非相対論的量子場と Gibbs 測度

廣島 文生
九州大学 大学院数理学研究院

目 次

主な記号

$\mathscr{F}$	$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fock 空間
$\mathscr{H}_{\rm N}$	$\mathscr{H}_{\rm N}=L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}$ は全ヒルベルト空間をあらわす
ω	dispersion relation $\omega(k)=\sqrt{\lvert k\rvert^2+\nu^2}$, $\nu\geq 0$. ほとんどの場合 $\nu=0$
$d\Gamma$	第 2 量子化
Γ	第 2 量子化, $\Gamma(e^{-ith})=e^{-itd\Gamma(h)}$
$H_{\rm f}$	量子場の自由 Hamiltonian $H_{\rm f}=d\Gamma(\omega)$
$\Phi(f)$	$\Phi(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(\tilde{f})+a(f))$
$\phi(f)$	$(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数に持つガウス超過程
$\phi_{\rm E}(f)$	$(\mathscr{Q}_{\rm E},\Sigma_{\rm E},\mu_{\rm E})$ 上の $f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つガウス超過程=Euclid 場
$\mathbb{E}_Q$	確率測度 Q に関する期待値 $\int\cdots dQ$
$\mathbb{E}_Q^x$	パス空間上の確率測度 Q^x に関する期待値 $\int\cdots dQ^x$
$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$	ブラウン運動
$(\Omega,\mathcal{F},W^x)$	ブラウン運動 の定義されている確率空間
$\mathbb{E}_W$	$x=0$ とした $\mathbb{E}_W^0$ の省略形
$(\mathcal{Y},\mathscr{B},Q)$	一般的な確率空間
$H_{\rm p}$	Schrödinger 作用素 $-\frac{1}{2}\Delta+V$
$\Psi_{\rm p}$	$H_{\rm p}$ の規格化された正の基底状態
$E_{\rm p}$	$H_{\rm p}$ のスペクトルの下限
$\Sigma_{\rm p}$	$H_{\rm p}$ の本質的スペクトルの下限
$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$	$H_{\rm p}$ に付随した $P(\phi)_1$ 過程
$\mathfrak{X}$	$C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$
$(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}),\mathcal{N}_0^x)$	$P(\phi)_1$ 過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の定義されている確率空間
$d\mathsf{N}_0$	$\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $d\mathsf{N}_0=\Psi_{\rm p}(x)^2dx$
$d\mathsf{P}_0$	$\mathbb{R}^d\times\mathscr{Q}$ 上の確率測度 $\mathsf{P}_0=d\mathsf{N}_0\otimes d\mu$
$d\mathcal{N}_0$	$\mathbb{R}^d\times\mathfrak{X}$ 上の確率測度 $d\mathcal{N}_0=d\mathsf{N}_0\otimes d\mathcal{N}_0^x$
$d\mathcal{N}_T$	$\mathbb{R}^d\times\mathfrak{X}$ 上の確率測度 $d\mathcal{N}_T=\frac{1}{Z_T}e^{S[-T,T]}d\mathcal{N}_0$
H	Nelson Hamiltonian $H=H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+H_{\rm I}$
E	H のスペクトルの下限 $\inf\sigma(H)$
$\Psi_{\rm g}$	Nelson Hamiltonian H の基底状態で至るところ正.
$L_{\rm p}$	$H_{\rm p}$ の基底状態変換 $L_{\rm p}=\theta_W H_{\rm p}\theta_W^{-1}$
L	汎関数空間上の Nelson Hamiltonian $L=L_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\tilde{H}_{\rm f}+\tilde{H}_{\rm I}$
$I_{\rm IR}$	赤外正則条件, 赤外特異条件を定義するときの積分 $I_{\rm IR}=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\lvert\hat{\varphi}\rvert^2}{\omega^3}dk$
$Q_{[-t,t]}$	$Q_{[-t,t]}=e^{-\int_{-t}^t V(B_s)ds}\mathrm{I}_0^*e^{-\phi_{\rm E}(\int_{-t}^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-B_s)ds)}\mathrm{I}_t$
$\mathscr{L}_t$	$\mathscr{L}_t=\phi(B_{-t})Q_{[-t,t]}\phi(B_t)$
$d\mu_T$	$\mu_T(A)=\frac{1}{Z_T}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_A\mathscr{L}_T]$ で $(\Omega,\sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度を表す
$d\mu_\infty$	$(\Omega,\sigma(\mathscr{G}))$ に定義されたギブス測度
$W(x,T)$	Nelson 模型のペアポテンシャル $W(x,T)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\lvert\hat{\varphi}(k)\rvert^2}{2\omega(k)}e^{-T\omega(k)}e^{-ik\cdot x}dk$
$S[-T,T]$	$\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW(X_t-X_s,t-s)$

1 Boson Fock 空間

この章と次の章ではFock空間と $P(\phi)_1$ 過程に関する基本的な事柄を紹介し, 3章以降で使う基本的な記号を定義する. Boson Fock 空間, Euclid 場, $P(\phi)_1$ 過程, Katoクラスを熟知している読者はこの章と次の章をスキップしても構わない. 特に第1章は[Ara88, Sim74, GJ81]を参考にした. また第2章は[CFKS87, LHB11, Sim82]を参考にした.

1.1 お話

場の量子論において自由場とは互いに相互作用していない同じ素粒子がたくさん集まった状態を表している. この自由場と Schrödinger 方程式に支配される粒子の相互作用する系を考えて, その Hamiltonian のスペクトル解析を行う. その数学的な解析方法のひとつとして, Hilbert 空間上の作用素論を用いるものがある. それはFock空間 $\mathscr{F}$ といわれる Hilbert 空間と Schrödinger 作用素の状態ベクトルのつくる Hilbert 空間 $\mathscr{K}$ のテンソル積空間 $\mathscr{K}\otimes\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素 H のスペクトル解析に帰着される. H の点スペクトルや連続スペクトルの解析が Hamiltonian の固有ベクトルやスペクトル散乱理論の解析に対応することは von Neuman 以来よく知られている.

一方 Euclid 的場の量子論では実シュワルツ超関数空間上のガウス測度が定める L^2 空間のベクトルに値をとる確率変数をもちいて, 場の量子論を解析する. この場合, 自由場とは直感的には無限次元ガウス過程に同等である.

上記の2つはFeynman$-$Kac型汎関数積分表示によって関係づけられる. 自由場を表す自己共役作用素 $H_{\rm f}$ の生成する熱半群 $e^{-tH_{\rm f}}$ の期待値 $(F,e^{-tH_{\rm f}}G)$ を無限次元ガウス過程で表すためには時間発展を表すユニタリー作用素 $e^{-itH_{\rm f}}$ を $e^{-tH_{\rm f}}$ に変えること, つまり実時間 t を 虚数時間 $-it$ へ解析接続することが必要になる. それを形式的にみてみよう. $\mathbb{1}(\in\mathscr{F})$ をFock真空とする. 質量 $\nu\geq 0$ のスカラー場 $\phi_t(f)=e^{-itH_{\rm f}}\phi(f)e^{itH_{\rm f}}$, $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, のローレンツ不変な理論では自由場の2点関数は $(\mathbb{1},\phi_t(f)\phi_s(g)\mathbb{1})=\int f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})W(x-y)dxdy$ で与えられ, W は Wightman 超関数といわれる. 形式的に $W(x-y)=(\mathbb{1},\phi(x)\phi(y)\mathbb{1})$ で与えられる. ここで $x=(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ で

$$W(x)=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{it\sqrt{|k|^2+\nu^2}-ik\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{|k|^2+\nu^2}}dk.$$

