時 間 の 数 理

廣 島 文 生*

2010 年 7 月 30 日・九大公開講座

*九州大学大学院数理学研究院

目 次

1　いろいろな時間

1.1　はじめに

「時間」といってはじめに思い浮かべることはなんだろうか。13 世紀ころ，西洋ではすでに機械時計なるものが修道院に置かれていたようである。しかし文字盤はなく 1 時間に一度鐘がなるだけで，精度は悪く 1 日に 30 分もおくれた。1927 年に水晶時計が発明され，その誤差は 15 秒/月まで飛躍した。さらに 1955 年にはセシウム原子時計が発明され，その誤差は 3000 万年に 1 秒ほどの誤差しかない。現在の「1 秒」の定義はこのセシウム原子時計の 1 秒にもとずいている。さらに驚くべきことに遥か宇宙の彼方にはパルサーと呼ばれる，高速に自転しながら周期的な光を放つ中性子星があり，このパルサーを時計とみなせば，その誤差は 1 億年に 1 秒ほどになるというから驚かされる[1]。

（時間の測定）最近，3 年遅れで地球に戻ってきた「はやぶさ」が，到達したのは地球から 2 億キロメートル以上離れた長径がわずか 500 メートル (500 キロメートルではない) ほどの筒状の形をした小惑星「いとかわ」だった。はやぶさが小惑星いとかわに到達する以前に NASA/JPL は地球からいとかわに向けて電波を発射し，その反射してくる電波の時間差でもって，いとかわの形を予想していた[2]。その結果は

$$548 \times 312 \times 276m \pm 10\%$$

と見積もられている。それは概ね，はやぶさが撮影したもの

$$535 \times 294 \times 209m$$

に一致している。2 億キロ以上離れた高々500 メートほどの物体の形を電波の反射時間差だけで見積もったことになる。時間を正確に測定する人類の技術の高さには驚かされる。

(天文現象と人類の記録) 昨年上海では皆既日食が観測された。筆者も見学にいったが大雨にさらされ，天文ショーは次回にお預けになってしまった。雨中とはいえ，日食が始まるや，あたりは突然闇に襲われ，異様な雰囲気を体験できた。日食の開始時刻，満ち欠けの様子は現在ほぼ完全に予想できる[3]。

日本書記には星食[4]が 3 例出ている。最古のものは舒明天皇 12 年春 2 月甲戌（西暦 640 年 3 月 4 日）に「星入月」と書かれている。現在の天文計算によれば，これはおうし座のアルファ星 (アルデバラン）が 20 時 27 分に月齢 5.9 日の月体の東側から潜入して，21 時

---

[1]『わかる「時間」』別冊ニュートン

[2]J.Ostro, *Mateoritics and Planetaly Science* **39** (2004), 407–424.

[3]100 年間で約 0.002 秒，一日が長くなるそうだ。これを累積すると，2000 年前と今では 5 時間ほどの時差の補正が必要となる。

[4]星が月の後ろに隠れる現象。

25 分に西側から再現したことが分かるそうだ[5]。日本書記の正確さを正当化する[6]事実でもあるだろうし，この記事をまじめに書いていた当時の飛鳥の人たちと，正確な時間の計算をとおして繋がったような気がする。ちなみに日付が特定できる最古の日食記録は

BC776 年 9 月 6 日　(幽王六年十月朔日辛卯)

のもので，中国最古の詩篇『詩経』の「少雅・十月」に記録されている[7]。また BC763 年 6 月 15 日にアッシリア王アッシュール・ダン 3 世が日食を記録した。それを天文学的に割り出すと正確な日付が特定できたため，アッシリア年代学の基点となっているそうだ。今から 2700 年以上前の事件がこのように日付（と時間も）とともに同定できるとは驚き以外の何物でもない。

（相対論） 物理学の世界で「時間」といって先ず始めに思いつくのは「相対性理論」の時間ではないだろうか。アインシュタインによりそれまで絶対的な存在だった時間は相対化され，4 次元時空という概念に組み込まれ，ある意味で 3 次元空間と同じように扱われるようになってしまった。微分幾何学の言葉でいえばローレンツ多様体とか擬リーマン多様体という概念が一般相対論の 4 次元時空に対応するものである。

(宇宙の過去) 相対論を論じるとどうしても宇宙のことを考えざるを得ない。1929 年ハッブルによって宇宙は膨張していることが発見された。その結果，過去に遡れば宇宙は狭い空間に押し込められていたと想像され，所謂ビッグバン理論が完成した。以来宇宙の年齢を正確に決めることが宇宙論の最大の課題のひとつだった。著者が学生時代に読んだ啓蒙書にはそんなことが記されていた。当時ハッブルが計算した宇宙の年齢は 20 億歳で，当時考えられていた地球の年齢より若く不評だったようだ。ちなみに現在，宇宙の年齢は

$$137\text{ 億歳} \approx 10^{10}\text{年}$$

と考えられている。

(宇宙の未来) 宇宙の過去だけではなく未来も予想されている。10^{14} 年後 (100 兆年後) には宇宙はブラックホールと冷えた白色矮星 (黒色矮星) だけになるという。さらに 10^{18} 年後にはブラックホールだけになり，10^{34} 年後には陽子の崩壊がおき，光子と電子・陽電子，ニュートリノだけの世界になり，最後にブラックホールも徐々にエネルギーを失い，

$$10^{100}\text{年後}$$

にはブラックホールさえも蒸発してしまうという[8]。果たしてそのころ「時間」というものが存在しているのだろうか? 雑多な世間に右往左往しているのが愚かに感じるくらい，スケールの大きな話である。

