

作用素環論の歴史

(50年の歩みと日本の伝統)

竹崎正道

作用素環論は、Fields 賞受賞者 A. Connes を出すまでに成長しました。その歴史はあまり長いとはいえません。1929年の J. von Neumann による基本定理がその幕開けです。著者が、作用素環論を志してから25年ですからその歴史の半分とかかわりを持つことになります。その進歩の道程をふり返ると、数々の数学者の顔と名前が念頭に浮かんで来ます。著者にとって、一番残念なことは、von Neumann 自身に直接会う機会を持ち得なかったことです。その代り、若い天才 Alain Connes と知遇を得たことは幸運でした。

作用素環論の歴史に立ち入る前に、作用素環論がどんな数学なのか簡単に述べておきましょう。作用素環論はそもそもの生い立ちからして、無限と連続に正面から力相撲を挑むための数学です。ギリシャ人によって、忌避された‘無限と連続’は、解析学の誕生によって、数学内に取り込まれました。G. Cantor はそのために大変な苦闘を強いられました。D. Hilbert による公理主義数学の‘確立’は、他の多くの分野と同様、作用素環論の土台になっています。今世紀に入って、確立された量子力学は、無限次元 Hilbert 空間と、その線型作用素を直接数学の対象とすることを要請します。個々の対象を、独立に取り扱う代りに、対象の成す系を考えて、その中であらためて個別の対象を見直す、今世紀の数学の手法が、この場合も採用されて、作用素環が数学的对象として登場しました。Murray と von Neumann は36年から43年に至るまでの7年間に、四編の Rings of Operators を書いて、その基礎を据えました。その第一論文の序文で、作用素環論の動機として、次の四つを挙げています。

- 1) 作用素の計算、演算の枠を与えること；
- 2) ユニタリ表現論を古典的制限から解放すること；
- 3) 量子力学のための数学的手段を準備すること；
- 4) 有限性の仮定を満たさない抽象代数学を建設すること、この場合、既知の代数学とは本質的に違う理論となる。

ここで、(1)については説明を必要としないでしよう。(2)については、無限次元の表現論はまだ始まっていま

せん。Wigner が39年にローレンツ群の表現の解析を行っていますが、無限次元表現論は、43年の Gelfand と Raikov による既約表現の存在定理があるのみで、本格的なものは、大戦後の Bargmann による Lorenz 群の表現分類まで待たねばなりません。(3)については多言を要しないでしょう。von Neumann 自身‘量子力学の数学的基礎’を31年に書いてます。(4)は、 II_1 型因子環の発見を指すものと思われます。連続次元論を内包する代数学の建設です。第一の論文での II_1 型因子環の発見は、von Neumann をその後しばらく、連続幾何学へと向かわせます。当時は単純環の理論が大きな発展を示した時代で、Artin, Noether, Brauer 等が活躍して、接合積、Brauer 群が導入されたのもこの時代です。これより少し遅れて、Jacobson, 中山, 東屋等が登場する事になります。

作用素環の使命は、

- A) 作用素環の代数的構造を構成的に記述すること；
- B) 作用素環の Hilbert 空間への作用の仕方を明らかにすること、

この二つに集約されます。でも、この問題の分割はあくまで、問題意識としてのことで、具体的研究においては別々に取り扱われることはありません。問題(B)は問題(A)に吸収されることが、Murray-von Neumann の第四論文で明らかにされています。更に、作用素環論を特徴付けるのは、代数と解析の密接な結び付きです。主要な結果は、代数的に記述されますが、その証明は極めて解析的です。

前置きが長くなりすぎた様です。本論に入りましょう。

Murray と von Neumann は第一論文で(以下、RO I, RO II, …と書きます)因子環の射影束に対し、次元関数を構成し、その値域が、 $\{0, 1, \dots, n\}$ ($n = \infty$ を含む)、 $[0, 1]$, $[0, \infty]$ そして $\{0, \infty\}$ と分れることを発見し、それぞれを、 I_n 型、 II_1 型、 II_∞ 型、III 型と命名しました。 I_n 型は、古典的な場合の直接の拡張になって、 $n \times n$ 行列環 $M_n(C)$ ($n = \infty$ の時は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) と同型になります。 II_∞ 型は、 II_1 型因子環と I_∞ 型因子環のテンソル積に分解され