Edward Nelson は Euclid 場から場の量子論を構成する仕方を発見した. そして構成的場の量子論は1960年代に Euclid 場の理論を礎に研究された. $W((t,\mathbf{x}))$ の解析接続された関数は Schwinger 関数とよばれる:

$$W((it,\mathbf{x}))=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-t\sqrt{|k|^2+\nu^2}-ik\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{|k|^2+\nu^2}}dk=\frac{1}{2(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4}\frac{e^{ik_0t-ik\cdot\mathbf{x}}}{|k|^2+\nu^2+k_0^2}d\mathbf{k},$$

$\mathbf{k}=(k_0,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. つまり, Euclid 場 $\phi_{\mathrm{E}t}(f)=e^{-tH_\mathrm{f}}\phi(f)e^{tH_\mathrm{f}}$ の共分散は

$$(\mathbb{1},\phi_{\mathrm{E}t}(f)\phi_{\mathrm{E}s}(g)\mathbb{1})=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)e^{-|t-s|\sqrt{|k|^2+\nu^2}}\frac{d\mathbf{k}}{|k|^2+\nu^2+k_0^2}\tag{1.1}$$

となる. これは形式的に $H_\mathrm{f}\mathbb{1}=0$ と思えば, $(\phi(f),e^{-(s-t)H_\mathrm{f}}\phi(g))$ と読める. 直感的に Euclid 場とは (1.1) を共分散に持つようなガウス過程のことである. さらに分散の形からも分かるように Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程の無限次元版とも思える.

1.2 Boson Fock 空間

上で述べた形式的な議論を Hilbert 空間論的に厳密に述べる. W を Hilbert 空間とし, $\otimes_\mathrm{s}^n W$ は W の n-重対称テンソル積を表す. つまり $\otimes_s^n W=S_n(\otimes^n W)$ でユニタリー作用素 S_n は

$$S_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\wp_n}f_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\pi(n)},\quad n\geq 1,$$

で定める. ここで $\wp_n$ は n 次置換群を表す. $\mathscr{F}^{(n)}=\mathscr{F}^{(n)}(W)=\otimes_\mathrm{s}^n W$, $\otimes_\mathrm{s}^0 W=\mathbb{C}$ として, 無限直和空間 $\mathscr{F}=\mathscr{F}(W)=\bigoplus_{n=0}^\infty\mathscr{F}^{(n)}(W)$ を考える. ここにスカラー積を定めて位相を入れる. そのスカラー積は $(\Psi,\Phi)_\mathscr{F}=\sum_{n=0}^\infty(\Psi^{(n)},\Phi^{(n)})_{\mathscr{F}^{(n)}}$ で与えられる. $(\mathscr{F}(W),(\cdot,\cdot)_{\mathscr{F}(W)})$ は W 上の Boson Fock 空間といわれ, これは Hilbert 空間である. Fock 空間 $\mathscr{F}$ は ℓ_2-列 $(\Psi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で $\Psi^{(n)}\in\mathscr{F}^{(n)}$ かつ $\|\Psi\|_\mathscr{F}^2=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2<\infty$ となるものと同一視される. $\Omega_\mathrm{b}=(1,0,0,...)$ は Fock 真空とよばれる. 生成・消滅作用素という $\mathscr{F}$ 上の 2 つの重要な閉作用素を定義しよう. それは $a^*(f)$, $a(f)$ と表され, $(a^*(f)\Psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}), n\geq 1$, $(a^*(f)\Psi)^{(0)}=0$ で定義される. これらは可閉作用素でその閉包も同じ記号で書くことにする. 定義域は $D(a^*(f))=\left\{(\Psi^{(n)})_{n\geq 0}\in\mathscr{F}\,\middle|\,\sum_{n=1}^\infty n\|S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)})\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2<\infty\right\}$ である. さらに $a(f)=(a^*(\bar{f}))^*$ である. 名前からわかるように $a^*(f)$ はボゾン数を一つふやし, $a(f)$ は一つ減らす作用である. $D\subset W$ を稠密な部分集合とすれば L.H.$\{a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega_\mathrm{b},\Omega_\mathrm{b}|\, f_j\in D, j=1,..,n,n\geq 1\}$ も稠密になる. $\mathscr{F}_\mathrm{fin}=\left\{(\Psi^{(n)})_{n\geq 0}\in\mathscr{F}\,\middle|\,\exists M\ s.t.\ \Psi^{(m)}=0(\forall m\geq M)\right\}$ は有限粒子部分空間といわれる. a,a^* は $\mathscr{F}_\mathrm{fin}$ を不変にし, $\mathscr{F}_\mathrm{fin}$ 上で正準交換関係

$$[a(f),a^*(g)]=(\bar{f},g)\mathbb{1},\quad [a(f),a(g)]=0,\quad [a^*(f),a^*(g)]=0$$

をみたす. T を W 上の縮小作用素とする. T の第 2 量子化 $\Gamma(T)$ を $\Gamma(T)=\bigoplus_{n=0}^\infty(\otimes^n T)$ で定義する. ここで $\otimes^0 T=\mathbb{1}$. $\Gamma(T)$ も縮小作用素になる. 第 2 量子化 Γ はファンクター $\Gamma:\mathscr{C}(W\to W)\to\mathscr{C}(\mathscr{F}\to\mathscr{F})$ を定める. ここで $\mathscr{C}(X\to Y)$ は X から Y への縮小作用素全体の集合である. ファンクター Γ は半群の性質をみたし, さらに $\mathscr{C}(W\to W)$ は $*$-代数である. つまり $\Gamma(S)\Gamma(T)=\Gamma(ST)$, $\Gamma(S)^*=\Gamma(S^*)$, $\Gamma(\mathbb{1})=\mathbb{1}$ が $S,T\in\mathscr{C}(W\to W)$ に対して

成り立つ．自己共役作用素 h に対して $\{\Gamma(e^{ith}) : t \in \mathbb{R}\}$ は強連続 1 径数ユニタリー群になる．Stone の定理により一意的な自己共役作用素 $d\Gamma(h)$ で $\Gamma(e^{ith}) = e^{itd\Gamma(h)}$, $t \in \mathbb{R}$, となるものが存在する．これも $d\Gamma(h)$ の第 2 量子化という．$d\Gamma(h) = -i\dfrac{d}{dt}\Gamma(e^{ith})\lceil_{t=0}$ だから

$$d\Gamma(h) = 0 \oplus \left[\bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{h} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}\right)\right]$$

となる．よって $d\Gamma(h)\Omega_{\mathrm{b}} = 0$, $d\Gamma(h)a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega_{\mathrm{b}} = \sum_{j=1}^{n} a^*(f_1)\cdots a^*(hf_j)\cdots a^*(f_n)\Omega_{\mathrm{b}}$. 第 2 量子化作用素のスペクトルは

$$\sigma(d\Gamma(h)) = \overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma(h), j = 1, ..., n, n \geq 1\right\} \cup \{0\}},$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(d\Gamma(h)) = \left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(h), j = 1, ..., n, n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

となるので, もし $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(h)$ ならば $d\Gamma(h)$ の固有値 0 は単純になる．$N = d\Gamma(\mathbb{1})$ は個数作用素といわれ, $\sigma(N) = \sigma_{\mathrm{p}}(N) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である．

$a^\sharp(f)$ は非有界作用素である．そこで有用な不等式を紹介する．

命題 1.1 h は正の自己共役作用素, $f \in D(h^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{1/2})$ とする．このとき $\Psi \in D(a^\sharp(f))$ かつ

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\| + \|f\|\|\Psi\|.$$

特に $f \in D(h^{-1/2})$ のとき $D(d\Gamma(h)^{1/2}) \subset D(a^\sharp(f))$.