[5]『星の古記録』斉藤国治，岩波新書

[6]『星の古記録』によれば，日本書記，続日本紀には多くの誤った日食の記録も存在する。

[7]インターネットで検索すると日付のないものでは『尚書』に BC1948 年の日食が記載されているそうだ。

[8]『宇宙論入門』佐藤文隆，岩波新書，　『時間の矢』R. モリス，地人選書

（生物と時間）生物に現れる時間に目を移せば，興味深いことがたくさんある。一般に

$$\text{時間} \propto (\text{体重})^{1/4}$$

という関係が成り立つといわれている[9]。これは「体重が増えると時間が長くなる」または「体重が増えると時間の進みが遅くなる」と読む。この関係式は生物の種類によらずに成り立つ。例えば息をする時間，心臓が打つ時間，血液が体内を一巡する時間，寿命などが体重の 4 乗根に比例するそうだ。そこで，寿命も息をする時間も体重の 4 乗根に比例するのだから

$$\text{寿命} \div \text{息をする時間} = \text{定数 (生物の種類によらない)}$$

ということになる。実際この定数は約 5×10^8(5 億) になる。つまりどんな生物も 5 億回息をすれば死を迎えるという。ところで 5 億といえば，三葉虫が地球上に現れる遥か以前の 5 億年前，地球の一日はたったの 21 時間だったそうだ。

(宗教と哲学） もうひとつ。宗教・哲学はなかなか筆者の満足するような「時間」に対する答えを出してくれない。絶対的な神や仏様が宇宙の存在する意味をどこかで示しているのだろうけども，相対論，宇宙論，数学，生物学等々が成し遂げた驚くべき時間に対する成果に比べればあてにならない思いがする[10]。

1.2 時間作用素

この公開講座で話題にするのは量子力学と関係した時間である。天才パウリは

(1.1) 「時間は物理的観測量ではない」

と言い放った。時間は実在するのか？構造はあるのか？最小の時間単位はあるのか？残念ながら，ここで紹介するのはそのようなロマンに満ちたものではない。我々は

強時間作用素と弱時間作用素

とよばれるものをここで紹介する。ただし数学的な議論は極力避けることにする。時間作用素は「時間」とは異なるが，時間作用素と名づけられる確固とした由来はもっている。そして (1.1) に対応するがごとく，時間作用素がある意味で物理的観測量ではないことが示されるのである。

[9]『ゾウの時間ネズミの時間』 本川達雄，中公新書
[10]宗教に間違いがあるというのではない。

2　量子力学

量子力学とは原子，電子などの極微の世界を記述する一つの理論である。von Neumann が『量子力学の数学的原理』を著してから，純粋数学の分野でも関数解析，作用素論，作用素環論，ヒルベルト空間論，確率論として研究されるようになった。誤解を恐れずにニュートン力学と比較しながら量子力学について簡単に述べてみよう[11]。

2.1　古典力学

ニュートン力学でエネルギーは，一般に

$$\text{エネルギー}\ (E) = \text{運動エネルギー}\ (K) + \text{位置エネルギー}\ (V)$$

で与えられる。速度 v で動いている質量 m の物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

で与えられ，地球の中心を基準にすれば位置 x にある質量 m の物体の位置エネルギーは

$$V = gmh(x)$$

となる。ここで, $h(x)$ は地球表面と物体の距離，g は重力定数である。つまり，質量 m の物体が，位置 x にあって速さ v で動いているときのエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

となる。後のために運道量という概念を導入する。それは

$$p = mv$$

で与えられる。運動量 p を使えば E は

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + V(x) \tag{2.1}$$

となる。さてエネルギー E は p と x の関数でもちろん連続的にいろいろな値をとる。p が大きくなれば E は増加するし，$V(x)$ が小さくなれば E はそれに伴って連続的に小さくなるだろう。例をみてみよう。位置エネルギーを無限遠点を基準にして考えれば (無限遠点

[11] ここではヒルベルト空間論（完備な内積空間）による作用素論的な純粋数学的定式化は行わない。

での位置エネルギーをゼロと思う)，位置 x において速度 v で自転する人工衛星のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{gmM}{|x|} \tag{2.2}$$

となる。ここで M は地球の質量。無限遠点を位置エネルギーの基準にしているので，(2.2) で位置エネルギーの部分は負になっている。そのため E が負になることもありうる。$E > 0$ となるとき，人工衛星は地球の重力圏から抜け出せることになる。ちなみに MKS 単位系で

$$\begin{aligned} &v = c = \text{光速} = 3 \times 10^8, \\ &g = 6.6 \times 10^{-11}, \\ &M = 6 \times 10^{24} \end{aligned}$$

を代入して $E = 0$ となる $r = |x|$ を求めると

$$r = \frac{2gM}{c^2} \simeq \frac{8 \times 10^{14}}{9 \times 10^{16}} \simeq 1 \times 10^{-2} = 1cm$$

