2020・5・11

§0 数理物理に表れる群

$$\underset{\sim\sim\sim}{H = -\frac{1}{2}\Delta + V}$$

$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $V(x) =$ ポテンシャル

- $H\varphi = E\varphi$ $\quad \varphi = \varphi(x),\ E \in \mathbb{R}$
- $i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = H\varphi_t$ $\quad$ Schrödinger方程式

$\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$

1925 Heisenberg
1926 Schrödinger

$V(x) = -\frac{1}{|x|}$, $|x|^2$, …, etc

✓ $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x - v)$ 並進
✓ $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Rx)$ 回転) 群 ← 連続

✓ $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(-x)$ 空間反転
✓ $\varphi(x,t) \longrightarrow \overline{\varphi(x,-t)}$ 時間反転) 群 ← 有限

$\varphi \longrightarrow \underset{\sim}{U}\varphi$

$E U\varphi = U H\varphi = \underbrace{U H U^{-1}}_{= H} U\varphi$ $\quad \therefore\ H \underset{\sim}{U\varphi} = E \underset{\sim}{U\varphi}$

$(U H U^{-1} = H)$

§1 群の構造

§§1.1 群 (group)

Def 1.1 $(G, \cdot)$ が group $\Leftrightarrow$

(1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(2) $\exists e \in G$ st $ex = xe = x$

(3) $\forall x \in G$ $\exists x^{-1}$ st $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ $\lrcorner$

- $x \cdot y = y \cdot x$ $(\forall x, y \in G)$ のとき Abel 群
- $\#G = |G|$ …… G の位数

  $|G| < \infty$ finite group.

例 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ Abel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

例 $GL(n; \mathbb{K})$ … $n \times n$ 行列, 逆が存在.

例 $X_n = \{1, \dots, n\}$

$S_n = \{ \sigma : X_n \to X_n \mid \text{bijective} \}$

symmetric group

例 $a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n} = e$ $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

cyclic group.

§§1.2 Subgroups

Def 1.2 $H \subset G$ が subgroup $\Leftrightarrow$

(1) $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$

(2) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ ⌟

Lemma 1.1 $H \subset G$ subgroup $\Leftrightarrow$ $x, y \in H \to x y^{-1} \in H$

∵ $(\Rightarrow)$ 自明

$(\Leftarrow)$ $x \in H$. $e = x \cdot x^{-1} \in H$

$\therefore$ $x^{-1} = e x^{-1} \in H$

また $x, y \in H \to xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$ //

記号 $A, B \subset G$ subgroup

$AB = \{ x \cdot y \mid x \in A, y \in B \}$

$A^{-1} = \{ x^{-1} \mid x \in A \}$

$a \in A$

$aA = \{ ax \mid x \in A \}$

例 $\underline{\underline{3\mathbb{Z}}} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は subg. of $\mathbb{Z}$

例 $\underline{\underline{S}}L(n:\mathbb{K}) = \{A \in GL(n:\mathbb{K}) \mid \underbrace{|A|}_{\det} = 1\}$

$SL \ni A, B \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 1.$

- $U(n) = \{A \in GL(n:\mathbb{C}) \mid A^* A = E\}$
  unitary 行列全体
- $O(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid A^t A = E\}$
  直交行列全体

$A^* = \overline{A^t}, \quad A^t \cdots$ Aの転置.

$SU(n), \quad SO(n) \quad \cdots$ 行列式 $= 1$

$S \subset G$ subset

講義では書かなかった

$\langle S \rangle$ -- Sで生成される subgroup.

$\langle S \rangle = \bigcap_{\underbrace{S \subset K}} K \doteq \{a_{i_1} \cdots a_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, a_{i_j} \in S \cup S^{-1}\}$

Kは subgroup.

例 $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \quad \forall y \in G\}$

G の center という. これも sub group.

Def 1.3 $H \subset G$ subg.