この命題から $f \in W$ に対して, $\|a(f)\Psi\| \leq \|f\|\|N^{1/2}\Psi\|$, $\|a^*(f)\Psi\| \leq \|f\|(\|N^{1/2}\Psi\| + \|\Psi\|)$ が分かる．最後に第 2 量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係を与えておく．

$$[d\Gamma(h), a^*(f)]\Psi = a^*(hf)\Psi, \quad [d\Gamma(h), a(f)]\Psi = -a(hf)\Psi.$$

ここで $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2}) \cap \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$. これは極限操作により $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2})$ まで拡張できる．

Segal 場 $\Phi(f)$ は $\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(\bar{f}))$ で定義される．またその共役運動量作用素は $\Pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) - a(\bar{f}))$ で定義される．すぐに

$$[\Phi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Re}(f, g), \quad [\Phi(f), \Phi(g)] = i\mathrm{Im}(f, g), \quad [\Pi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Im}(f, g)$$

がわかる．

命題 1.2 K を対称作用素とする．ある $t>0$ に対して稠密な部分集合 $\mathcal{D}\subset D(K)$ で $\sum_{n=0}^\infty \|K^n f\|t^n/n!<\infty$ が任意の $f\in\mathcal{D}$ に対して成り立つようなものが存在するとときき K は $\mathcal{D}$ 上本質的自己共役である[1].

$\mathrm{s}-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m \frac{\|\Phi(f)^n\Psi\|t^n}{n!}<\infty$ が $\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ と $t\geq 0$ で成り立つので命題 1.2から $\Phi(f)$ と $\Pi(g)$ がともに $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上本質的自己共役作用素であることがわかる．その閉包も同じ記号で表す．

Wick 積 $:\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):$ は帰納的に $:\Phi(f):=\Phi(f)$, $:\Phi(f)\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):=\Phi(f)\ :\prod_{i=1}^n\Phi(f_i): -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(f,f_j)\ :\prod_{i\neq j}\Phi(f_i):$ で定義される．すぐに

$$:\Phi(f)^n:=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{k!(n-2k)!}\Phi(f)^{n-2k}\left(-\frac{1}{4}\|f\|^2\right)^k$$

がわかる．$:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\ \Omega_{\mathrm{b}}=2^{-n/2}a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega_{\mathrm{b}}$ なので

$$\left(:\prod_{i=1}^n\Phi(f_i):\ \Omega_{\mathrm{b}},\ :\prod_{i=1}^m\Phi(g_i):\ \Omega_{\mathrm{b}}\right)=\delta_{nm}2^{-n/2}\sum_{\pi\in\mathscr{P}_n}\prod_{i=1}^n(g_i,f_{\pi(i)})$$

となる．さらに

$$:e^{\alpha\Phi(f)}:\ \Omega_{\mathrm{b}}=\mathrm{s}-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m\frac{\alpha^n}{n!}\ :\Phi(f)^n:\ \Omega_{\mathrm{b}}=e^{-(1/4)\alpha^2\|f\|^2}e^{\alpha\Phi(f)}\Omega_{\mathrm{b}}.$$

つまり実数値関数 f, g に対して $(\Omega_{\mathrm{b}},\Phi(f)\Omega_{\mathrm{b}})=0$, $(\Omega_{\mathrm{b}},\Phi(f)\Phi(g)\Omega_{\mathrm{b}})=\frac{1}{2}(f,g)$. さらに $(\Omega_{\mathrm{b}},e^{\alpha\Phi(f)}\Omega_{\mathrm{b}})_{\mathscr{F}}=e^{(1/4)\alpha^2\|f\|^2}$ が成り立つ．交換関係 $[\Phi(f),\Phi(g)]=0$ から $\Phi(f)$ はガウス型確率変数として実現できることが予想される．

1.3 $\mathscr{Q}$-空間

確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の実ベクトル空間 $\mathscr{E}$ を指数にもつガウス型確率変数について考える．以降 $\mathbb{E}_Q[\cdots]$ は確率測度 Q での期待値を表す．また Q^x が $\mathbb{R}^d$ に値をとるパス上の確率測度で初期分布が $x\in\mathbb{R}^d$ 上のデルタ測度のとき $\mathbb{E}_{Q^x}[\ldots]=\mathbb{E}_Q^x[\cdots]$ と表す．

定義 1.1 (**ガウス超過程**) $\phi(f)$, $f\in\mathscr{E}$, が確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $\mathscr{E}$ を指数に持つガウス超過程であるとは次を満たすことである．

(1) $\phi(f)$ は $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上のガウス過程で平均ゼロ, 共分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{E}}$.

[1] Nelson's analytic vector theorem.

(2) $\phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\phi(f)+\beta\phi(g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) Σ は $\{\phi(f)\mid f\in\mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

ガウス超過程の存在は知られている.

$$\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}=\{F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\,|\,F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),f_j\in\mathscr{E},j=1,...,n,n\geq 1\}$$

と定義する. このとき次は同値であることが知られている.

(1) $\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ は $L^2(\mathscr{Q})$ で稠密.

(2) Σ は $\{\phi(f)\mid f\in\mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

1.4 Wiener-Itô-Segal 同型

$L^2(\mathscr{Q})=L^2(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ とおく. $\mathscr{E}$ を実ヒルベルト空間とする. $L^2(\mathscr{Q})$ と $\mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ はユニタリー同値になることが知られている. ここで $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は複素ヒルベルト空間で $\mathscr{E}$ の複素化である[2]. これをみてみよう. Fock 空間の Wick 積と同様に $L^2(\mathscr{Q})$ 上の Wick 積を定義する. $\prod_{i=1}^n\phi(f_i)$ の Wick 積を帰納的に $:\!\phi(f)\!:=\phi(f)$, $:\!\phi(f)\prod_{i=1}^n\phi(f_i)\!:=\phi(f)\ :\!\prod_{i=1}^n\phi(f_i)\!:\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(f,f_j)\ :\!\prod_{i\neq j}\phi(f_i)\!:$ で定義する. すぐに $f_i,g_j\in\mathscr{E}$ に対して

$$\left(:\!\prod_{i=1}^n\phi(f_i)\!:,\ :\!\prod_{i=1}^m\phi(g_i)\!:\right)=\delta_{mn}\sum_{\pi\in\wp_n}2^{-n}\prod_{i=1}^n(f_i,g_{\pi(i)}).$$

さらに $:\!e^{\alpha\phi(f)}\!:=\mathrm{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m\frac{\alpha^n}{n!}\ :\!\phi(f)^n\!:=e^{(1/4)\alpha^2\|f\|^2}e^{\alpha\phi(f)}$ もわかる. 部分空間を $L_n^2(\mathscr{Q})=\overline{\mathrm{L.H.}\{\ :\!\prod_{i=1}^n\phi(f_i)\!:\,|\,f_i\in\mathscr{E},i=1,...,n\}\cup\{\mathbb{1}\}}$ としよう. このとき $L_m^2(\mathscr{Q})\perp L_n^2(\mathscr{Q})$ $(n\neq m)$ がわかる.

$$L^2(\mathscr{Q})=\bigoplus_{n=0}^\infty L_n^2(\mathscr{Q})$$

は Wiener-Itô 分解として知られている. $\theta_{\mathrm{W}}:\mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})\to L^2(\mathscr{Q})$ を $\theta_{\mathrm{W}}\ :\!\prod_{i=1}^n\Phi(f_i)\!:\ \Omega_{\mathrm{b}}=:\!\prod_{i=1}^n\phi(f_i)\!:$, $f_1,...,f_n\in\mathscr{E}$, $\theta_{\mathrm{W}}\Omega_{\mathrm{b}}=\mathbb{1}$ で定める.