となるから，もし地球の半径が $1cm$ まで収縮すれば重力のために光すら脱出できなくなる計算になる。

2.2 量子力学

ここから 1925 年にハイゼンベルグによって発見された量子力学に舞台をうつそう。歴史的な詳細やわずらわしい説明は避けて天下り的に述べることにする。量子力学では p や x は「作用素」という概念に置き換えられる。ここで作用素というのは関数に関数を対応させる写像のことである:

$$\text{作用素} : \text{関数} \to \text{関数}$$

例えば P を[12]

$$P : f \to -i\frac{df}{dx}$$

と定義すれば，作用素である。これは $(-i)\times$ 微分作用素といわれる。また V を関数として

$$S : f \to Vf$$

と定めれば，これも作用素で，掛け算作用素といわれる。さらに

$$\Delta : f \to \frac{d^2 f}{dx^2}$$

[12] 本来 $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$ と定義すべきだが簡単のため $\hbar =$ プランク定数$/2\pi = 1$ とおいた。

はラプラシアンとよばれている作用素である。もちろん $P^2 = -\Delta$ となる。さらに

$$Q : f \to xf$$

という一番簡単な掛け算作用素を定義すれば上述の S は $S = V(Q)$ と表せる。
　さて (2.1) の E で次のような置き換えをする：

$$p \to P, \quad V(x) \to V(Q). \tag{2.3}$$

つまり (2.1) の E を形式的に作用素にしてしまうのである[13]。それを H で表すことにしよう。つまり

$$E \to H = \frac{1}{2m}P^2 + V(Q).$$

H は

$$H : f \to -\frac{1}{2m}\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf$$

のように作用する。この H をシュレディンガー作用素またはハミルトニアン[14]とよび

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta + V$$

と表す。これは古典的なエネルギー E に対応する量子力学の概念であるが，作用素になっているので，古典的な物体のエネルギーとどのように結びつくのか説明する必要があるだろう。とはいっても，古典力学から量子力学へ発展した理屈は正直なところ筆者にもわからない。完成された量子力学が実験と一致すること，そしてミクロの世界ではニュートン力学が通用しないことが量子力学の正当性を主張している。
　具体的な例を見て納得してもらうことにする。

2.3　水素原子内の電子

　水素原子内の電子（負の電荷）は陽子（正の電荷）の周りを高速で回っているという古典的な描像がある。先ほどの人工衛星の例から類推されるようにこの電子のハミルトニアンは次で与えられる：

$$H = \frac{1}{2m}P^2 - \frac{1}{|Q|}. \tag{2.4}$$

[13]量子化とよばれる。
[14]本来ハミルトニアンは物理系のエネルギーを与える作用素であり，その特別なものがシュレディンガー作用素である。

実際にはさまざまな定数があっちこっちにつき，空間次元も 3 であるべきだが，簡単のために，定数は全て省略し，次元は 1 とした。これは

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta - \frac{1}{|x|} \tag{2.5}$$

のようにも表される[15]。さて量子力学では，電子のエネルギーというのは次のように考える。固有値問題

$$H\phi = E\phi, \quad E \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

が解けたとする。このとき

「複素数値関数 $\phi = \phi(x)$ は x での電子の確率振幅を表し，この電子のエネルギーは E である」

と解釈する。ここでいう電子の確率振幅というのは非常に量子力学的な概念で，初めて耳にする方は困惑されるかもしれない。量子力学において電子の位置や運動量は特定されるものではなく，ある領域に存在する確率やある範囲の運動量をとる確率しか与えられない。電子が $A \subset \mathbb{R}^3$ に存在する確率 $\sigma(A)$ は

$$\sigma(A) = \int_A |\phi(x)|^2 dx \tag{2.7}$$

で与えられる[16]。もちろん $\int_{\mathbb{R}^3} |\phi(x)|^2 dx = 1$ と規格化しておく。ここでとても奇妙なことがおきる。上述の E は連続な値をとらない！つまり $E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ という離散的な値しかとらない。そして各 E_j に対応して固有関数 ϕ_j がある：

$$H\phi_j = E_j\phi_j. \tag{2.8}$$

さらに ϕ_j の存在確率の高い領域を調べることも出来る。この領域をエネルギー E_j の電子の軌道と見なすのである。実際これらの結果は実験と一致する。つまり電子は離散的なエネルギーしかとらない。

3 時間作用素

3.1 時間発展とシュレディンガー 方程式

今，時刻ゼロで確率振幅 $\phi = \phi(x)$ の電子が与えられたとしよう。そのハミルトニアンを H とする。さて時刻 t で ϕ はどのような関数 $\phi(x,t)$ になるのだろうか？つまり ϕ で表

[15] 3 次元のときには $\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f$ と定義する。
[16] ちなみに位置の平均は $\int x|\phi(x)|^2 dx$ で与えられる。

される電子が時刻 0 で与えられたとき，時刻 t ではどうなっているかという問題である。ニュートン力学では次のようになる，位置 $x = x(t)$ を求めるためには

$$\begin{cases} x(0) = x \\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \end{cases}$$

を解けばよい。量子力学ではどうか？ϕ が古典的な意味での位置を表すものではないので，一体どういう方程式を満たしているか分からない。

1926 年にシュレディンガーは ϕ が次の線形偏微分方程式を満たすことを発見した：

$$i\frac{d}{dt}\phi(x,t) = H\phi(x,t), \quad \phi(x,0) = \phi(x). \tag{3.1}$$

$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(Q)$ だったので (3.1) をもう少しちゃんと書けば

$$i\frac{d}{dt}\phi(x,t) = -\frac{1}{2m}\Delta\phi(x,t) + V(x)\phi(x,t), \quad \phi(x,0) = \phi(x). \tag{3.2}$$