① $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$ (同値関係になる)

G/H …… 同値類全体

② $x \sim y \iff xy^{-1} \in H$ (同値関係になる)

$G \backslash H$ … 同値類全体

G/H の元を 左剰余類

$G \backslash H$ 〃 右 〃

例) $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ subgroup.

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $x \sim y \iff x - y \in 3\mathbb{Z} \iff$ xとyを3で割ると余り等しい.

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{X_0, X_1, X_2\}$

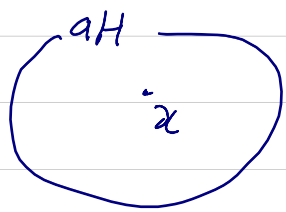
余り2全体

余り0全体 余り1全体

⊙ $H \subset G$ subg.

このとき aH は a を代表元にもつ左剰余類

∵) $aH \ni x \Rightarrow x = ah$



$x^{-1}a = h^{-1}a^{-1}a = h^{-1} \in H$

$\therefore\ x \sim a$

また $a \sim y \to y^{-1}a \in H$

$\therefore\ y^{-1}a = h \ \therefore\ y = ah^{-1} \in aH$

Lemma 1.2 $H \subset G$ subgroup

- $G = \bigcup_{j} a_j H$ $(a_j H \cap a_i H = \phi)$
- $a_j H$ は a_j を代表元にする左剰余類

同様

- $G = \bigcup_{j} H b_j$
- $H b_j$ は b_j を代表元にする右剰余類

$\# \{ a_j H \} = [G : H]$ Hのindex

$|G| < \infty$ のとき $|G| = [G:H] |H|$

Lemma 1.3 $|G| < \infty$, $H \subset G$ のとき

$|G| = [G:H] |H|$

$|G| = p$ (素数) のとき 非自明な $H \subset G$ はない。

$|G|$ を G の位数といった。

$G \ni x$ で $x^n = e$ となる最小の n を x の位数

例 $S = \{ e, a, \ldots, a^{n-1} \} \subset G$ (aの位数はn)

$|S| = n$ $\therefore$ Gはnで割れる。

Def 1.4 $x, y \in G$ に対して
$\exists a \in G$ st $y = axa^{-1}$ のとき

$x \underset{G}{\sim} y$ とかいて, x と y は共役という」

同値関係になる.

$G = \bigcup_i G_i$ ← 同値類

$|G| < \infty$ のとき $|G| = \sum_i |G_i|$

また $|G_i|$ は $|G|$ の約数になる. ← これは自明ではない

例 $|S_3| = 3! = 6$

S_3 の共役類 $\underbrace{\{e\}}_{1}$ $\underbrace{\{(12), (23), (31)\}}_{3}$ $\underbrace{\{(123), (132)\}}_{2}$

$1 + 3 + 2 = 6$

例 $Z(G) \ni x \rightarrow axa^{-1} = x$ $\therefore \{x\}$ は共役類

§§ 1.3 Normal subgroup.

Def 1.5 $N \subset G$ subgroup が normal subgroup

$\Longleftrightarrow$ $xN = Nx$ $(\forall x \in G)$ ┘

$N \triangleleft G$ と表す.

$N \triangleleft G \Leftrightarrow (N \ni a \Leftrightarrow xax^{-1} \in N \ \forall x \in G)$

例 $SL(n;\mathbb{C}) \triangleleft GL(n;\mathbb{C})$

$SL \ni A$ のとき $|XAX^{-1}| = |A| = 1$ $\forall X \in GL$

$\therefore XAX^{-1} \in SL$ $\forall X \in GL$

$\therefore SL \triangleleft GL$

例 $Z(G) \triangleleft G$

$a, b \in G$ に対して $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ commutator

$D(G) \cdots$ commutator から生成される subgroup.

Lemma 1.4 $D(G) \triangleleft G$

(:) $x^{-1}[a,b]x = [x^{-1}ax, x^{-1}bx] \in D(G)$ $(\forall x \in G)$

$\therefore D(G) \triangleleft G.$ ┘

非自明な normal subgroupをもたない G を Simple という