命題 1.3 (**Wiener-Itô-Segal 同型**) $\theta_{\mathrm{W}}:\mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})\to L^2(\mathscr{Q})$ は次を満たす: *(1)* $\theta_{\mathrm{W}}\Omega_{\mathrm{b}}=\mathbb{1}$, *(2)* $\theta_{\mathrm{W}}\mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})=L_n^2(\mathscr{Q})$, *(3)* $\theta_{\mathrm{W}}\Phi(f)\theta_{\mathrm{W}}^{-1}=\phi(f)$.

[2] 複素化 $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}=\{\{f,g\}|f,g\in\mathscr{E}\}$ で定義し, $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して $\lambda\{f,g\}=\{\lambda f,\lambda g\}$, $i\lambda\{f,g\}=\{-\lambda f,\lambda g\}$, $\{f,g\}+\{f',g'\}=\{f+f',g+g'\}$ となるものである. スカラー積は $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ 上に $(\{f,g\},\{f',g'\})_{\mathscr{E}_{\mathbb{C}}}=(f,f')+(g,g')+i\,((f,g')-(g,f'))$ で定義される. $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}},(\cdot,\cdot)_{\mathscr{E}_{\mathbb{C}}})$ は Hilbert 空間になる.

$T:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ を縮小作用素とし, $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素に拡張しておく. $\theta_{\rm W}\Gamma(T)\theta_{\rm W}^{-1}:L^2(\mathscr{Q})\to L^2(\mathscr{Q})$ も $L^2(\mathscr{Q})$ 上の第 2 量子化作用素とよばれ, 簡単に $\Gamma(T)$ と書くことにする. すぐに $\Gamma(T)$ $:\prod_{i=1}^n\phi(f_i):=:\prod_{i=1}^n\phi(Tf_i):$ と $\Gamma(T)\mathbb{1}=\mathbb{1}$ がわかる. さらに自己共役作用素 h に対して $\theta_{\rm W}d\Gamma(h)\theta_{\rm W}^{-1}$ も混乱しない限りは簡単に $d\Gamma(h)$ とかくことにする. もちろん $d\Gamma(h)\mathbb{1}=0$ かつ $d\Gamma(h)$ $:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):=\sum_{j=1}^n$ $:\phi(f_1)\cdots\phi(hf_j)\cdots\phi(f_n):$ である.

命題 1.4 (**正値保存性**)T を実 *Hilbert* 空間 $\mathscr{E}$ 上の縮小作用素とする. このとき $\Gamma(T)$ は正値保存作用素になる.

証明: $\Gamma(T)$ $:\exp(\alpha\phi(f)):=:\exp(\alpha\phi(Tf)):$ が $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して成立する. よって $\Gamma(T)e^{\alpha\phi(f)}=e^{\alpha\phi(Tf)}e^{\frac{1}{4}\alpha^2(f,(1-T^*T)f)}$ となる. $F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\in\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ に対しては,

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}d\vec{k}\hat{F}(\vec{k})e^{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n(f_i,(1-T^*T)f_j)k_ik_j}e^{i\sum_{j=1}^nk_j\phi(Tf_j)}.$$

$\|T\|\leq1$ なので, $\{(f_i,(1-T^*T)f_j)\}_{i,j}$ は正定値[3]. よって F とガウス核 D_T のたたみこみで

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))=(2\pi)^{-n/2}(F*D_T)(\phi(Tf_1),\cdots,\phi(Tf_n))$$

と表せる. よって $F\geq0$ は $\Gamma(T)F\geq0$ を意味する. $\Psi\in L^2(\mathscr{Q})$ を非負としよう. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{S}_{\mathscr{Q}}$ st $0\leq F_n\to\Psi$ $(n\to\infty)$ となる列が存在するので極限操作により命題が従う. □

1.5 スカラー場: $W=L^2(\mathbb{R}^d)$

スカラー場を考える. $W=L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $\mathscr{F}^{(n)}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ 上の対称関数の全体 $\{f\in L^2(\mathbb{R}^{dn})|f(k_1,\ldots,k_n)=f(k_{\pi(1)},\ldots,k_{\pi(n)}),\forall\pi\in\wp_n\}$ と同一視できる. 生成・消滅作用素は[4]

$$(a(f)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d}f(k)\Psi^{(n+1)}(k,k_1,...,k_n)dk,\ n\geq0,$$

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^nf(k_j)\Psi^{(n-1)}(k_1,...,\hat{k}_j,...,k_n),\ n\geq1,$$

$$(a^*(f)\Psi)^{(0)}=0$$

[3] positive semi-definite.

[4] 形式的に記号 $a(k)$ と $a^*(k)$ は

$$(a(k)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\sqrt{n+1}\Psi^{(n+1)}(k,k_1,...,k_n),$$

$$(a^*(k)\Psi)^{(n)}(k_1,...,k_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n\delta(k-k_j)\Psi^{(n-1)}(k_1,...,\hat{k}_j,...,k_n),$$

となり $[a(k),a^*(k')]=\delta(k-k')$, $[a(k),a(k')]=0=[a^*(k),a^*(k')]$ をみたす.

となる. $\omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ はかけ算作用素で[5], 次で定義される.

$$\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}, \quad k \in \mathbb{R}^d.$$

ここで $\nu \geq 0$ はボゾンの質量を表す. その第 2 量子化作用素は

$$\left(d\Gamma(\omega)\Psi\right)^{(n)}(k_1, ..., k_n) = \left(\sum_{j=1}^n \omega(k_j)\right)\Psi^{(n)}(k_1, ..., k_n)$$

となる. $d\Gamma(\omega)$ は自由 Hamiltonian といわれ, $H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega)$ とおく[6]. $\sigma(H_{\mathrm{f}}) = [0, \infty)$ かつ $\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{f}}) = \{0\}$ である. 特に $H_{\mathrm{f}}\Omega_{\mathrm{b}} = 0$. 交換関係は $[H_{\mathrm{f}}, a(f)] = -a(\omega f)$, $[H_{\mathrm{f}}, a^*(f)] = a^*(\omega f)$. もし $f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば次の有用な不等式

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\| + \|f\|\|\Psi\|$$

が成り立つ.

1.6 Euclid 場とマルコフ性

$W = L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. $\phi(f)$ を確率空間 $(\mathscr{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数に持つガウス超過程としよう. また $\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は確率空間 $(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}, \Sigma_{\mathrm{E}}, \mu_{\mathrm{E}})$ 上の $F \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つガウス超過程とする. $L^2(\mathscr{Q}) \cong \mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ が Wiener-Itô-Segal 同型から従う. 同様に[7] $\theta_{\mathrm{W}}\phi(f)\theta_{\mathrm{W}}^{-1} = \Phi(\hat{f})$. いまから

$$\mathrm{I}_t : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$$

を $\tau_t : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ の第 2 量子化作用素で定義しよう. ここで

$$\widehat{\tau_s f}(k_0, k) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega(k)}}{\sqrt{\omega(k)^2 + |k_0|^2}} \hat{f}(k).$$

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\overline{\tau_t f} = \tau_t f$ だから τ_t は実を実にうつす. $\hat{\omega} = \omega(-i\nabla)$ とする. 簡単に $\tau_s^*\tau_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ が示せる. 特に τ_t は等長作用素である. $\mathrm{I}_t : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$ を

$$\mathrm{I}_t \mathbb{1}_{\mathrm{M}} = \mathbb{1}_{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{I}_t \ {:}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n){:} = {:}\phi_{\mathrm{E}}(\tau_t f_1)\cdots\phi_{\mathrm{E}}(\tau_t f_n){:}$$

で定義する. 恒等式 $\tau_s^*\tau_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ から $\mathrm{I}_t^*\mathrm{I}_s = e^{-|t-s|\theta_{\mathrm{W}}^{-1}H_{\mathrm{f}}\theta_{\mathrm{W}}}$ が従う. ここで $\theta_{\mathrm{W}}^{-1}H_{\mathrm{f}}\theta_{\mathrm{W}}$ は $L^2(\mathscr{Q})$ の自由 Hamiltonian である.