ます。それで、二人は次元関数を II_1 型の場合に線形汎関数トレースに拡大することに努め、これを一年後の37年に成し遂げてます。しかし、次元関数をトレースに拡大する事は意外に長大な議論を必要としました。トレースの存在をもっと自然な形で証明できないかということが当時から問題になり、大戦後 Kadison, Kaplansky, 境等が挑戦しました。'自然'な証明はまだ判っていません。Yeadon が71年にコンパクト性と不動点定理を使った、うまい証明を見つけました。しかし、それは構成的ではありません。わが国では、小野貴生と斉藤(和)が反復挑戦しております。この問題は、トレースの加法性の問題と呼ばれ、作用素環の射影幾何学的背景を明らかにするものとして、最近脚光をあびている K -理論の観点からも大事なものです。関連した問題に、量子論の観測理論に端を発する。射影束上の確率測度を線形に拡張して状態にできるか否かという問題が、Mackey の問題として知られていますが、57年に Gleason が I 型の場合に部分的な解決を与えました。一般の場合は未知のままです。

量子場の理論の数学的枠を与えるべく、von Neumann は無限テンソル積の理論を38年に発表しました。そこで III 型因子環の存在が予告され、40年に RO III に詳細にその構成が示されました。ここで、トレースの理論が深められ、非可換積分論の可能性が暗示されます。この年には、一般関数解析に大事な結果、Alaoglu の定理と Krein Milman の定理がつけ加えられました。これ等の結果は、既述の Gelfand と Raikov の成果へとつながります。Murray と von Neumann は彼等の連作の最後、 RO IV で II_1 型因子環の構造解析を単純環の理論との類似性を追って展開しました。その中で、 II_1 型因子環が一意的でないことを示しました。同時に、 AF 型の II_1 型因子環の一意性も証明します。この一意性は、大戦後多くの専門家の注目を集めることになり'最終的'に Connes の単射的因子環の理論に発展します。Murray と von Neumann の連作は、これで終止符を打ち、von Neumann は戦争遂行政策、特に Manhattan 計画に大事な役割を果たすようになります。

大戦が世界を引き裂いた40年代前半に、Gelfand, Naimark, Raikov を中心として、ロシア学派が登場します。いわゆる Gelfand 表現と呼ばれる、半単純可換 Banach 環の表現定理が41年に得られました。43年には、Gelfand と Naimark により、 C^* -環の表現定理が示されます。ここで、彼等は $1+x*x$ の可逆性を仮定し、

この条件の不要性を問題として残しました。この問題は、大戦後 Rickart や Kaplansky により、挑戦されましたが、我国の深宮の手によって52年に解決される事になります。 $\|x^*\|=\|x\|$ の条件もその後、Glimm-Kadison の手により不必要なことが示されました。この方面の研究は、 C^* -環の公理系の整理で、現在も続いています。荒木-Elliott による、 $*$ -環で $x*x$ のスペクトル半径の二乗根が完備なノルムを与えるようなものという特徴づけは、きれいな公理系を提供します。これは73年のことです。

大戦後、作用素環論も大きな変貌を遂げますが、ここで戦時下の我国の様子を眺めて見ましょう。戦前、戦中の日本の関数解析の中心は大阪大学で、大阪学派と呼ばれるグループは高い水準を誇ってました。Banach 環を最初に取り上げたのは南雲です。吉田も続いて取り上げました。これは、36年のことですから、 RO I と同じ時期です。ここでは、Hilbert の第五問題と関係して、Banach 環の可逆元の作る群の連結成分の研究がされました。今風にいえば、 K -理論の中の K_1 を問題にしていたといえるでしょう。実際、彼等は Banach 環の中で指数写像の周期について気を配ってます。しかし、何といても II_1 型因子環の連続次元が注目されたようです。小平と古屋は38年に、連続幾何学の論文を全国紙上談話会に連作として発表してますし、岩村、前田(文)、近藤が戦時下の困難な状況にもめげず、連続幾何学に挑戦しました。戦時中の伝統は、戦後へは直接の形で継承されませんでした。

大戦後の作用素環は、Segal, Kaplansky, Dixmier, Richart, Arens 等の手により始められました。連合国同志とはいっても、スターリン治下のソ連と西側諸国、米国、フランスとの情報交換はスムーズではありません。Gelfand-Naimark 等の理論は、西側で再構成せざるを得なかったようです。

Arens が46年に、 C^* -環の自己共役元のスペクトルは実数であることを示して、西側の C^* -環論の幕は上りました。Segal が続いて、 C^* -環の表現論の土台を据えます。今日、GNS 表現と呼ばれる、表現の構成法がここで確立されました。この頃は、連続群の表現論と作用素環論そして Banach 環論はまだ分化していません。今から考えれば滑稽に思えるかも知れませんが、無限次元空間への連続群の表現を I -環の表現と対応させて解析する今日の手法は、当時は考え得べくもなかったのでは

