2020・6・1

先週のつけたし

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1) \ + \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$

$\therefore$ $[0,1]$ 0と1を同一視 $\bigcirc \cong [0,1]$.

§2.2 既約表現
(Irreducible rep.)

G: group (ρ, V) $\rho(x): V \to V$ bij homo
$(x \in G)$

$G \ni x \mapsto \rho(x) \in GL(V)$

Def 2.5 G group (ρ, V) rep.
$\exists U \subset V$ s.t. $U \ni {}^\forall u$ において $\rho(x)u \in U$
$({}^\forall x \in G)$

のとき Uを ρ-不変という
(ρ-invariant)

$$\boxed{\rho(x)\ U \to U \quad {}^\forall x \in G}$$

Def 2.6 (ρ, V) G のrep.

① ρ-inv な subspace が $\{0\}$ と V のみのとき
(ρ, V) を irreducible rep という.

② irreducible でないとき 可約 (reducible)という

Def 2.7 (ρ, V) rep of G

① $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ V_j は ρ-inv.

② $\rho\lceil_{V_j}$ が irr.

このとき (ρ, V) は 完全可約 という.」

注 (ρ, V) が reducible $\Rightarrow$ 「$\exists U \subset V$ st $\rho(x) U \subset U$ $(\forall x)$」

$U \oplus \overset{\exists}{U'} = V$

U' が ρ-inv とは限らない.

行列 のコトバでいう.

(ρ, V) G の rep. 完全可約 $\Leftrightarrow$ $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$
$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m$

ただし $\rho_j = \rho\lceil_{V_j}$

$\forall A \in G$ に対して $\rho(A)$ の行列表示を考える.

V_j の base $e_{j1} \cdots e_{jn_j}$ $j = 1, \ldots, m$

$\left(\sum_{j=1}^{m} n_j = \dim V \right)$ $\rho_j(A) : V_j \to V_j$

行列表示を A_j とする.

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Lem 2.3 (ρ, V) G の rep 次を仮定する

「$\exists U \subset V$ が ρ-inv $\Longrightarrow$ ① $\exists U' \subset V$ s.t. $V = U \oplus U'$
② U' は ρ-inv.」

$\Longrightarrow$ (ρ, V) は完全可約.

(証) $\forall (\rho, V)$ irr. なら ok

$\forall (\rho, V)$ reducible とする

$\exists U \subset V$ ρ-inv. ∴ 仮定より $\exists U'$ s.t. $\dfrac{U \oplus U' = V}{U' \text{ は } \rho\text{-inv.}}$ ①

① $\rho|_U$ と $\rho|_{U'}$ が irr ならば ok

② $\rho|_U$ と $\rho|_{U'}$ の少なくとも一つが reducible とする.

$\rho|_U$ が reducible とする $\exists U'' \subset U$ s.t. U'' が ρ-inv.

仮定より $\underline{V = U'' \oplus \overset{\exists}{U'''}}$ ② U''' は ρ-inv.

$V = \underline{U''} \oplus \underline{U''''} \oplus U'$

U'''' も ρ-inv. とできる

これをくり返す. //

Thm 2.5 $|G| < \infty$ のとき G の $\forall$rep は完全可約

(証) $\forall (\rho, V)$ rep は unitary rep と思っていい.

$(\rho(x)u \ \ \rho(x)v) = (u, v)$ $\rho(x)$ は unitary on V.

$V \supset U$ が ρ-inv. $U^\perp \oplus U = V$

$\rho(x) U^\perp \subset U^\perp$ (∵) $(\rho(x)u, v)$ $\begin{matrix} u \in U^\perp \\ v \in U \end{matrix}$

$= (\underline{\rho(x)^{-1}\rho(x)u}, \rho(x)^{-1}v) = \underset{=0}{(u, \rho(x^{-1})v)}$ $\begin{matrix} v \\ \Downarrow \end{matrix}$

∴ Lem 2.3 より (証) は終り //

Thm 2.6 (Shur の lemma)

(ρ, V) (σ, W) が G の irr rep.

このとき $\Gamma : V \to W$ s.t. $\Gamma\rho(x) = \sigma(x)\Gamma$ $(\forall x)$

$\Longrightarrow$ $\Gamma = 0$ または bijective

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\Gamma"] \\
V \arrow[r, "\sigma"'] & V
\end{tikzcd}$$

$\because$ $\Gamma = 0$ のときは ok

$\Gamma \neq 0$ とする.

- $\mathrm{Ker}\,\Gamma \ni u$

$\Gamma\rho(x)u = \sigma(x)\Gamma u = 0$ $\therefore$ $\rho(x) : \mathrm{Ker}\,\Gamma \to \mathrm{Ker}\,\Gamma$

$\therefore$ $\mathrm{Ker}\,\Gamma$ は ρ-inv. $\therefore$ $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{0\}$ or V

もし $\mathrm{Ker}\,\Gamma = V$ なら $\Gamma u = 0$ $\forall u$ … NG

$\therefore$ $\mathrm{ker}\,\Gamma = \{0\}$ $\therefore$ Γ 1:1

- $\mathrm{Im}\,\Gamma \ni u$ $\quad u = \Gamma v$

$\sigma(x)u = \sigma(x)\Gamma u = \Gamma\rho(x)u$

$\therefore$ $\sigma(x)u \in \mathrm{Im}\,\Gamma$ $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\Gamma$ は σ-inv.