となる。これをシュレディンガー方程式という。一般に与えられたハミルトニアン H に対して，この方程式を具体的に解くことは難しい。ただ，ϕ が固有方程式 $H\phi = E\phi$ を満たしているときは

$$\phi(x,t) = \phi(x)e^{-itE} \tag{3.3}$$

となることは容易にわかる。

さて作用素論的に (3.1) を解いてみよう。H を数だと思えば

$$\phi(x,t) = e^{-itH}\phi(x) \tag{3.4}$$

が (3.1) の解になっている。実際 $\phi(x,0) = \phi(x)$ かつ

$$i\frac{d}{dt}e^{-itH}\phi = He^{-itH}\phi \tag{3.5}$$

となる。しかし e^{-itH} の意味がはっきりしない。取りあえず数ではないことは確かだが...。実は

$$e^{-itH} : 関数 \to 関数$$

となる作用素の意味をつけることが出来る。さらに (3.5) の怪しい計算も正当化できるのである。それは追々見ることにしよう。

3.2 正準交換関係

量子力学は非可換な世界といわれる。その所以はもちろん，置き換え $p \to P$, $x \to Q$ によって，P, Q が作用素になってしまい，以下に見るように P と Q が非可換（交換しない）になってしまったからである。実際 PQf を積の微分法で計算してみると

$$PQf = -i(xf)' = -if - ixf' = -if + QPf$$

となるから，整理して

$$PQf - QPf = -if$$

となる $[P, Q] = PQ - QP$ と書くことにすれば

$$[P, Q]f = -if$$

となることがわかるだろう。これを業界では

$$[P, Q] = -i \tag{3.6}$$

と表す。(3.6) を正準交換関系（CCR ）という[17]。また $[\cdot, \cdot]$ を交換子とよぶ。

$$[P, Q] \neq 0$$

となるのが非可換の由来である。

3.3 不確定性原理

この章では $\hbar$ を復活させる。その結果 CCR は

$$[P, Q] = -i\hbar$$

となる。不確定性原理について簡単に説明しよう。この原理は未だに続く論争があって，ここで詳細を述べることは不可能である[18]。大筋をみることにしよう。「史上最も美しい式ベスト 10」に数えられる，ハイゼンベルグの不等式またはハイゼンベルグの不確定性原理とは次のようなものである：

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2\pi. \tag{3.7}$$

この不等式は次のように読む。電子の運動量 p と位置 x を同時に測定した時のそれぞれの不確定さ Δp と Δx の積は $\hbar/2\pi$ 以下にすることはできない。例えば運動量を正確に測

[17] Canonical Commutation Relation の略。
[18]『ハイゼンベルグの顕微鏡』石井茂，日経 BP 社

れば ($\Delta p = 0$)，位置の不確定さは無限大になってしまい，位置は全く不明瞭になってしまう。この不等式はミクロな粒子の波動性を示したものであるが，それのみならず物理や哲学の世界に衝撃をもたらした。反面,「不確定さ」の正確な意味が論争の的になったり，この不等式自体の正当性も未だに論争の対象になっている。

数学的に解釈される不確定性原理とは交換関係 $[P, Q] = -i\hbar$ から導かれる次の式をさすことが多い：

$$\sigma(P)\sigma(Q) \geq \hbar/2\pi. \tag{3.8}$$

左辺に現れる $\sigma(X)$ という量は X の標準偏差といわれ

$$\sigma(X) = \sqrt{m((X - m(X))^2)}$$

と表されるものである。$m(\cdots)$ は $\cdots$ の平均を表す。σ は統計的な量であり，これはハイゼンベルグの不等式の一つの解釈にしか過ぎない。(3.8) はケナードの不等式と呼ばれている[19]。

さて，今度はエネルギー E と時間 t の不確定性関係について述べることにしよう。ハイゼンベルグはエネルギーと時間に関する不確定性原理

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2\pi \tag{3.9}$$

も思考実験で導いているが，この意味ははっきりしていなかった。P と Q のように運動量と位置は対応する演算子がありそれらは非可換であった。エネルギーに対応する演算子としてシュレディンガー 作用素が存在するが，時間に対応する演算子が見当たらないので，P,Q と同様の不確定性原理は期待できないと当初から考えられていた。

1930 年ランダウとパイエルスは次のような解釈を与えた。

「位置と運動量の不確定性原理は同時測定の不可能性を示すが，エネルギーと時間の不確定性原理は，ある時間 Δt をおいて測定した 2 つのエネルギーの差 ΔE に関する式だ。」

実際にボーアはアインシュタインの提出した「光子箱の思考実験」で見事に一般相対論を使って (3.9) を示した。

実量子力学では，{ 運動量と位置 } のペアと { エネルギーと時間 } のペアとは至る場面で対をなしている。これをもとに時間作用素を定義してみよう。

[19]現在は小澤の不等式と呼ばれる次の不等式がハイゼンベルグの不等式に代わる有力な不等式といわれている：

$$\Delta p \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \sigma(P) + \sigma(Q) \cdot \Delta p \geq \hbar/2\pi.$$