[5] dispersion relation とよばれる.

[6] 形式的に $H_{\mathrm{f}} = \int \omega(k)a^*(k)a(k)dk$ と書くこともある.

[7] Wiener-Itô-Segal 同型からは $\theta_{\mathrm{W}}\phi(f)\theta_{\mathrm{W}}^{-1} = \Phi(f)$ が従うが $\Phi(f) \cong \Phi(\hat{f})$ なので $\Phi(f)$ と $\Phi(\hat{f})$ を同一視する.

命題 1.5 (**自由 Hamiltonian の汎関数積分表示**) $F,G\in L^2(\mathscr{Q})$ とし $t\geq 0$ とする．このとき $(F,e^{-tH_\mathrm{f}}G)_{L^2(\mathscr{Q})}=(\mathrm{I}_0F,\mathrm{I}_tG)_{L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})}$.

I_t のマルコフ性について説明する．$\mathscr{O}\subset\mathbb{R}$ に対して $L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})(\mathscr{O})=\left\{f\in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})\,\middle|\,\mathrm{supp}f\subset\mathscr{O}\times\mathbb{R}^d\right\}$ で定める．射影作用素 $L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})\to L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})(\mathscr{O})$ を $e_\mathscr{O}$ で表す．$\Sigma_\mathscr{O}$ は $\{\phi_\mathrm{E}(f)\in L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})|f\in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})(\mathscr{O})\}$ を可測にする最小のシグマ代数である． 一方 $\mathscr{E}_\mathscr{O}=\{\Phi\in L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})|\Phi$は$\Sigma_\mathscr{O}$可測$\}$ とする． $e_t=\tau_t\tau_t^*:L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})\to\mathrm{Ran}(\tau_t)$, $t\in\mathbb{R}$, とすれば $\{e_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は射影作用素の族になる． Σ_t を $\{\phi_\mathrm{E}(f)\in L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})|f\in\mathrm{Ran}(e_t)\}$ を可測にする最小のシグマ代数, $\mathscr{E}_t=\{\Phi\in L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})|\Phi$は$\Sigma_t$可測$\}$ としよう．

補題 1.6 $a\leq b\leq t\leq c\leq d$ とする．

(1) $L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})(\{t\})=\mathrm{Ran}(e_t)$．また $f\in\mathrm{Ran}(e_t)$ はある $g\in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d)$ によって $f=\tau_tg$ と表せる．特に $e_{\{t\}}=e_t$.

(2) $L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})([a,b])=\overline{\mathrm{L.H.}\{f\in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{d+1})|f\in\mathrm{Ran}(e_t),a\leq t\leq b\}}^{\|\cdot\|}$ が成立する．

(3) 次の *(a)-(d)*が成立する．*(a)* $e_ae_be_c=e_ae_c$, *(b)* $e_{[a,b]}e_te_{[c,d]}=e_{[a,b]}e_{[c,d]}$, *(c)* $e_ce_be_a=e_ce_a$, *(d)* $e_{[c,d]}e_te_{[a,b]}=e_{[c,d]}e_{[a,b]}$.

$\mathrm{E}_t=\mathrm{I}_t\mathrm{I}_t^*=\Gamma_\mathrm{E}(e_t)$, $\mathrm{E}_\mathscr{O}=\Gamma_\mathrm{E}(e_\mathscr{O})$, $\mathscr{O}\subset\mathbb{R}$, としよう． $\mathrm{E}_{\{t\}}=\mathrm{E}_t$ が成り立つことは 補題 1.6からわかる．

命題 1.7 (**マルコフ性**) *(1)* $\mathrm{Ran}(\mathrm{E}_{[a,b]})=\mathscr{E}_{[a,b]}$. *(2)* $\mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_t\mathrm{E}_{[c,d]}=\mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_{[c,d]}$, $\mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_t\mathrm{E}_{[a,b]}=\mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_{[a,b]}$ が $a\leq b\leq t\leq c\leq d$ に対して成り立つ．*(3)* もし $[a,b]\subset[c,d]$ ならば $\mathrm{E}_{[a,b]}\mathrm{E}_{[c,d]}=\mathrm{E}_{[c,d]}\mathrm{E}_{[a,b]}=\mathrm{E}_{[a,b]}$.

注意 1.1 命題 1.7 (1) から $\mathrm{E}_{[a,b]}$ は $\Sigma_{[a,b]}$ 可測な $L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ 関数全体への射影である．$\mathrm{E}_{[a,b]}F$ は $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{[a,b]}]$ と一致する[8]．また $\mathrm{E}_tF=\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_t]$. 補題 1.7 (2) は E_s, $s\in\mathbb{R}$, のマルコフ性とよばれる．

命題 1.8 $F\in\mathscr{E}_{s+t}$ とするとき $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{(-\infty,s]}]=\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_s]$ が成り立つ．

証明: $\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_{(-\infty,s]}]=\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_{s+t}F=\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F$ がマルコフ性から従う．$\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s=\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_{\{s\}}=\mathrm{E}_{\{s\}}=\mathrm{E}_s$ なので $\mathrm{E}_{(-\infty,s]}\mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F=\mathrm{E}_s\mathrm{E}_{s+t}F=\mathrm{E}_sF=\mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}}[F|\Sigma_s]$ がわかる． □

このマルコフ性を使ってFeynman−Kac 型汎関数積分表示を構成できる．簡単な例を紹介しよう．多項式 $P(X)=a_{2n}X^{2n}+a_{2n-1}X^{2n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ で $a_{2n}>0$ とする．$f\in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d)$ に対して $H_\mathrm{I}=:P(\phi(f)):$, $H_P=H_\mathrm{f}\dotplus H_\mathrm{I}$ としよう[9]．e^{-tH_P} のFeynman−Kac 型汎関数積分表示

[8]条件付き期待値という．

[9]$\dotplus$ は quadratic form sum を表す．

を形式的に求める. Trotter 積公式から $e^{-tH_P} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}\left(e^{-(t/n)H_\mathrm{f}}e^{-(t/n)H_\mathrm{I}}\right)^n$. ここに $e^{-|t-s|H_\mathrm{f}} = \mathrm{I}_t^*\mathrm{I}_s$ を代入すると $e^{-tH_P} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_0^*\left(\prod_{j=1}^n \mathrm{I}_{tj/n}e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}}\mathrm{I}_{tj/n}^*\right)\mathrm{I}_t$. よって

$$e^{-tH_P} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_0^*\left(\prod_{j=1}^n \mathrm{E}_{tj/n}e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}(tj/n)}\mathrm{E}_{tj/n}\right)\mathrm{I}_t.$$

$H_\mathrm{I}(t/n)$ は $L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ に作用する作用素. E_s のマルコフ性からすべての E_s を消し去ることができて

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{I}_0F, \left(\prod_{j=1}^n e^{-(tj/n)H_\mathrm{I}(tj/n)}\right)\mathrm{I}_tG\right) = (\mathrm{I}_0, e^{-\int_0^t H_\mathrm{I}(s)ds}\mathrm{I}_tG,)$$

となる. 厳密に証明すれば以下のようになる.

