2020・5・18

$N \triangleleft G$ 　 N normal subg. $\Leftrightarrow xN = Nx \quad \forall x \in G$

$\Leftrightarrow \left(g \in N \leftrightarrow xgx^{-1} \in N \quad \forall x \in G \right)$

$GL(n, \mathbb{R}) \triangleright SL(n, \mathbb{R})$ 　 ∵) $\forall A \in SL \to BAB^{-1} \in SL$
$\forall B \in GL$

Prop 1.5 　 $N \triangleleft G$ のとき G/N は group.

☺ $G/N \ni A, B$ 　 $A = aN, \ B = bN$

$AB = abN$ と定義する

× well-defined ∵) $A = a'N, \ B = b'N$ のとき

$AB = a'b'N$ 　実は $abN = a'b'N$

∵) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

なので $(ab)^{-1}(a'b') = b^{-1}a^{-1}a'b'$

$= \underbrace{b^{-1}a^{-1}a'b}_{N} \underbrace{b^{-1}b'}_{N} \in N$ 　 //

× 群になっている.

$(AB)C = (ab)cN = a(bc)N = A(BC)$

$A^{-1} = a^{-1}N$, 　単位元 $= eN = N$

Def 1.6 　 G/N 剰余群

例　$\mathbb{Z} \triangleright n\mathbb{Z}$　　$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ group

例　$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$

$\langle \{ [a, b] \mid a, b \in G \} \rangle = D(G) \triangleleft G$

$G/D(G)$ Abel group

$\because)$ $G/D(G) \ni A, B$　　$A = aD(G),\ B = bD(G)$

$ABA^{-1}B^{-1} = [a, b]D(G) = D(G)$　　$\therefore ABA^{-1}B^{-1} = e$

$G/D(G)$ の単位元

逆に $N \triangleleft G$　　G/N Abel とする

$G/N \ni \underset{A}{aN}, \underset{B}{bN} \rightarrow ABA^{-1}B^{-1} = [a, b]N = N$

$\Updownarrow$

$aba^{-1}b^{-1} \in N$

$\therefore [a, b] \in N \rightsquigarrow D(G) \subset N$

$\therefore$　G/N が Abel $\Rightarrow D(G) \subset N$

§1.4 同型と準同型
isomorphism　homomorphism

Def 1.7　G, G' groups　$\varphi: G \to G'$

① $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $\leftrightarrow$ φ を homomorphism

② ① + $\underline{\underline{\text{bijective}}}$ $\leftrightarrow$ φ を isomorphism

$G \cong G'$ if $\exists \varphi: G \to G'$ iso.

例　$N \triangleleft G$　$\pi: G \to G/N$, $x \mapsto xN$

π は homo. だが iso ではない.

Lemma 1.6　$\varphi: G \to G'$ homo

$\mathrm{Ker}\,\varphi \triangleleft G$　$(\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\})$

(∵)　$\mathrm{Ker}\,\varphi \ni y \to \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} = e$

∴ $xyx^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$　∴ $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は normal //

Thm 1.7 $\varphi : G \to G'$ homo + <u>onto</u> このとき.

$G/\ker\varphi \cong G'$

(∵) $\underline{g} : G/\ker\varphi \to G'$

$\quad\quad\quad x\ker\varphi \mapsto \varphi(x)$

は iso になる.

∵) well-defined」 $x\ker\varphi = x'\ker\varphi$ とする

∴ $x^{-1}x' \in \ker\varphi$ ∴ $\varphi(x^{-1})\varphi(x') = e$ ∴ $\varphi(x') = \varphi(x)$

homo」 $g(XY) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = g(X)g(Y)$

$X = x\ker\varphi,\ Y = y\ker\varphi$

1:1」 $g(X) = g(Y)$ とする → $\varphi(x) = \varphi(y)$

$\downarrow$ homo

$\varphi(y^{-1}x) = e$

∴ $y^{-1}x \in \ker\varphi$

∴ $x\ker\varphi = y\ker\varphi$ ∴ $X = Y$

onto」 easy.

//

例) $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$\varphi : GL(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$

$\quad\quad A \mapsto \det A \ (\neq 0)$

は homo, onto ∴ $\ker\varphi = SL(n; \mathbb{K})$

∴ $GL/SL \cong \mathbb{K}^\times$

§1.5 Transformation group

Def 1.8 (G, X) G group, X set

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned}$$

次をみたすとき G は X の transformation という

① $(ab)x = a(bx)$

② $ex = x$

- $H_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$ isotropic group or little group.
  $(x \in X)$

G は X に effective に作用する

$\Longleftrightarrow \bigcap_{x \in X} H_x = \{e\}$

- $X \ni x, y$ に対して $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G$ st $gx = y$

$$x \xrightarrow{\exists g} y$$

$X/\sim$ の元を orbit という

特に

$X/\sim = \{X\}$ のとき X を homogenous space という

G は X に transitive に作用する.

i.e. $\forall x, y \in X$ に対して $\exists g \in G$ st $gx = y$

例) $(GL(n,\mathbb{K}), \mathbb{K}^n)$ は effective しかし transitive ではない.