この不等式によれば Δx または Δp の一方がゼロになっても，もう一方の値が無限大になることはないと主張している。

3.4　弱時間作用素

いよいよ，時間作用素を定義する段になった。シュレディンガー 方程式 $id\phi/dt = H\phi$ をよくよく眺めてみれば

$$H = i\frac{d}{dt} \tag{3.10}$$

と思えなくもない。(3.6) から類推されるように

$$[i\frac{d}{dt}, -t] = -i$$

を満たす。そこで次のように弱時間作用素を定義する。

定義 3.1　（弱時間作用素）次の関係式を満たす対称作用素[20] T_H を H に付随した弱時間作用素とよぶ。

$$[H, T_H] = -i \tag{3.11}$$

上の定義で (3.11) はもちろん作用素としての等式である。つまり $[H, T_H]f = -if$ が成り立つという意味である。

3.5　von Neumann の定理

弱時間作用素 T_H を見つけるためには

$$[H, X] = -i \tag{3.12}$$

という（作用素の）方程式を解かなければならない。これは容易ならざること明らかである。行列で例を見てみよう。A を正方行列とする。

$$ad_A : X \mapsto [A, X]$$

を考えれば，これは $\mathbb{R}^{n^2}$ 上の線形作用素になるので ad_A は $n^2 \times n^2$ 次の正方行列としてあらわされる。それを $\hat{A}$ とする。いま，$ad_A(X) = -iE$ を解きたいのだから，$\hat{A}$ の逆行列の存在をいえばいい。そうすれば $X = -i\hat{A}^{-1}$ となる。しかし，

$$\hat{A}A = ad_A(A) = [A, A] = AA - AA = O$$

[20]対称作用素は 4.1 章で説明する。

なのだから $\hat{A}$ はゼロを固有値をもち，逆行列が存在しないことが分かる。つまり $[A,X]=-i$ を満たす行列は存在しない[21]。つまり (3.12) を考えるときは常に無限次元を対象にしなくてはいけないことになる。さらに，ここで詳細を述べることはできないが，無限次元空間に作用する作用素 X,Y が $[X,Y]=-i$ という関係式を満たせば，少なくとも一つは非連続な作用素になることが知られている。というわけで (3.12) を解くことは容易ではないのである。

ところが von Neumann が驚くべき事実を発見した。それは

$$[A,B]=-i$$

という関係を満たす作用素のペアの多くは本質的に $A=P$, $B=Q$ に限られるという主張である。これはまずい！もしそうであるならば (3.12) を考える意味がなくなってしまいそうだ。詳しく見てみよう。

以降 e^X と書いたら次のことと約束する：

$$e^X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n. \tag{3.13}$$

この X は数とは限らない。行列だったり，微分作用素だったり，シュレディンガー 作用素だったりする。説明するときりがないので，あまり深入りせずに例を挙げるにとどめる。テーラー展開を思い出そう：

$$f(x-y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

そうすると

$$e^{iyP}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iyP)^nf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^nf^{(n)}(x)=f(x-y) \tag{3.14}$$

がわかる。つまり e^{iyP} は

$$e^{iyP}:f(x)\to f(x-y)$$

となる「ずらし作用素」であることがわかる。

注意 3.2 少し数学的なことを言えば，本来 f は何回でも微分できる非常に滑らかな関数でなければ *(3.14)* の計算は出来ない。しかし，いざ計算してみると e^{iyP} は，ずらすだけの作用なので，作用する関数が微分どころか連続である必要もない。このように e^A のように e の肩に作用素 A をのせてしまうと，作用素の定義域が A の定義域より広がることがある。

[21] 簡単に両辺の Trace をとれば $\mathrm{Tr}[A,X]=0\neq -in$ となる。

さて $e^{-itP}e^{-isQ}$ を計算してみよう。関数 f に作用させると $(e^{-isQ}f)(x) = e^{-isx}f(x)$ だったから

$$e^{-itP}e^{-isQ}f = e^{-is(x-t)}f(x-t) = e^{ist}e^{-isx}f(x-t) = e^{ist}e^{-isQ}e^{-itP}f$$

となることがわかるだろう。つまり作用素の等式

$$e^{-itP}e^{-isQ} = e^{ist}e^{-isQ}e^{-itP} \tag{3.15}$$

を得る。これをワイルの関係式という。

さて今, ある作用素の組 A, B がワイル関係式を満たしていると仮定する：

$$e^{-itA}e^{-isB} = e^{ist}e^{-isB}e^{-itA} \tag{3.16}$$

この関係式を $t = 0$ で微分すると

$$Ae^{-isB} = e^{-isB}A - se^{-isB} \tag{3.17}$$

さらに $s = 0$ で微分でする

$$-iAB = -iBA - 1 \tag{3.18}$$

よって

$$[A, B] = -i$$

を得た。つまり

$$\text{ワイル関係式} \Longrightarrow \text{CCR} \tag{3.19}$$

という図式をえる。

さて，この逆はいえるのだろうか？細かいことをいえば，CCR よりもワイル関係式の方が数学的には取り扱いやすい。その理由は既に述べたように e^A という形の作用素は定義域が広がり作用素の積を容易に考えることができるからである。CCR では AB と BA という積を考えなければいけないが一般には AB や BA の定義域が空集合になることさえありうる。実は (3.19) の逆は，一般にはいえないことが示されている：

$$[A, B] = -i \not\Longrightarrow \text{ワイル関係式}$$

von Neumann は次のことを示した。

定理 3.3 もしペア A, B がワイル関係式を満たすならば $A \cong P,\ B \cong Q$ である。

ここで $X \cong Y$ とは X と Y がユニタリー同値を意味する。つまりあるユニタリー作用素 U と呼ばれるものが存在して, $U^{-1}XU = Y$ となることである。$X \cong Y$ となるときは X と Y のさまざま性質が酷似する。特に重要な概念であるスペクトルは一致する。そのため $X \cong Y$ となるとき数学の世界では X と Y は同じものと見なす。この言い方をすれば von Neumann はワイル関係式を満たせば $A = P$,$B = Q$ であることを示した。