う。現代のリー環による表現論のためには、解決すべき問題が山積してました。まず第一は、無限次元に対する恐怖心の克服でしょう。例えば、非有界作用素に対する代数的演算がスムーズにできるための土台が必要でした。この辺の心配は、47年の Bargman の論文を読むと良くなるかええます。その意味でも、 II_1 型因子環に附属する閉作用素は環を作るという Murray と von Neumann の結果は大きな期待を持たせました。この期待は、これまでのところ満たされておりません。その期待とは別に、Hilbert の第五問題を表現論を通じて解決しようという魂胆もあったようです。Gleason と山辺による、直接的方法による第五問題の解決と、Gårding による C^∞ -ベクトルの存在定理、そして Harish-Chandra, Gelfand 学派による無限小解析の方法の確立に従って、作用素環と連続群表現論は分化して行きました。しかし、表現を既約表現の直積分に分解する必要から、Mautner の要請に応じて、von Neumann は 38 年に完成していた、Reduction Theory を 49 年に発表して、表現論に影響を与えます。Mautner はそれを土台に、可換子環の極大可換環が表現の既約分解を与えることを 50 年に見出しました。しかし、この既約成分分解が一意でないことを知り、(I 型でない場合)大いに困惑することになります。

少し脱線しすぎましたから、本論に戻ることにしましょう。Dixmier は、49 年に因子環の理論を、中心値トレースを構成することにより、大域的 von Neumann 環の理論の出発点を与えます。この頃から、作用素環の解析的側面を重視する方向と、代数的側面を重視する方向とが意識的に追求されることになります。前者は、Dixmier, Segal, Dye 等による線形汎関数の重視となって現われ、後者は、Rickart と Kaplansky 等による AW^* -環を通じて次元論を把握しようとする流儀となります。しかし、解析的構造究明の決め手ともいべき結果が、Kaplansky 稠密性定理(51年)だから、上の二つの傾向が排他的であったと思うのは早計でしょう。Dixmier は von Neumann 環の位相的性質に注目しました。まず 50 年に von Neumann-Schatten の結果を整理して、von Neumann 環は Banach 空間として双対空間であることを示して、汎弱位相を導入します。更に、順序構造と位相構造の深いつながりを用いて、汎弱位相と汎強位相が代数構造だけで一意に決まることを示します(53年)。この研究は、3年後に境による von Neumann 環の公理的特徴づけへと発展しました。Dixmier は同時に、トレ

ースを出発点として非可換積分論を展開し、非可換 L^p -空間を構成します。同じ時期に Segal は von Neumann 環に附属する非有界作用素を詳しく調べて、トレースに関する可測作用素の理論を論じて、Dixmier と同じ結論に到達します。Segal の L^p -空間は(実際は、彼の弟子 Kunze がプログラムを実行するのですが…)可測作用素の作る空間として表現されていますが、Dixmier のは完備化で定義されますから、抽象 Banach 空間として把握されます。両者は同一のものでした。これ等の非可換積分論の土台になったのは、ROI の BT -Theorem を更に深めた Segal の弟子 Dye による、52年の T -Theorem と Radon-Nikodym 型定理でした。

この頃は、ポスト Murray-von Neumann の第一の高揚期に当たりますが、その基盤は今から眺めると意外に狭いことに気付きます。つまり、Dixmier を中心とするフランス派(この中には Godement も入ります)と Kaplansky, Segal を中心とするシカゴ派が推進母体です。シカゴ派の中からは、Dye, Kadison, Singer, Feldman, Griffin, Stinespring, Nelson, Shale, Kunze, Blattner 等が輩出します。Kostant もその中の一人ですが、彼は微分幾何とリー群を専門にしました。Kunze や Blattner もそうです。フランスでは後継者が育ちませんでした。Dixmier も 54 年の論文の後、57 年に、von Neumann 環の著書を著わして、リー群の表現論に移ってしまいます。60 年代に C^* -環の研究に一時期戻ってますが、主力はリー群とリー環論にそそいだようです。結局、当時の作用素環論は Dixmier とシカゴ派が中心です。この中から、Kadison が頭角を現わし、世界的指導者に成長します。しかし第一高揚期は 55 年頃で一段落しました。高揚期が終ったということは、決してこの分野の活動が止まったことを意味しません。かえって、静かなしかし深い研究が進行して、次の高揚期へ向けての準備が進みます。Kadison は C^* -環の既約表現は代数的に既約であるという驚くべき結果を 57 年に得ました。又、Singer が群測度構成法による因子環にコサイクルから自己同型を構成して、その後の日本の中村-武田スクールへの道を準備しました。しかし、多くの著名な専門家が、この分野を去りました。55 年頃から 60 年代前半にかけて、日本勢の活躍が目立つようになります。この辺で、国内に目を向けましょう。

