus \rho^1}_{m_1} \oplus \underbrace{\rho^2 \oplus \cdots \oplus \rho^2}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\rho^K \oplus \cdots \oplus \rho^K}_{m_K} \quad \text{—} (*)$$

ρ^i は irr. rep.

$= m_1 \rho^1 \oplus \cdots \oplus m_K \rho^K$ と表す. m_j ρ^j の重複度

$m_\mu = (\rho ; \rho^\mu)$ … ρ の中で ρ^μ の重複度

Lemma $\quad m_\mu = \langle \chi^\rho, \chi^{\rho^\mu} \rangle \qquad \chi^{\rho \oplus \sigma} = \chi^\rho + \chi^\sigma$

$\because \quad \chi^\rho = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu \chi^{\rho^\mu}$

$\therefore \langle \chi^\rho, \chi^{\rho^\mu} \rangle = m_\mu \langle \chi^{\rho^\mu}, \chi^{\rho^\mu} \rangle = m_\mu$ //

Thm 3.6 ρ, σ irr $(|G| < \infty)$

$\rho \cong \sigma \iff \chi^\rho = \chi^\sigma$

(:) $(\Rightarrow)$ ok

$(\Leftarrow)$ $\rho = \bigoplus_{\mu=1}^{K} \underline{m_\mu} \rho^\mu$, $\sigma = \bigoplus_{\nu=1}^{L} \underline{n_\nu} \sigma^\nu$

$m_\mu = \langle \chi^\rho, \chi^{\rho^\mu} \rangle = \langle \chi^\sigma, \chi^{\rho^\mu} \rangle$

$\therefore \sigma = \bigoplus_{\mu=1}^{K} m_\mu \rho^\mu \oplus X = \rho \oplus X$

同様に

$\therefore \rho = \bigoplus_{\nu=1}^{L} n_\nu \sigma^\nu \oplus Y = \sigma \oplus Y$

$\Rightarrow \rho \cong \sigma$ //

Thm 3.7 $|G| < \infty$. ρ が irr $\iff \langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = 1$

(:) $\Rightarrow$ ok $(\rho \cong \rho)$

$\Leftarrow$ $\rho = \bigoplus_{\mu=1}^{K} m_\mu \rho^\mu$ $\therefore \langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu^2 = 1$

$\exists \mu$ s.t. $m_\mu = 1$, $m_\nu = 0$ $(\mu \neq \nu)$

$\therefore \rho = \rho^\mu$ irr. //

正則表現 regular rep.

$C(G) = V$ 上の rep だった. $\dim V = |G|$

$(\rho(g)f)(a) = f(g^{-1}a)$ 左 reg. rep

$(\rho(g)f)(a) = f(ag)$ 右 reg. rep.

左 reg. rep を ρ^{reg} とする.

$$\mathrm{Tr}\,\rho^{reg}(a) = \chi^{\rho^{reg}}(a) = \chi^{reg}(a)$$

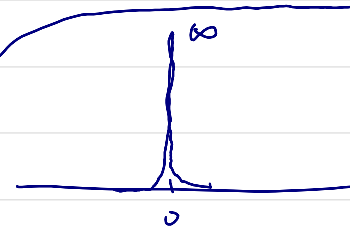
$$\| $$

$$\sum_{x\in G}(\delta_x, \rho^{reg}(a)\delta_x) = \sum_{x\in G}(\delta_x, \delta_{a^{-1}x}) = \begin{cases} |G| & a=e \\ 0 & a\neq e \end{cases}$$

$(\delta_x,\ x\in G)$ は $C(G)$ の base だった

$$\therefore\ \chi^{reg}(a) = \begin{cases} 0 & a\neq e \\ |G| & a=e \end{cases}$$

- キモは デルタ関数



$$\int f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

ρ を $\forall$rep とする.

$\rho = \bigoplus m_\mu \rho^\mu$

$$(\chi^{reg}, \chi^{\rho^\mu}) = \sum_{x\in G}\overline{\chi^{\rho^{reg}}(x)}\,\chi^{\rho^\mu}(x) = \chi^{\rho^\mu}(e)$$

$$\| $$

$$(\rho^{reg};\rho^\mu)$$

$$= \deg\rho^\mu \neq 0$$

Thm 3.8 $\forall$ irr. rep は ρ^{reg} の既約表現の分解に必ず表われる。さらに

$$\rho^{reg} = \deg\rho^1\, \rho^1 \oplus \cdots \oplus \deg\rho^K\, \rho^K$$ 」

∵ $\forall\rho$ irr. とする。$(\rho^{reg};\rho) = (\chi^{reg}, \chi^{\rho}) = \chi^{\rho}(e)$
$= \deg\rho \ (\neq 0)$ 」