この von Neumann の定理から次のことがわかる。一般のシュレディンガー 作用素は P と同型にならないことが知られている[22]。なので仮に H, X の組がワイル関係式を満たせば von Neumann の定理より $H \cong P$ となってしまい，矛盾する。

定理 3.4 下から有界なシュレディンガー 作用素 H とワイル関係式を満たす作用素 X は存在しない。

もちろんワイル関係式を満たしていれば $[H, X] = -i$ が必然なので，X は弱時間作用素になる。ただ von Neumann の定理は $[H, X] = -i$ を満たす作用素 X の非存在をいうものではないので何となくほっとする。

3.6 弱ワイル関係式と強時間作用素

すでに見たようにワイル関係式 $\Longrightarrow$ CCR だった。またワイル関係式を満たすシュレディンガー 作用素と時間作用素のペア H, T_H も存在しないことがわかった。そこでワイル関係式を弱めたい。ワイル関係式と CCR の中間にくるのが所謂，弱ワイル関係式である。これを説明しよう。ワイル関係式 $e^{-itA}e^{-isB} = e^{ist}e^{-isB}e^{-itA}$ を $s = 0$ で微分すると

$$Be^{-itA} = e^{itA}(B + t) \tag{3.20}$$

という関係式をえる。これを弱ワイル関係式という。もちろんワイル関係式を満たせば弱ワイル関係式を満たす。さらに弱ワイル関係式を $t = 0$ で微分すれば $[A, B] = -i$ をえるので，結局

$$\text{ワイル関係式} \Longrightarrow \text{弱ワイル関係式} \Longrightarrow \text{CCR}$$

という図式をえる。

定義 3.5 （強時間作用素）次の関係式を満たす作用素 T を強時間作用素という：

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T + t).$$

この強時間作用素が今回の公開講座の主役である。

[22] 例外はもちろんある。

4　時間作用素の解析

4.1　作用素の分類

ここまで敢えて抽象的な枠組みを避けてきたが，少しだけ数学的な話をしよう。既に述べたように $\sigma(A)=\int_A|\phi(x)|^2dx$ は電子の存在確率を表していた。そのために電子を表す確率振幅は $\int|\phi(x)|^2dx=1$ と規格化されることが必要だった。

しかし，一般に任意の関数 $\phi(x)$ は $\int|\phi(x)|^2dx<\infty$ とは限らない。例えば多項式の 2 乗積分は収束しない。そこで次のような関数空間を設定する：

$$L^2=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\;\middle|\;\int|\phi(x)|^2dx<\infty\right\}.$$

L^2 は線形空間[23]で，さらに内積 $(\cdot,\cdot)$ と呼ばれるものが次で定義できる：

$$(f,g)=\int\bar{f}(x)g(x)dx.$$

また $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ はノルムと呼ばれ，数の絶対値 $|\cdot|$ に対応する。

このノルムで関数の大きさや 2 つの関数の距離を測る。例えば f の大きさといえば $\|f\|$ のことであり，f と g の距離といえば $\|f-g\|$ である。絶対値と変わらないことが分かるだろう。このように線形空間に「近い，遠い」の概念[24]が導入されたものを位相線形空間とよんでいる。

さて，このように空間を設定しておくと，今まで作用素と言っていたものは L^2 から L^2 への写像と思える。つまり

$$\text{作用素}:L^2\to L^2.$$

作用素と内積の関係をみてみよう。はじめに行列についてみてみよう。行列 A の転置行列の複素共役を A^* と書くことにすれば，

$$\bar{z}\cdot Aw=\overline{A^*z}\cdot w,\quad z,w\in\mathbb{C}^n$$

が成り立つ。$A=A^*$ となる行列を対称行列と呼んだ。

作用素 T の場合も同様に T^* を定義したいのだけれども定義域の問題がある。行列の定義域は $\mathbb{C}^n$ 全体なので，以下にいう定義域の問題はおきない。$D(T)$ は T の定義域を表すとしよう。作用素 T に対して

$$(f,Tg)=(T^*f,g),\quad g\in D(T),$$

となるものを T の双対という。T^* は一般に全ての $f\in L^2$ で定義されるものではない。もちろん $D(T^*)\subset L^2$ ではあるが $D(T^*)=L^2$ とはならない。

[23] $f,g\in L^2$ ならば $\alpha f+\beta g\in L^2$ が成り立つ。
[24] 位相という。

定義 4.1 （対称作用素と自己共役作用素）$D(T) \subset D(T^*)$ で $T = T^*$ が $D(T)$ 上で成り立つとき T を対称作用素といい，特に $D(T) = D(T^*)$ のとき自己共役作用素という。

つまり $(f, Tg) = (Tf, g)$ が全ての $f, g \in D(T)$ で成り立つとき対称作用素というわけである。

最後に作用素の拡大という概念を述べる。2 つの作用素 X と Y が $D(X) \subset D(Y)$ かつ $Xf = Yf,\ f \in D(X)$ となるとき Y は X の拡大であるという。対称作用素 T が与えられたときその自己共役拡大がどれだけあるかというのは数学の重要な問題である。一般には (非可算）無限個あるのだが，状況によっては 1 つしかなかったり，また一つも存在しないことさえある。たった一つしか自己共役拡大が存在しないとき，本質的自己共役作用素とよぶ。これらの議論は非常に抽象的で公開講座の範囲を大きく超えていると思われるので深入りせずにここで次の章に移ることにする。