大戦後の日本の作用素環研究は、戦前、戦中の伝統を引き継ぐというよりは、廃虚の中から立ち上った戦後復

興の道を作用素環研究グループの先人達も歩きました。この様子を、80年 Kingston でのサマースクールで特別講演に立った富田は、'私が大学へ入って数学を志した時、指導教授はいも畠で汗を流していました...'と述べて講演に入りました。若手は何のことか分かり難かったようですが、多くの人々に感銘を与えました。この時代の数学者の苦労は各大学の伝説になっています。

応召に際し、Banachの本を抱えて戦地へ赴いた泉門下の中村は、復員後、鶴丸、梅垣、武田、御園生等と共に研究グループを組織します。文献が自由に入らないセミナーは難渋を極めたようです。この事情は全国共通でした。東京では、中野門下の竹之内、広島では小笠原、吉永、九州では富田等がそれぞれの道を独立に歩んでいました。当時の一つの特徴は、各地方、各大学の独立性です。交通事情の悪さの故でしょう。電話とプレプリントで情報を交換し合う今からでは考えられないひどい状況でした。しかし、全体としては、55年までの第一高揚期のバスに乗り遅れてしまいました。とはいえ、世界の情勢を手をこまねいて眺めていた訳ではありません。Hilbert環の正しい定式化は、Ambroseの L^2 -systemにヒントを得た、中野により与えられました。50年のことです。竹之内は更にHilbert環の理論を深めます。又、小笠原と吉永は非可換積分論に取り組み、Hilbert-Schmidt型作用素の成す環を、完備Hilbert環として特徴づけています。富田は、作用素環を調和解析の土台として把握しようと苦闘しています。その成果の一つは、富田分解と呼ばれる非可分な場合の直積分論です。彼の議論には欠陥があることが後で指摘されますが、そのアイデアの正しさが最近になって分って来ました。いわゆるChoquet境界積分論を本質的に提唱したのが、彼の理論で53年のことです。Choquet理論は56年に始まるもので、非可分を扱ったBishop-de Leeuwの結果は59年に得られます。

中村にひきいられた東北スクールは、鶴丸のテンソル積の定式化を皮切りに、54/56年に多くの結果を得ました。境、鈴木を陣容に加えて厚味を増しました。御園生は、III型因子環の表現の一意性を示し周囲を驚かせます。武田は、ICM 50で予告されたShermanの C^* -環の第二共役空間がvon Neumann環になると言う主張に証明を与えて、Shermanの了解の下に54年に発表しました。今日、Sherman-武田の定理と呼ばれます。彼は、更にBanach空間の手法、特に双対性に依拠する方法論を、

C^* -環の表現論の中に提唱しました。この方法論は、境による既述のvon Neumann環の特徴づけとなって結晶します。境によって深化されたこの方法論は、富山、竹崎と継承され、その後、齊藤(和)、Akemann、Pederson Haagerup等により、現在へと引き続いて深められつつあります。II₁型の理論を非可換確率と観る梅垣は、54年の条件付き期待値に関する論文に端を発し、最近是非可換情報理論を目指しています。彼により開発された、条件付き期待値は、その確率論的解釈よりも、代数的諸性質が、これまでの因子環の構造研究の大事な手段として活用されています。彼の目指す確率論としての真価は依然として将来の課題となっています。著者はその将来性に期待を持っていますが、その本当の意味は、作用素環論内部から求められるよりも、作用素環論を応用する過程で明らかになって来るのではないかと予想しています。例えば、開いたリーマン面上の調和関数を、被覆空間(単位円)上で考えて、境界積分として表現する時、基本群の円周への作用はMackeyの意味でスムーズではありません。境界値の記述のために作用素環が登場する余地があります。ところで、調和関数と確率論、特にブラウン運動との結びつきは、古典的なものです。梅垣の非可換確率論に、この辺から新しい光が当てられるような気がするのですが、どんなものでしょうか。

東北グループは、その後、洲之内(治)、鈴木、富山、齊藤(慎)、竹崎を加えます。57年の、富山のノルム1の射影に関する結果は、その後Connesの単射の因子環の理論の中で重要な役割を果たします。

広島では、小笠原を中心に、吉永、前田(周)、佐々木(右)が55年から56年にかけて活躍します。前田は次元論を目指します。このグループは、国際的'退潮'の中で、研究の焦点を超関数に移しました。

以上で、大体国際的規模での、研究グループの様子を50年代前半を中心に概観したことになります。この頃になると、論文の数は激減してしまいました。専門家の間にも動揺が見られます。この時期に、作用素環に対する信念を堅持し続けたのは、国外ではKadison、国内では中村と富田ではなかったでしょうか。Kadisonは世界中が作用素環論の将来に疑問を投げかけてる時、確固たる自信を微動だにさせません。堅実なペースで研究を進めます。58年のユニタリ同値の不変量に関する論文は、後にPedersenのUp-Down Theorem(71年)となって結実します。彼自身の研究にも増して大事な貢献は、若手