$$\chi^{reg}(e) = \mathrm{Tr}\,\rho^{reg}(e) = \sum_{\mu=1}^{K} \deg\rho^{\mu}\,\mathrm{Tr}\,\rho^{\mu}$$

$$\deg\rho^{reg} = \deg C(G) = |G| \qquad \sum_{\mu=1}^{K} (\deg\rho^{\mu})^2$$

$$\therefore\ |G| = \sum_{\mu=1}^{K} (\deg\rho^{\mu})^2$$

∴ $|G| < \infty$ のとき irr な rep の個数は有限。

例 A_4 : 4次交代群 $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$

rep の分解の候補：

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12 \longleftarrow \text{1-dim rep} \times 3,\ \text{3-dim rep} \times 1$$

$$2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \longleftarrow \text{2-dim rep} \times 3$$

実はこっちが正しい

$C(G) \supset C_0(G)$

$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \text{base} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \chi^\rho \\ \rho : \text{irr} \end{pmatrix}$ base

Thm 3.9 $\rho^1, \dots, \rho^K$ irr rep 全部

$\chi^{\rho^\mu} = \chi^\mu$ とすると $\chi^1, \dots, \chi^K$ は $C_0(G)$ の orthonormal system

i.e. $\langle \chi^i, \chi^j \rangle = \delta_{ij}$ かつ $\langle \chi^1, \dots, \chi^K \rangle = C_0(G)$

∵ $\langle \chi^i, \chi^j \rangle = \delta_{ij}$ は oK $\quad \langle F, G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{F(x)} G(x)$

$\langle \chi^i, \dots, \chi^j \rangle = M$ として $C_0(G) = M \oplus M^\perp$

$M^\perp = \{0\}$

∵) $M^\perp \ni f$ をとる $\langle \chi^\rho, f \rangle = 0 \quad \forall \text{rep } \rho$

$$A_f \overset{(\text{Thm } 3.4)}{=} \sum_{a \in G} f(a) \rho(a) = 0 \quad (\text{Thm } 3.4)$$

ρ として ρ^{reg} をとると 意味ある $\quad \delta_e \in C(G)$

$$A_f \delta_e = \sum_a f(a) \rho^{reg}(a) \delta_e$$

$$= \sum_a f(a) \delta_a = 0 \quad f = 0 \text{ といっている.}$$

(つまり $(A_f \delta_e)(x) = f(x) = 0 \quad \forall x \in G$)

Thm 3.10 $|G|<\infty$ とする. G の irr rep 総数は G の共役類の総数と一致する.

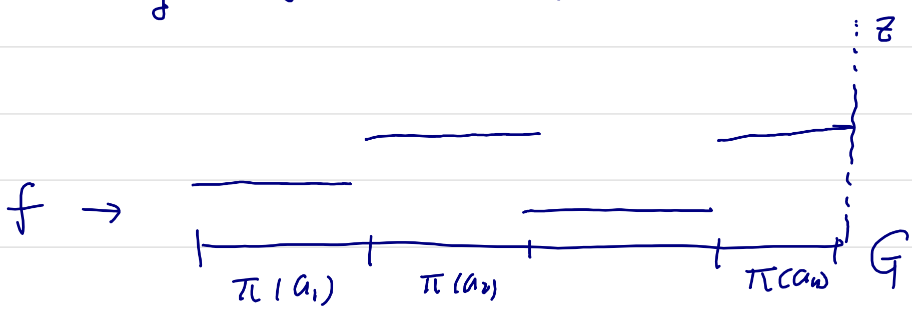
$\because$ $f \in C_0(G)$ $\pi(a) \sim$ 代表元 a の共役類

$\pi(a) \ni h, g \rightsquigarrow h = {}^{\exists}x g x^{-1}$ なので

$f(h) = f(xgx^{-1}) = f(g)$. つまり f は $\pi(a)$ 上で定数関数になっている.

(G の subset と思って)

$$G = \bigcup_{j}^{n} \pi(a_j) \qquad \pi(a_j) \cap \pi(a_i) = \phi \ (i \neq j)$$



$\pi(a_j)$ 上での f の値を $z_j\ (\in \mathbb{C})$ とすると

f を $f = (z_1 \cdots z_n)$ と表してもいい.

つまり $f \in C_0(G)$ を $\mathbb{C}^n$ の点と思っていい.

$\therefore$ $\dim C_0(G) = n =$ 共役類の個数

$\quad\quad \parallel$

irr. な rep の個数 //

$$C_0(G) = \langle \chi^{\rho_1} \cdots \chi^{\rho_k} \rangle \quad \text{irr.}$$

Ex もう一度 A_4 について

- A_4 $\quad |A_4| = 12$

- A_4 の共役類の # $= 4$

$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12$ OK

$2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$ NG $\blacksquare$