4.2 作用素のスペクトル

作用素のスペクトルを手短に説明しよう。正方行列 A に対して $A - \lambda$ が逆行列を持たないとき λ を固有値といった。さらにこのときに $Av = \lambda v$ というベクトル v が存在した。この v を固有ベクトルと言った。

作用素 T に対しても同様に $T - \lambda$ が逆作用素を持たないとき λ を T のスペクトルという[25]。ただし行列の場合と異なり，一般の作用素のスペクトルは複雑である。$Tf = \lambda f$ となる関数 f と複素数 λ があれば

$$(T - \lambda)f = 0$$

となる。もし $T - \lambda$ に逆があれば

$$f = (T - \lambda)^{-1} 0 = 0$$

となってしまうから $T - \lambda$ の逆は存在しないことがわかる。つまり λ はスペクトルに含まれる。これは行列と事情が同じであるが，しかし必ずしもスペクトルの元 λ に対して固有ベクトルが存在するわけではない。固有ベクトルが存在しないにもかかわらずスペクトルに含まれるものが一般には連続的にたくさんある。作用素 T のスペクトルを

$$\mathrm{Spec}(T)$$

で表す。もちろんこれは $\mathbb{C}$ の部分集合である。

次に自己共役作用素とスペクトルの関係を概観しよう。

[25]厳密に言えば $T - \lambda$ が逆作用素をもつような λ の集合の補集合として定義される。このように定義するとスペクトルが複素数全体の中の閉集合であることが即座にわかる。

定理 4.2 対称作用素 T が $\mathrm{Spec}(T) \subset \mathbb{R}$ となるとき T は自己共役であり，逆に対称作用素 T が自己共役ならば $\mathrm{Spec}(T) \subset \mathbb{R}$ となる。

作用素 T が自己共役なとき，それを物理的観測量とよぶ。これは T が自己共役なときにそのスペクトルが $\mathbb{R}$ に含まれるという事実による。というのもスペクトルは観測量 (値) と解釈されるからである。

例をあげる。ラプラシアンは自己共役作用素でそのスペクトルは連続スペクトルのみで

$$\mathrm{Spec}(-\Delta) = [0, \infty)$$

となる。3 次元水素原子内の電子 ($m = 1$ とおいた) のスペクトルも自己共役でそのスペクトルは

$$\mathrm{Spec}\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|x|}\right) = \left\{-\frac{1}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup [0, \infty)$$

となり，固有値と連続スペクトルからなる。また作用素

$$-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$$

は調和振動子とよばれ，これまた自己共役で，そのスペクトルは

$$\mathrm{Spec}\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2\right) = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

のように固有値だけからなる。

対称作用素の例をあげよう。微分作用素

$$T = i\frac{d}{dx}$$

を $(0, \infty)$ 上の関数に作用させる作用素とすれば，これは対称作用素で

$$\mathrm{Spec}(T) = \mathbb{C}_- = \{a + ib \in \mathbb{C} | b \leq 0\}$$

になる。しかも T は自己共役拡大を持たない。しかし定義域をかえれば事情は異なってくる。T を $(-\infty, \infty)$ 上の関数に作用させる作用素とすれば自己共役になり

$$\mathrm{Spec}(T) = \mathbb{R},$$

また $(0, 1)$ 上の関数に作用させる作用素とすれば対称で

$$\mathrm{Spec}(T) = \mathbb{C}$$

となる。さらに $(0, 1)$ 上の関数に作用させる T は非可算無限個の自己共役拡大をもつことが知られている[26]。

[26] $U(1) = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ でパラメーターづけできる。

4.3　時間作用素のスペクトル

以下に述べる定理は公開講座で証明する。

定理 4.3（強時間作用素の存在）$\{H, T\}$ が弱ワイル関係式を満たせば，H の固有値は存在しない。言い換えれば，H が強時間作用素を持てば，H は固有値を持たない，または H が固有値を持てば強時間作用素は存在しない。

この定理から即座に言えることは調和振動子 $-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$ や水素原子内の電子を表すシュレディンガー 作用素 $-\frac{1}{2m}\Delta - \frac{1}{|x|}$ は強時間作用素を持たないことになる。

定理 4.4（強時間作用素の非自己共役性）$\{H, T\}$ が弱ワイル関係式をみたすとき，T は対称作用素であり自己共役作用素ではない。

定理 4.4 は,「強時間作用素は物理的観測量ではない」と主張している。後で見るように,多くの場合，強時間作用素は自己共役拡大すら持たないのである。

4.4　いろいろな時間作用素

4.4.1　ラプラシアン

$H = -\frac{1}{2m}\Delta$ の強時間作用素を紹介しよう。弱ワイル関係式

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T + t)$$

を満たす T が H に対応する強時間作用素であった。それは次で与えられる対称作用素である：

$$T = \frac{m}{2}(P^{-1}Q + QP^{-1}). \tag{4.1}$$

この強時間作用素はアハロノフ-ボーム作用素とよばれ AB 作用素と略称されている。さらに詳細に AB 作用素を調べると，如何なる自己共役拡大も持たないことが示せる。

どのように，AB 作用素を求めるかといえば，次の等式が重要である。

定理 4.5 $\{H, T\}$ が弱ワイル関係式を満たしているとする。このとき

$$[T, f(H)] = if'(H) \tag{4.2}$$

が成立する。

証明はいたって簡単である。フーリエ変換をつかえば

$$\begin{aligned} Tf(H) &= (2\pi)^{-1/2}\int T\check{f}(k)e^{-ikH}\phi dk \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int \check{f}(k)e^{-ikH}(T+k)\phi dk \\ &= if'(H) \end{aligned}$$