をはげまし教育し続けたことでしょう。彼の手によって、Glimm, Størmer, Rieffel, 間接的ですが Effros が育ちます。60年代の米国独走の下地を作りました。巨人 von Neumann が 57 年に癌で他界しました。彼の極端な右翼的性格は、リベラルな数学者の多いプリンストン研究所に、反 von Neumann の空気の遺産を遺しました。Bourbaki は作用素環論に冷淡です。パリ中心の中央集権的フランスでは作用素環は完全に後退しました。日本へも、この国際的雰囲気は反映して、竹崎を最後にしばらく後継者養成が中断されます。しかし、この時期、即ち 55 年から 60 年代前半にかけて、日本人の活躍が目につきます。富田は 58 年にすでに、* 演算の極分解を示して、10 年後の大理論への第一歩を踏み出しています。又、境は、線形汎関数の極分解を得ています。続いて、微分子の連続性を示して、Kaplansky の問題を肯定的に解決します。竹崎も特異汎関数の特徴づけを行ないました。中村-武田チームと鈴木は、日本の伝統単純環の理論を作用素環論へ移植することを試みています。II₁ 型因子環を対象を制限したので、離散群だけに自己同型群を制限することが必要でした。中村と武田は更に Galois 理論へと向います。一連の研究は 58 年から 62 年までの間に集中しました。この Galois 理論は、自己同型群を更に有限群に限ることを強要して、彼等をいささか失望させたようです。しかし、彼等の理論は有限自己同型群の分類を必然とします。このプログラムは、80 年になって Jones により II₁ 型 AF 因子環に対する決定的な結果となって '完成' します。彼等の '失望' は 70 年代後半の研究に直接つながる、誇るに足る先駆的なものでした。作用素環論に絶対の自信を持つ中村は、大阪教育大で後進の指導を進め、長田(尚)、長田(ま)を世に送り出します。彼等は 62 年頃に前後して活躍を始めます。彼等の中心問題は一貫して、II₁ 型因子環の自己同型群と接合積に関するものです。

再びここで目を国際的研究活動に向けましょう。60 年代の幕上げは Kadison の弟子 Glimm によってなされました。まず、学位論文で RO IV の AF 因子環の C*-版 UHF 環の分類を行います。UHF 環はその後の C*-環論に大きな影響を与えます。例えば、量子場の正準交換関係の表現は 2ⁿ 型 UHF 環を生成します。Stone-Weierstrass の定理の非可換版の弱い形を続いて証明します。この非可換 S-W 定理を強い形で示そうとする試みは、Akemann Anderson, Bunce 等により今日も続け

られています。この方面における境の影響は決定打です。Glimm のホームランは 61 年の I 型 C*-環に対する決定的です。これまで触れませんでした。51 年に Kaplansky は $\mathcal{LC}(\mathbb{G})$ を積み重ねたような C*-環を GCR 環と呼んで、C*-環の構造論と上述の S-W 定理をイデアル論的に論じて、後の C*-環論の代数的構造論の土台を据えました。57 年には Mackey は、既約表現の同値類の全体に Borel 構造を導入して、直積分分解論の土台を据えようと試みました。ところが、一般には測度論的に取り扱えない空間が飛び出して大いに困惑します。測度論的に病理的でないものを smooth であると呼びました。Glimm は可分 C*-環が I 型の表現だけを持つことと、GCR であること、そして smooth dual を持つことは全部同値なことを示しました。更に、非 I 型表現を持たば、II 型と III 型の表現を同時に有することも示します。コンパクト性の使い方に絶妙な技巧を誇る境は後に、これを非可分な場合に拡張しました。しかし、II 型の表現の存在については未解決です。

Mackey dual について一言述べておきましょう。既約表現の同値類に分割して考えることが諸悪の根源のようです。ユニタリ同値類ではなく、ユニタリ共変系として眺めれば、はるかに自然な直積分論が展開できますし、因子環や C*-環の構造論へのつながりも深くなると思います。これは、Intertwining 作用素を重視しようということなのです。

Glimm の結果は、富山、竹崎に衝撃と勇気を与えます。二人は、S-W 定理に動機を得て、コンパクトな純状態空間を持つ C*-環の構造が Fibre bundle により完全に記述される事をつきとめました。Fell と Dixmier-Douady も似た結果を同じ時期に得ています。しかし、幾何学と作用素環論の深いつながりの発見には更に十年の時間が必要でした。

60 年代には、50 年代よりはるかに多くの深い結果が得られ、研究者の層も一段と厚くなりました。50 年代後半の後退は、60 年代の進歩を準備しました。50 年代は、作用素環の解析的、位相的構造の究明を準備したと総括して間違いなさそうです。60 年代の進歩は、そう簡単に総括できません。理論の深化と広がりを反映しています。紙数も残り少なくなりましたので、大きな流れに限ることにします。