定理 1.9 (**Feynman-Kac-Nelson 公式**)$F, G \in L^2(\mathscr{Q})$ とする. このとき

$$(F, e^{-tH_P}G) = (\mathrm{I}_0F, e^{-\int_0^t H_\mathrm{I}(s)ds}\mathrm{I}_tG)_{L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})}.$$

証明: $F_0 = \mathrm{I}_tF$, $G_t = \mathrm{I}_tG$ とおく. Trotter 積公式と $e^{-|t-s|H_\mathrm{f}} = \mathrm{I}_t^*\mathrm{I}_s$ によって,

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}(F, (e^{-(t/n)H_\mathrm{f}}e^{-(t/n)H_\mathrm{I}})^nG) = \lim_{n\to\infty}\left(F_0, \prod_{i=1}^n(\mathrm{E}_{ti/n}R_i\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right).$$

ここで $R_j = e^{-(t/n)P(\phi_\mathrm{E}(\delta_{jt/n}f))}$, 等式 $\mathrm{I}_s\exp(-tH_\mathrm{I})\mathrm{I}_s^* = \mathrm{E}_s\exp(-t\ :P(\phi_\mathrm{E}(\delta_s\otimes f)):)\mathrm{E}_s$ をつかった[10]. よって

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n(\mathrm{E}_{ti/n}R_i\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{F_0}_{\in\mathscr{E}_{\{0\}}}, \mathrm{E}_{t/n}\,\underbrace{R_1\mathrm{E}_{t/n}(\mathrm{E}_{2t/n}R_2\mathrm{E}_{2t/n})\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[t/n,t]}}\right).$$

マルコフ性から $\mathrm{E}_{t/n}$ を消してもいいから

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n(\mathrm{E}_{ti/n}R_1\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{R_1F_0}_{\in\mathscr{E}_{[0,t/n]}}, \mathrm{E}_{t/n}\,\underbrace{(\mathrm{E}_{2t/n}R_2\mathrm{E}_{2t/n})\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[2t/n,t]}}\right).$$

---

[10] 実際, この等式は以下のように示すことができる.

$$\mathrm{I}_t\phi(f)\ :\prod_{i=1}^n\phi(f_i):\ = :\phi_\mathrm{E}(\tau_tf)\prod_{i=1}^n\phi_\mathrm{E}(\tau_tf_i):\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(\tau_tf,\tau_tf_j)\ :\prod_{i\neq j}\phi(\tau_tf_i): = \phi_\mathrm{E}(\tau_tf)\mathrm{I}_t\ :\prod_{i=1}^n\phi(f_i):\ .$$

よって $\mathrm{I}_t\phi(f)\mathrm{I}_t^* = \phi_\mathrm{E}(\tau_tf)\mathrm{E}_t = \mathrm{E}_t\phi_\mathrm{E}(\tau_tf)\mathrm{E}_t$ となり, 帰納的に $\mathrm{I}_t\left(\prod_{j=1}^n\phi(f_j)\right)\mathrm{I}_t^* = \mathrm{E}_t\left(\prod_{j=1}^n\phi_\mathrm{E}(\tau_tf_j)\right)\mathrm{E}_t$ が示せて, 簡単な極限操作で等式をえる.

同様に $\mathrm{E}_{t/n}$ も消していいので

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{E}_{ti/n}R_1\mathrm{E}_{ti/n})G_t\right) = \left(\underbrace{R_1F_0}_{\in\mathscr{E}_{[0,t/n]}}, \mathrm{E}_{2t/n}\underbrace{R_2\mathrm{E}_{2t/n}\cdots(\mathrm{E}_tR_n\mathrm{E}_t)G_t}_{\in\mathscr{E}_{[2t/n,t]}}\right).$$

帰納的に全ての E_s を消していいから

$$(F, e^{-tH_P}G) = \lim_{n\to\infty}(F_0, R_1\cdots R_nG_t) = (F_0, e^{-\int_0^t H_{\mathrm{I}}(s)ds}G_t)_{L^2(\mathscr{Q})}.$$

□

$e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}$ はもちろん有界作用素ではない．しかし次の不等式はよく知られている．

補題 1.10 $\mathrm{I}_0^*e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{I}_t$ は有界作用素で $\|\mathrm{I}_0^*e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{I}_t\| \le e^{\|h\|^2/4}$ となる．

1.7 Euclid 群と射影作用素の分解

$L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ 上の Euclid 群 $\{u_t, R\}$ は時間シフト $u_tf(x_0,\mathbf{x}) = f(x_0-t,\mathbf{x})$, 時間反転 $rf(x_0,\mathbf{x}) = f(-x_0,\mathbf{x})$ で定義される．$U_t = \Gamma(u_t) : L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}) \to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$, $R = \Gamma(r) : L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}) \to L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$ と定義する．このとき $U_t^* = U_{-t}$, $R^* = R$ を満たし，ともにユニタリーである．$U_t\mathrm{I}_s = \mathrm{I}_{s+t}$, $RU_s = U_{-s}R$ が成立する．また，射影作用素は $E_s = \mathrm{I}_s\mathrm{I}_s^* = \mathrm{I}_s\mathrm{I}_0^*U_{-s}$ のように分解できる．

2 確率解析と Kato クラスをもった Schrödinger 作用素

2.1 Kato クラス

Schrödinger 作用素 H_{p} が生成する熱半群 $e^{-tH_{\mathrm{p}}}$ を確率論的に解析するために便利な Kato クラスといわれるポテンシャルのクラスを導入する．

定義 2.1 (**Kato クラス**)$V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が $\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x\left[\int_0^t |V(B_s)|ds\right] = 0$ を満たすとき V を Kato クラスのポンテンシャルといい．その全体を $\mathscr{K}_d$ であらわす．

$V = V_+ - V_-$ とし, $V_+ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $V_- \in \mathscr{K}_d$ となるとき, V は Kato 分解可能という．Kato クラスの同値な定義が知られている．$V \in \mathscr{K}_d$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{r\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<r}|g(x-y)V(y)|dy = 0. \tag{2.1}$$

ここで $g(x) = \begin{cases} |x| & d=1 \\ -\log|x| & d=2 \\ |x|^{2-d} & d\ge 3 \end{cases}$ ．Kato クラスポテンシャルの例をあげる．

(1) $d=3$ で $|x|^{-(2-\varepsilon)}(\varepsilon>0)$,

(2) $V\in L^p(\mathbb{R}^d)+L^\infty(\mathbb{R}^d)$. ここで $p=1$ $(d=1)$, $p>d/2(d\geq 2)$.

命題 2.1 $V\in\mathscr{K}_d$ ならば $W(x)=\sum_{i\neq j}^N V(x^i-x^j)\in\mathscr{K}_{dN}$ $(x=(x^1,...,x^N)\in\mathbb{R}^{dN})$.

証明: [CFKS87] をみよ. □

2.2 基底状態変換と $P(\phi)_1$ 過程

$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},W^x)$ 上の時間が $\mathbb{R}$ 全体を動く d-次元ブラウン運動を表す. $\mathbb{E}_W^0$ は簡単のため $\mathbb{E}_W$ で表す. その性質をまとめておく.