∵) $gx = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$ とすると

$(g-E)x = 0 \quad \therefore (y, (g-E)x) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

$\therefore g-E = 0 \quad \therefore g = E \quad \therefore$ effective

$GL(n,\mathbb{K})/\sim \; = \{\mathbb{K}^n/\{0\}, \{0\}\}$ なので transitive でない

各自チェックして下さい.

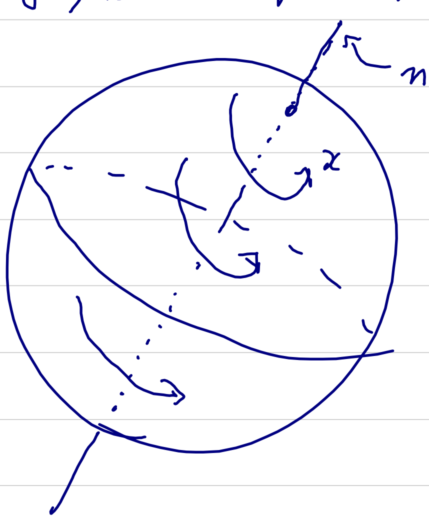
同様に $(O(n), S^{n-1})$

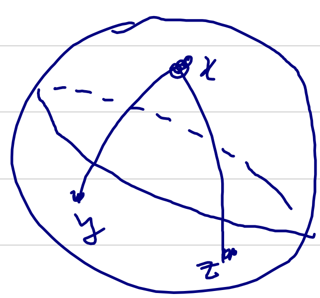
S^{n-1} $(\subset \mathbb{R}^n)$ 単位球 は transitive

$x \in S^{n-1}$

H_x = 右図のように n を軸とした回転のこと

$H_x \cong O(n-1)$





標準モデル　$H \subset G$ subgroup.

G/H を左剰余類全体

$(G, G/H)$
group　set

$$G \times G/H \to G/H$$
$$(a, X) \longmapsto axH$$
$X = {}^\exists xH$

これは transitive になる.

∵) $G/H \ni X = xH$, $Y = yH$ に対して $yx^{-1}X = yx^{-1}xH = yH = Y$,
∴ $X \sim Y$

$(G, G/H)$ が標準モデルといわれる理由.

Def 1.9 $(G, X) \cong (G', X')$
$\Longleftrightarrow$ ① ${}^\exists \varphi : G \to G'$ iso
② ${}^\exists f : X \to X'$ bijective
s.t. $f(ax) = \varphi(a) f(x)$　${}^\forall a \in G$ ${}^\forall x \in X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X' \arrow[d, "\varphi(a)"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

Thm 1.9 (G, X) transitive とする. このとき

$$(G, X) \cong (G, G/H_{x_0})$$

∵ ① $\varphi : G \to G$ iso

② $f : X \to G/H_{x_0}$ bijective

で Def 1.9 をみたすものを構成すればいい.

φ : identity

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & G/H_{x_0} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x = a x_0 & \longmapsto & \pi(a) \end{array}$$

$$x_0 \xrightarrow{\exists a_x} x$$

$$f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \pi(a) \quad (x = a x_0)$$

f は well-defined かつ bij. 示せる.

well-defined ∵) $x = b x_0$ のとき $a x_0 = b x_0$ ∴ $a^{-1} b \in H_{x_0}$

∴ $a H_{x_0} = b H_{x_0}$ ∴ $\pi(a) = \pi(b)$ ∴ f は well-defined

injective ∵) $\underset{a x_0}{f(x)} = \underset{b x_0}{f(y)}$ とすると 同様に $a^{-1} b \in H_{x_0}$

∴ $a x_0 = b x_0$ ∴ $x = y$

surjective ∵) π が surjective なので OK

homo ∵) $f(a\underset{b x_0}{x}) = f(a b x_0) = \pi(ab) = ab H_{x_0} = a\pi(b)$

$= a f(x)$

φ は identity だから $f(ax) = \varphi(a) f(x)$ //

§ 1.6 群の直積と半直積

Def 1.10 G_1, G_2 groups

$G_1 \times G_2$ に対して $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$

と積を定義したものを G_1 と G_2 の直積という.

$\{(x, e_2) \mid x \in G_1\} = N_1$ e_2 は G_2 の単位元.

$\{(e_1, y) \mid y \in G_2\} = N_2$ e_1 は G_1 の 〃

このとき $N_1 \triangleleft G_1 \times G_2$ $N_2 \triangleleft G_1 \times G_2$

$N_1 N_2 = G_1 \times G_2$

$N_1 \cap N_2 = \{(e_1, e_2)\}$ ← $G_1 \times G_2$ の単位元

Thm 1.10 $N_j \triangleleft G$ $j = 1, 2$

(1) $N_1 N_2 = G$ (2) $N_1 \cap N_2 = \{e\}$

のとき $G \cong N_1 \times N_2$

これから $xyx^{-1}y^{-1} = e$ がわかる

∵ $\varphi : N_1 \times N_2 \longrightarrow G$

$(x, y) \longmapsto xy$

Injective: $xy = x'y'$ とする. このとき $(y')^{-1}(x')^{-1} xy = e$

$\therefore \underbrace{x x'^{-1}}_{N_1} \underbrace{y y'^{-1}}_{N_2} = e$ $\therefore x x'^{-1} = e = y y'^{-1}$ $\therefore x = x'$, $y = y'$ //

- surjective は ok
- homo は ok.