この時代の特徴は、理論物理学からの影響です。Haag と Kastler の影響の下に、Borchers, Robinson 等

々の大勢の物理学者が62年頃からどっと流れ込んで来ます。底流として、Van HoveとFriedrichsによる52/53年の場の正準交換関係の表現の非一意性の発見がありましたし、Segalは、非可換積分論以来、量子力学を作用素環を土台に構築することを提唱し続けていました。Haagの下で学んだ荒木は、63年に理論物理学に現われる因子環は大部分III型であることを、協力者Woodsと共に示します。続いて、正準交換関係のFock表現を詳しく調べて、共役変量は見事な双対関係にあることを示しました。抜群の解析の力量を武器に、理論物理学と作用素環の接触点の深化、拡大の潮流の先頭を切りました。

Kadisonは本拠をColumbia大学からPennsylvania大学へ移し、境, Shale, Fell, Effros, Griffin, Pukanszkyをその配下に入れて、Penn大を作用素環の世界の中心にしてしまいました。彼の弟子StørmerはOsloに帰国して、Norwayへの布石となります。Kadison夫人はデンマーク人ですし、彼の若い時の共著者Fugledeはポテンシャル論でCopenhagenで指導的立場にありました。彼は、毎年夏をDenmarkで過して、Pedersenを中心とするCopenhagenスクール形成に大きな影響を与えました。Pedersenを直接育てたのは、Kehletだそうです。その出会いのいきさつは、聞いていませんが英国のRingroseを作用素環に引き入れたのも60年代中期で、Newcastleを英国の中心にしました。KadisonはHaag, Kastler, Hugenholtzとも密接な接触を保ちます。KastlerはMarseilleにRobinsonを得て、作用素環の根拠を定めました。60年代の特徴の一つは、Kadisonの指導者としての決定的な影響力の発揮です。God Father Kadisonと冗談を言う人もあるようですが、今日の作用素環論を語る時、彼の功績を抜きにしては語れません。日本は全体として、その影響外にありましたが、それも70年代に入ると様子が変わります。一つエピソードを伝えましょう。60年代末に日本の大学を学園紛争の嵐が襲いました。この頃は、後述するように作用素環論の爆発的進歩が記録されつつありました。日本の状況を憂慮した著者は、専門家の一時国外避難を考えました。この計画を、Penn大で68/69年一緒に過して、親交のあったStørmerに伝えました。時期が遅すぎで、Osloでは予算がありません。しかし、このことは電話で、CopenhagenのPedersenに伝えられました。富山を日本から連れ出そうという計画です。Copenhagenに滞在中だったKadisonはRingroseとも連絡をとります。結

局、富山はCopenhagenで70/71年を過すことになりました。彼は、ここで有名なCopenhagen講義録を、新しい結果を含めながら完成します。

話が散漫になってしまいました、本論に戻って国内に目を向けましょう。50年代に特徴的だった各地方の孤立状態に終止符が打たれます。63年には関数解析シンポジウムが年中行事として発足しました。又、66年から作行会の援助を得て、若手作用素環研究グループが組織されました。この中から、岡安、中神、長田夫妻、岡、斎藤(和)、武元等の俊英が育ちます。数理解析研究所の設立も積極的効果をもたらしました。国外のKadison体制とはスケールが違いますが、国内の協力体制は急ピッチで整えられて行きます。研究者同志の連帯感も除々に形成されて行きました。特に、それは若手の間で著しかったようです。70年代に入ると、情報の交換も組織的に行われるようになりました。

数学の中味もどんどん深くなって行きました。60年代中期のハイライトは、既述の物理学からの影響の他にKadison, 境, Ringroseを頂点とする微分子に関する結果で、予想とは正反対の、しかし深い結果が得られました。63年には、因子環の構造論において、RO IV以来の積極的意味を持つ、Dyeによる可解エルゴード保測変換群は、群測度構成法によりII₁型AF因子環を生成することが示されました。その過程で、軌道同値の概念を導入します。これは、60年代末から70年代前半にかけての、Kriegerによるエルゴード変換の共役分類と、軌道同値分類、更に附随する因子環の同型類の間に1対1の対応がつくという結果に発展します。又、同じ年にSchwartzにより因子環の不変量(P)が導入されて、後のConnesへの道を準備しました。その過程で富山-羽田の仕事も注目されるべきでしょう。