(1) $W^x(B_0=x)=1$;

(2) $(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})_{1\leq i\leq n}$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_n)$ は独立なガウス確率変数で B_t-B_s の分散は $t-s(t>s)$;

(3) $(B_{-t_{i-1}}-B_{-t_i})_{1\leq i\leq n}$ $(0=-t_0>-t_1>\cdots>-t_n)$ は独立なガウス確率変数で $B_{-t}-B_{-s}$ の分散は $s-t(-t>-s)$;

(4) $\mathbb{R}\ni t\mapsto B_t(\omega)\in\mathbb{R}$ は連続 a.s.;

(5) B_t と B_s $(t>0,\ s<0)$ は独立;

(6) $dx\otimes W^x$ に関する $B_{t_0},\ldots,B_{t_n}$, $-\infty<t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$ の同分布はシフト不変. つまり
$$\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\prod_{i=0}^n f_i(B_{t_i})\right]=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\prod_{i=0}^n f_i(B_{t_i+s})\right].$$

命題 2.2 $0\leq V\in\mathscr{K}_d$ としよう. このとき $\beta,\gamma>0$ で次を満たすものが存在する: $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{\int_0^t V(B_s)ds}]<\gamma e^{t\beta}$.

$-\frac{1}{2}\Delta+V$ で V が Kato 分解可能な場合を考える. このとき $L^2(\mathbb{R}^d)\ni f\mapsto S_tf(x)=\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^t V(B_s)}f]\in L^2(\mathbb{R}^d)$ が定義できる. さらに S_t, $t\in\mathbb{R}$, が対称な有界作用素で半群の性質 $S_tS_s=S_{s+t}$ をみたし, $t\mapsto S_tf$ が強連続になることもわかる. よって S_t は強連続な対称 1 径数半群であることがわかるから, 下から有界な自己共役作用素 h が一意的に存在して $S_t=e^{-th}$ と表せる[11]. この h を $h=H_\mathrm{p}=-\frac{1}{2}\Delta+V$ と書くことにする.

[11] 一般に S_t, $t\geq 0$, が対称な強連続 1 係数半群ならば, 下から有界な自己共役作用素 A が存在して $S_t=e^{-tA}$ と表せる. 証明は e.g., [LHB11, Proposition 3.26] にある.

定義 2.2 (**基底状態**) 自己共役作用素 K のスペクトルの下限を e とかく. $m=\dim\mathrm{Ker}(K-e)$ とおく. $m\geq 1$ となるとき K の基底状態は存在するといい, $m=1$ のとき K の基底状態は一意的に存在するという. また $m=0$ のとき K の基底状態は存在しないという.

H_p は正規化された基底状態で $\Psi_\mathrm{p}>0$ となるものを持つとする. $H_\mathrm{p}\Psi_\mathrm{p}=E_\mathrm{p}\Psi_\mathrm{p}$, $E_\mathrm{p}=\inf\sigma(H)$. $\overline{H_\mathrm{p}}=H_\mathrm{p}-E_\mathrm{p}$ とおく. $d\mathsf{N}_0=\Psi_\mathrm{p}^2(x)dx$ は $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度になる.

定義 2.3 (**基底状態変換**)$\mathscr{U}:L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)\to L^2(\mathbb{R}^d,dx)$, $f\mapsto\Psi_\mathrm{p}f$ を基底状態変換という[12].

基底状態変換はユニタリー変換である. $\overline{H_\mathrm{p}}$ を基底状態変換した自己共役作用素を

$$L_\mathrm{p}=\mathscr{U}^{-1}\bar{H}_\mathrm{p}\mathscr{U},\quad D(L_\mathrm{p})=\{f\in L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)\,|\,\mathscr{U}f\in D(H_\mathrm{p})\}$$

で定義する. $-\Delta$ に付随した拡散過程がブラウン運動であるように, 実は L_p に付随した拡散過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が存在する. 形式的には次のように考える. $\nabla\log\Psi_\mathrm{p}$ が存在すれば $L_\mathrm{p}f=-\frac{1}{2}\Delta f-\nabla\log\Psi_\mathrm{p}\cdot\nabla f$ なので確率微分方程式 (SDE)

$$dX_t=\nabla\log\Psi_\mathrm{p}(X_t)dt+dB_t,\quad X_0=x$$

の解 $(X_t^x)_{t\geq 0}$ は $\mathbb{E}_W[f(X_t^x)]=\left(e^{-tL_\mathrm{p}}f\right)(x)$ を満たす. しかし, この SDE が well-defined かどうかも SDE の解の存在もチェックするのは容易ではない.

$$\mathfrak{X}=C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$$

としよう. $(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}))$ 上の確率測度 $\mathcal{N}_0^x$, $x\in\mathbb{R}^d$, で座標過程[13] $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が L_p を生成する拡散過程[14]になるようなものが存在することが示せる.

定理 2.3 V は *Kato* 分解可能で, H_p は基底状態 $\Psi_\mathrm{p}>0$ をもち. $L_\mathrm{p}=\mathscr{U}^{-1}\bar{H}\mathscr{U}$ はその基底状態変換とする. X_t は $(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}))$ 上の座標過程とする. このとき $(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}))$ 上に確率測度 $\mathcal{N}_0^x$ で以下を満たすものが存在する.

(初期分布) $\mathcal{N}_0^x(X_0=x)=1$.

(鏡映対称性) $(X_t)_{t\geq 0}$ と $(X_s)_{s\leq 0}$ は独立で[15] $X_{-t}\stackrel{\mathrm{d}}{=}X_t$.

(拡散性) フィルトレーション[16] を $\mathcal{F}_t^+=\sigma(X_s,0\leq s\leq t)$, $\mathcal{F}_t^-=\sigma(X_s,t\leq s\leq 0)$ と定義する. このとき $(X_t)_{t\geq 0}$ と $(X_s)_{s\leq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ と $(\mathcal{F}_t^-)_{t\leq 0}$ に関して夫々拡散過程であ

[12] 確率論では Doob の h-変換としてしられている.
[13] $X_t(\omega)=\omega(t)$, $\omega\in\mathfrak{X}$.
[14] パスが連続なマルコフ過程.
[15] 分布 (distribution) が等しい.
[16] 単調増加な部分シグマ代数族.

る. *i.e.*, $s,t\geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s}|\mathcal{F}_s^+]=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s}|\sigma(X_s)]=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}[X_t],$$
$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s}|\mathcal{F}_{-s}^-]=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s}|\sigma(X_{-s})]=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_{-s}}}[X_{-t}].$$

ここで $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}$ は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^y}$ で $y=X_s$ としたもの. さらに $\mathbb{R}\ni t\mapsto X_t\in\mathbb{R}^d$ がほとんどいたるところで連続.

(シフト不変性) $-\infty<t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n<\infty$ とする. このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j})\right]d\mathsf{N}_0=(f_0,e^{-(t_1-t_0)L}f_1\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})L}f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)}.$$

ここで $f_0,f_n\in L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)$, $f_j\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j=1,...,n-1$. さらに有限次元分布がシフト不変

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j})\right]d\mathsf{N}_0=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j+s})\right]d\mathsf{N}_0,\quad s\in\mathbb{R}.$$

定義 2.4 ($P(\phi)_1$ **過程**) 確率空間 $(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}),\mathcal{N}_0^x)$ 上の座標過程 X_t を $P(\phi)_1$ 過程という.

熱半群 $e^{-tH_{\mathrm{P}}}$ の Feynman-Kac 公式はよく知られている. ブラウン運動をつかって

$$(f,e^{-tH_{\mathrm{P}}}g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x[\overline{f(B_0)}e^{-\int_0^t V(B_s)ds}g(B_t)]$$

と表せる. 一方,

$$d\mathcal{N}_0=d\mathsf{N}_0\otimes d\mathcal{N}_0^x$$

と定義すれば, 基底状態変換した $e^{-tL_{\mathrm{P}}}$ は $P(\phi)_1$ 過程によって

$$(f,e^{-tL_{\mathrm{P}}}g)_{L^2(\mathsf{N}_0)}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\overline{f(X_0)}g(X_t)]$$

と表せる. こちらはポテンシャル V の情報が全て $P(\phi)_1$ 過程に組み込まれている. 2 つの公式は一長一短がある. パスの性質はブラウン運動が分かりやすいが, 評価は後者の Feynman$-$Kac 型汎関数積分表示の方がしやすい.