となるからである。この等式より

$$Te^{-itf(H)}\phi = e^{-itf(H)}T\phi + tf'(H)e^{-itf(H)}\phi$$

が従う。さらにこれから

$$\underline{Tf'(H)^{-1}}e^{-itf(H)}\phi = e^{-itf(H)}(\underline{Tf'(H)^{-1}}+t)\phi$$

となるから，この式をよく眺めれば $Tf'(H)^{-1}$ が強時間作用素に見える。実際これを対称化して

$$T_f = \frac{1}{2}(Tf'(H)^{-1} + f'(H)^{-1}T) \tag{4.3}$$

が $f(H)$ に対する時間作用素になっている。AB 作用素の場合，まさに $\{P,Q\}$ が弱ワイル関係式を満たしているので， $f(P)=\frac{1}{2m}P^2$ の強時間作用素は $T=Q$, $f(x)=\frac{1}{2m}x^2$, $H=P$ を当てはめれば得ることができる。

4.4.2 相対論的なシュレディンガー 作用素

次に相対論的なシュレディンガー 作用素

$$H_R = \sqrt{-\Delta+m^2}$$

の強時間作用素を紹介しよう。それは

$$T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-\Delta+m^2}P^{-1}Q + QP^{-1}\sqrt{-\Delta+m^2}\right) \tag{4.4}$$

で与えられる。これもやはり対称作用素で如何なる自己共役拡大ももたないことが示せる。

4.4.3 調和振動子

次に調和振動子

$$H=-\frac{1}{2m}\Delta+\frac{1}{2}m\omega^2|x|^2$$

について考えてみよう。ここで ω というパラメターを導入した。H は固有値のみをスペクトルにもつので強時間作用素を持たないことは既に紹介した。そこで弱時間作用素について考える。H の固有関数 $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ は L^2 で完全正規直交系をつくる。H に付随する弱時間作用素 T とは

$$[H,T]=-i \tag{4.5}$$

を満たすものだったので $H\phi_j=E\phi_j$ に注意して，ϕ_j を (4.5) の両辺にかますと

$$[H,T]\phi_j=HT\phi_j-TH\phi_j=HT\phi_{\mathrm{j}}-ET\phi_j=(H-E)T\phi_j$$

と計算できるから

$$(H-E)T\phi_j=-i\phi_j$$

となる。この式から弱時間作用素 T を持と求めようとすれば，両辺に $(H-E)^{-1}$ をかけて

$$T\phi_j=-i(H-E)^{-1}\phi_j$$

となるのだが，右辺は $(H-E)\phi_j=0$ なのだから発散してしまう。これは

$$\phi_j\notin D(T)$$

を示している。つまり 基底 ϕ_j は T の定義域に含まれないのである。数学的に弱時間作用素 T を構成しようとすればこういう難しさがいつもつきまとう。

結論を言えば，調和振動子のようにスペクトルが固有値だけからなる[27]ようなシュレディンガー作用素に対する弱時間作用素はいつでも存在することが E. A. Galapon, 新井朝雄によって示されている[28]。形式的に H の弱時間作用素は

$$T_\omega=\frac{1}{2\omega}\arctan(m\omega QP^{-1})+\frac{1}{2\omega}\arctan(m\omega P^{-1}Q)$$

で与えられる[29] 。さらに $\omega\to 0$ のとき

$$T_\omega\to AB\text{ 作用素}$$

ということもわかるだろう。

[27]集積点がないことが条件。

[28]E. A. Galapon, *Proc. R. Soc. Lond.* **A** (2002), 2671–2689, A. Arai *Lett. Math.Phys.* **87**(2009),67-80.

[29]H. R. Lewis, W. E. Lawrence and J. D. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 5157–5159.

4.4.4　水素原子内の電子の弱時間作用素

最後に 3 次元水素原子内の電子のハミルトニアン

$$H = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|x|}$$

の時間作用素について考えよう。これはスペクトルに固有値をもつので，もちろん強時間作用素は存在しない。そこで弱時間作用素 T を構成したいのだが，現在までのところその存在は証明されていない。H は固有値の部分と，連続スペクトルの部分に直和分解できる：

$$H = H_p \oplus H_c.$$

連続部分 H_c には強時間作用素 T_c が存在することは散乱理論をつかって示すことが出来る。一方固有値の部分 H_p はゼロを集積点にもつので，その弱時間作用素 T_p の存在が知られていないのである。もしあれば,

$$T = T_p \oplus T_c$$

が H に付随する弱時間作用素ということになる。何かアイデアが必要であろう。

5　おわりに

このアブストラクトでは時間作用素について数学的議論を避けつつ，概観した。もし，数学に深い造詣のある方であれば非常に物足りなく，あいまいな印象を受けられたかもしれない。もしそうであれば，全て筆者の責任である。お詫び申し上げる。

「時間作用素がなぜ時間なのか?」という問いにもお答しかねる。ここでは時間とは何かという全宇宙的な問題を考察したわけではない。純粋数学的にみれば時間作用素の解析というのは無限次元リー環や CCR の表現と呼ばれるものの範疇に含まれると思われる。有限次元の作用素の代数関係式とは異なり，無限次元の場合の代数関係式はいつも定義域の問題と作用素の不連続性という困難さをともなう。いずれの問題もこのアブストラクトでは触れることができなかった。それは読者を退屈にさせてしまうかと思った，筆者の判断であるが，興味を抱いてくれる方がいれば幸いである。