67年3月のBaton Rougeでの国際会議が、既述のような第二高揚期の中で開催されました。この会議はいろいろな意味で画期的なものでした。数学的成果としては、PowersによるIII型因子環の連続個数の発見です。これは、直ちに荒木-Woodsによる無限テンソル積の因子環の分類論へと発展しますし、McDuffと境によりII₁型II_∞型因子環の連続個数構成へと受け継がれました。Powersの結果は、物理からの影響の積極的意味を十二分に確認させました。ここでの主要な武器は、漸近可換性とClusteringと呼ばれる性質です。しかし、会議の場外ホームランは富田が10年の歳月をかけたmodular

Hilbert 環の理論です。これについては、すでに解説記事が出たことがありますのでそちらに詳細はゆずり、舞台裏の話に限りませう。富田の論文は、その記述の不完全さの故に、会議では取り上げられませんでした。会議に出席中の著者は、富田の理論の重要性を知り、国内にいた富山に帰国後4月に京都で予定されているセミナーのために前もって準備しておくことを依頼しました。京都セミナーは3日間ですが、連日富田理論の検討に3時間ずつ費しました。富山は次々と鋭い質問を浴びせしますが、富田はそれにすべて答えて行きます。真剣な討論の様子は、時差ボケの著者にとって感動的なものでした。結局、富山は富田の議論を遮ることができませんでした。このセミナーの様子から、著者は富田理論を積極的観点から再検討する決心をします。実際、このセミナーがなかったらば、論文のあら捜しで満足して放り出してしまったかも知れません。小さな間違いなら沢山ありましたし、難解な論文でした。68年 Penn 大に留学した著者は、Kadison スクールの人には誰も富田の論文を信じていないことを知りました。Griffin が頑張ったけれど理解し切れずに、間違いがあると断定されてしまっていました。著者は、69年1月から5月一杯セミナーを主催しました。その過程で、KMS 条件との関係も明らかになりました。これをまとめて講義録としました。これが後に富田-竹崎理論と呼ばれるものの母体となります。

Baton Rouge 会議は、作用素環の研究グループを国際的規模で一つにまとめる役割を果たしました。日本は地理的条件と言語のハンデの故に、この研究グループに十分に加わり切れませんでした。学園紛争がそのハンデキャップを更に大きくしたようです。国外での進歩は爆発的加速度を加えて行きました。71年に Seattle の Battelle 研究所で開かれた、サマースクールに A. Connes が学生として参加して来ました。その半年後に、彼は快進撃を開始します。III型環の構造定理も72年末には、彼と著者の手で完成しました。荒木も構造解析とトレースによらない非可換積分論を打ち立てて行きます。それと相前後して、Atiyah と Singer に後押しされた、Brown, Douglas, Fillmore が、いわゆる BDF 理論を完成して、位相幾何学における、 K -homology 論を確立しました。70年代の嵐の時代になりました。同時に、指導者の世代交代もおこりました。

こんな時期に計画、実行された、日米作用素環セミナーは日本を国際的孤立から救出しました。74年と77年

の二度にわたり、数理解析研究所と UCLA で開かれました。言葉の壁を越えた、数学者同志の連帯が確立されました。この中から、岸本、高井、斉藤(吉)、河村が育ち、押川、浜地が合流します。

Connes の仕事について言及する紙数が無くなってしまいました。Fields 賞関連記事で取り上げてもらうことに期待して、ここでは詳細は割愛します。彼の登場は作用素環論を大きく変貌させました。内面的に大変な深さに到達したばかりではありません、他の分野との交流も大きく始まりました。

幾何学と作用素環論のつながりは、前の BDF 理論から、Connes の葉層構造論、そして最近の Voiculescu から Kasparov に至る KK 理論などにより強化されつつあります。かつて、こんな見事な II_1 型因子環の理論の応用が無いのはおかしいと、疑問を投げかけた Gelfand も80年夏のルーマニヤで開かれた国際会議で会った時、彼の疑問が完全に満たされたことを認めました。Jones の最近の研究は、数論との関連を予想させます。それは II_1 型因子環の部分因子環上の加群として取り得る、作用素環論的次元は $[4, +\infty) \cup \left\{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} : n=2, 3, \dots\right\}$ になるということです。この数は、 $SL(2, \mathbf{R})$ において、

$$\begin{bmatrix} 1, & \lambda \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix}$$

により生成される部分群が離散的であるために λ が取り得る値と一致しています。これは偶然の一致でしょうか。

70年代の成果を総括して、次の時代への展望を開くために、80年夏に Kingston で AMS サマースクールが Kadison を組織者として開かれました。世界中から多くの専門家、若手が参加して、大きな成果を挙げました。嵐の70年代のしめくりにふさわしいもので、ここで簡単にまとめる訳には行きません。しかし、日本の関係方面の方々に考えて頂きたい問題があります。世界の大小十数ヶ国以上の国々から多くの参加者が集まり、日本からも多数参加しました。各国とも自国からの出席者の旅費を負担しました。しかし、経済大国日本は、政府負担が零の唯一の文化国家振りを発揮して、主催者をびっくりさせました。主催者は、参加者の負担を小さくするよう取り計らってくれましたが、とんだ大国代表で日本からの参加者は肩身の狭い思いをしました。'脱線'しました。本題に戻ります。