$\therefore$ $\mathrm{Im}\,\Gamma = \{0\}$ or V $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\Gamma = V$ $\therefore$ Γ onto. //

Cor 2.7 (ρ, V) は $\underline{\underline{\text{完全可約}}}$ とする
この とき

(ρ, V) が irreducible $\Leftrightarrow$ $T\rho(x) = \rho(x)T$ $\forall x$ $\to T = cI$ $\boxed{T: V \to V \text{ linear}}$

∵) $(\Rightarrow)$ T の eigenvalue を α

$T - \alpha I : V \to V$ $\underline{\text{bijective ではない}}$

$(T - \alpha I)\rho(x) = \rho(x)(T - \alpha I)$

Shur の lemma より $T - \alpha I = 0$ or $\underset{NG}{\text{bij}}$

∴ $T = \alpha I$.

$(\Leftarrow)$ 対偶

irr でない $\longrightarrow \exists T \neq cI$ s.t. $T\rho(x) = \rho(x)T$

$V \supsetneq \exists U$ ρ-inv. $V = U \oplus U'$ ← ρ-inv.

$p: V \to V$ projection to U $p \neq I$

$\underline{p\rho(x)u = \rho(x)pu}$ $\forall u \in V$

$u = u_1 + u_2 \in U \oplus U'$

$p\rho(x)(u_1 + u_2) = p\rho(x)u_1$ ∴ 正しい

$\rho(x)p(u_1 + u_2) = \rho(x)pu_1$ ∴ $\underline{p \neq I}$ //

Cor 2.7' G. Abel (ρ, V) irr. な rep
($|G|<\infty$ とは限らない. 完全可約とも限らない)

このとき $\dim V = 1$

∵ $\rho(a)\,\rho(x) = \rho(x)\,\rho(a)$ $(\forall x \in G)$

$\Rightarrow \rho(a) = c I$ $\quad c = c(a) \in \mathbb{C}$

//

例 $\{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$ $\quad a^n = 1$

(σ, V) irr. $\quad \dim V = 1$

$\sigma(a^m) = \sigma(a)^m \in \mathbb{C}$ $\quad \sigma(a) = \alpha$

$\alpha^n = 1$ $\quad \therefore\ \alpha = e^{\frac{2\pi i}{n} k}$ $\quad k = 0, \ldots, n-1$

$\sigma_k(a^m) = e^{\frac{2\pi i}{n} km}$ $\quad k = 0, \ldots, n-1$

$\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ irr. な rep 全部.

§3 Quantum Mechanics

1926 E. Schrödinger

$$\left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right)\varphi = E\varphi \qquad E \in \mathbb{R} \qquad \underline{\underline{d=3}}$$

φ : 水素内の electron を表す. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$

× $|\varphi(x)|^2 \in \mathbb{R}$ が存在確率を表す

$$H\varphi = E\varphi$$

φ : eigenfunction

E : eigenvalue

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$x = (x\ y\ z)$$

$\frac{1}{|x|}$ ... potential

$$x \times \mathbb{P} = \mathbb{L} \qquad \mathbb{P} = -i\nabla = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\mathbb{L} = (L_x, L_y, L_z) \qquad L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

L_y, L_z も同様

$$\boxed{U_\theta = e^{i\theta\cdot\mathbb{L}} \qquad \theta \in \mathbb{R}^3}$$ ← 回転を表す.

$$\theta_1 L_x + \theta_2 L_y + \theta_3 L_z$$

$\{ U_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^3 \} = G$

$\times$ $\underbrace{U_\theta H U_\theta^{-1} f = H f}$ ①

つまり $H\varphi = E\varphi$

$\downarrow$

$U_\theta H \varphi = E U_\theta \varphi$

$\downarrow$

$\underline{U_\theta H U_\theta^{-1}} U_\theta \varphi = E U_\theta \varphi$

$H \underline{U_\theta \varphi} = E \underline{U_\theta \varphi}$ これも eigenfunction

$V_E = \{ \varphi \mid H\varphi = E\varphi \}$

$U_\theta : V_E \to V_E$ つまり V_E 上で G の rep を考えることができる.

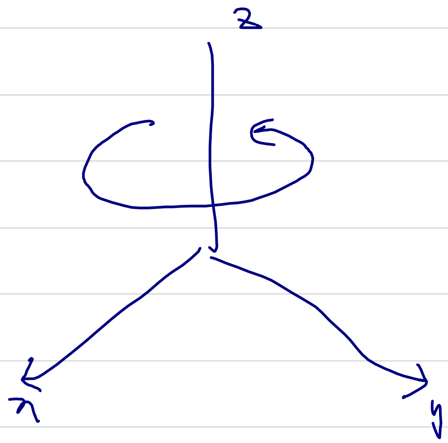
$\dim V_E = n$ $\underline{V_E = \langle f_1, \dots, f_n \rangle}$

$$U_\theta f_m = \sum_{k=1}^{n} D_{km}(\theta) f_k$$

$\left(D_{ij}(\theta) \right)_{ij}$ 表現行列になっている.

$$G = \{ U_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^3 \} \supset G_z = \{ U_{(0\,0\,\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

z 軸の回りの回転
表す



G_z は Abel　　　G は Abel でない

$$G_z : V_E \longrightarrow V_E$$

$$\dim V_E = n$$

次週は　$H\varphi = E\varphi$

V_E を求めて、G_z の V_E 上の表現を求める.