これからの作用素環論は他の分野との交流の影響が強

く出てくるのは必至です。私は、この分野はソフトウェアとハードウェアの統一体として発展して行くような気がします。しばらくの間、幾何学からの影響が目立つ事になると思います。しかし、この分野は究極的に解析の力が決め手になる事を忘れてはならないでしょう。洗練された定式化の中で、解析の力が求められる事情は、昔も今後も変わりません。解析上の結果は、十分沢山そして深化しないと、代数的結論と結びつきません。これからこの分野に進む人々に留意して頂きたいと思います。

70年代についての記述が抜けてしまいました。これについては、ConnesのFields賞受賞の解説記事と数学第26巻第4号の解説記事を参考して下さい。

文 献

- [1] 竹崎正道, 作用素環の構造, 岩波書店, 近刊予定.
- [2] —, Theory of Operator Algebras, I, Springer-Verlag (1979).

(1982年10月6日提出)

(たけさき まさみち・Dept. of Math.,
Univ. of California, Los Angeles)

函数論の50年, I

小松 勇 作

1. 初期の頃

昭和初期のわが国函数論界は、創世の域を脱せず研究者も少なく、現状から半世紀の隔たりは遠い。当時の数少ない論文の引用文献で輸入の単行本が目立つほどであり、知識の消化吸収への意欲と努力のあとが偲ばれる。もっとも、小島、藤原、国枝、掛谷などによるDirichlet級数の収束座標に関連する諸論文が1910年代半ば頃のTôhoku Math. J.をにぎわせていた。また、吉川實夫函数論(1913)は微積分学を超える書物が乏しい中で先駆的なものであったろうが、現状では大学のテキスト程度の内容である。

このような環境のもとで、1920年代半ばからの辻正次と清水辰次郎による活発な活動は、斯界の草分けとしてだけでなく、一挙に近代化への役割を果たしたといえる。辻[1]は冪級数の部分和の零点分布を論じ、続いて清水[2,4]、吉田洋[1]に関連する研究がみられる。また、辻[2]、清水[1,3]はPicardの定理への共通な関心を示している。

さて、函数論の現代化への転回道標となった有理型函数論はR. Nevanlinnaによる二つの主要定理の発見(1925)に始まった。清水[5]とL. V. AhlforsはRiemann球面の弦距離を用いて接近函数を導入し、解析的にえられていた第一主要定理に幾何学的な意味づけを与えた。ついで、H. Cartanは清水の論文に暗示されて、他の意味づけを与えている。

2. 1930年代

1930年頃までに刊行された単行本全般については、清水‘函数論ノ書籍ニ就イテ(共立社講座雑録), 25 pp.’に評論風の紹介がある。邦書では前記の吉川のほか竹内端三‘函数論上; 下’があげられている。ドイツでW. F. Osgood, G. Vivanti-A. Gutzmer, A. Hurwitz-R. Courant, E. Landau, G. Pólya-G. Szegőなどの本を経てL. Bieberbachの本が現れ、フランスでBorel叢書やActualités, Mémorialが数冊刊行された頃である。

1930年代半ばになると、共立社新修軌近高等数学講座と岩波講座数学が並行して刊行され、新知識の紹介を通して普及と向上に貢献した。それらの中には藤原‘複素函数論’; 清水‘保型函数ノ一展望’, ‘軌近函数論’; 辻‘複素変数函数論’, ‘調和函数論’, ‘多複素変数函数論’; 吉田洋‘等角写像論’などがみられる。

この頃になると外国文献の利用も身近となつてか、清水の整函数の値分布[7-9]、代数函数の反復[10]、有理型函数についての函数群[11,12]、掛谷の境界値[1,2]、能代の単葉・多葉函数[1-5]、集積値集合[6,7]、特異点[8]、辻の等角写像[3,10]、調和函数[4-6,8]、整函数[7]、特異点[9]、津村の有理型函数[1]、小堀の単葉・多葉函数[1-8]、城の単葉函数[1-4]、尾崎の多葉函数[1]、南の単葉函数[1]、Phragmén-Lindelöf型定理[2,3]、角谷の有理型函数[1,2,4]、Riemann面の型問題[3]、小林のRiemann面の写像[1]、型問題[2,3,5,6]、漸近値[4]、井上のDirichlet問題[1-3]、調和函数[4]、入江の集積値集合[1]に関する諸研究が相次いで発表さ