2.3 Dirichlet 原理

$P(\phi)_1$ 過程のパスの性質について説明する. 以下の結果は [KV86] の変形である.

命題 2.4 V は *Kato* 分解可能で．$\Lambda>0$ として，$f\in C(\mathbb{R}^d)\cap D(L_{\rm p}^{1/2})$ と仮定する．$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $P(\phi)_1$ 過程とする．このとき

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{0\le s\le T}|f(X_s)|\ge\Lambda\right)\le\frac{e}{\Lambda}\sqrt{(f,f)_{L^2(\mathsf{N}_0)}+T(L_{\rm p}^{1/2}f,L_{\rm p}^{1/2}f)_{L^2(\mathsf{N}_0)}}.$$

証明: $T_j=Tj/2^n$, $j=0,1,...,2^n$, とおき, T と n を固定する．$G=\{x\in\mathbb{R}^d||f(x)|\ge\Lambda\}$ に対して $\tau=\inf\{T_j\ge 0|\,X_{T_j}\in G\}$ を定義する．このとき恒等式 $\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0,\ldots,2^n}|f(X_{T_j})|\ge\Lambda\right)=\mathcal{N}_0(\tau\le T)$ が従う．この右辺を評価しよう．$0<\varrho<1$ とし, あとで適当な ϱ を選ぶ．$d\mathsf{N}_0$ に関する Schwartz 不等式から

$$\mathcal{N}_0(\tau\le T)=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right]\le\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\varrho^{\tau-T}\right]\le\varrho^{-T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2\right)^{1/2}d\mathsf{N}_0.$$

$0\le\psi$ は $\psi(x)\ge 1$ $(x\in G)$ を満たす任意の関数とする．そうすると Dirichlet 原理 (あとで示す) から

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2d\mathsf{N}_0\le(\psi,\psi)_{L^2(\mathsf{N}_0)}+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi,(\mathbb{1}-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})\psi)_{L^2(\mathsf{N}_0)}.$$

ここで $|f(x)|/\Lambda=\begin{cases}\ge 1, & x\in G,\\ |f(x)|/\Lambda, & x\in\mathbb{R}^d\setminus G\end{cases}$ を ψ に代入すれば

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2d\mathsf{N}_0\le\frac{1}{\Lambda^2}(f,f)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}\frac{1}{\Lambda^2}(|f|,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})|f|).$$

$e^{-(T/2^n)L_{\rm p}}$ は正値改良型[17] なので $(|f|,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})|f|)\le(f,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})f)$．これから

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0,\ldots,2^n}|f(X_{T_j})|\ge\Lambda\right)\le\frac{\varrho^{-T}}{\Lambda}\sqrt{(f,f)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(f,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})f)}.$$

$\varrho=e^{-1/T}$ とおけば $\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}\le 2^n$ より

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0,\ldots,2^n}|f(X_{T_j})|\ge\Lambda\right)\le\frac{e}{\Lambda}\sqrt{(f,f)+2^n(f,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})f)}.$$

$(f,(1-e^{-(T/2^n)L_{\rm p}})f)\le(T/2^n)(L^{1/2}f,L_{\rm p}^{1/2}f)$ なので,

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0,\ldots,2^n}|f(X_{T_j})|\ge\Lambda\right)\le\frac{e}{\Lambda}\sqrt{(f,f)+T(L_{\rm p}^{1/2}f,L_{\rm p}^{1/2}f)}$$

[17] $f\ge 0$ に対して $e^{-(T/2^n)L_{\rm p}}f>0$.

がわかる．$n\to\infty$ とすればルベーグの優収束定理から $\lim_{n\to\infty}\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0,\dots,2^n}|f(X_{T_j})|\geq\Lambda\right)=\mathcal{N}_0\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{j=0,\dots,2^n}|f(X_{T_j})|\geq\Lambda\right)$．さらに関数 $f(X_t)$ は t に関してほとんどいたるところ連続なので $\lim_{n\to\infty}\sup_{j=0,\dots,2^n}|f(X_{T_j})|=\sup_{0\leq s\leq T}|f(X_s)|$ が従う．これで命題が示せた． □

Dirichlet 原理を示そう．

補題 2.5 (**Dirichlet 原理**) 自然数 n を固定し, $T_j=Tj/2^n$, $j=0,1,...,2^n$ とおく．$G\subset\mathbb{R}^d$, $\tau=\inf\{T_j\geq 0|X_{T_j}\in G\}$ としよう．このとき $\psi(x)\geq 1$ $(x\in G)$ を満たす任意の $\psi\geq 0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2 d\mathsf{N}_0\leq(\psi,\psi)_{L^2(\mathsf{N}_0)}+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi,(1-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi)_{L^2(\mathsf{N}_0)}.$$

証明: $\psi_\varrho(x)=\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau]$ と定める．X_s が G の内側から出発すれば $\tau=0$ なので, $\psi_\varrho(x)=1$ $(x\in G)$ が従う．$\mathscr{G}_t=\sigma(X_s,0\leq s\leq t)$ を $X=(X_t)_{t\geq 0}$ の自然なフィルトレーションとしよう．X のマルコフ性から

$$e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}}\psi_\varrho(x)=\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\mathbb{E}^{X_{T/2^n}}_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau]]=\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^{\tau\circ\theta_{T/2^n}}|\mathscr{F}_{T/2^n}]]=\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^{\tau\circ\theta_{T/2^n}}]$$

となる．ここで θ_t は $\mathfrak{X}$ 上のシフトで $(\theta_t\omega)(s)=\omega(s+t)$ $(\omega\in\mathfrak{X})$ で定義される．$x=X_0(\omega)\in\mathbb{R}^d\setminus G$ のとき $(\tau\circ\theta_{T/2^n})(\omega)=\tau(\omega)-T/2^n\geq 0$ に注意せよ．その結果, 恒等式 $\varrho^{T/2^n}e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}}\psi_\varrho(x)=\psi_\varrho(x)$ $(x\in\mathbb{R}^d\setminus G)$ が従う．

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2 d\mathsf{N}_0=(\psi_\varrho,\psi_\varrho)\leq(\psi_\varrho,\psi_\varrho)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi_\varrho,(1-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho)$$

は自明． 右辺は $(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,\psi_\varrho\mathbb{1}_G)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,(\mathbb{1}-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho)$ と計算できる． さらに $(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,(\mathbb{1}-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho)=(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,(\mathbb{1}-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho\mathbb{1}_G)$ なので

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}[\varrho^\tau])^2 d\mathsf{N}_0\leq(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,\psi_\varrho\mathbb{1}_G)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,(1-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho\mathbb{1}_G).\tag{2.2}$$

$\psi_\varrho\mathbb{1}_G(x)\leq\psi(x)$ が全ての $x\in\mathbb{R}^d$ で成り立つことに注意せよ．このとき

$$\begin{aligned}&(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,\psi_\varrho\mathbb{1}_G)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi_\varrho\mathbb{1}_G,(1-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi_\varrho\mathbb{1}_G)\\&\leq(\psi,\psi)+\frac{\varrho^{T/2^n}}{1-\varrho^{T/2^n}}(\psi,(1-e^{-(T/2^n)L_{\mathrm{P}}})\psi).\end{aligned}\tag{2.3}$$

(2.2) と (2.3) から題意が示された． □

3 Nelson 模型

3.1 Nelson 模型の形式的な導出

Nelson 模型はスカラー場と Schrödinger 方程式に従う非相対論的な粒子が線形の相互作用をする模型である．数学的に厳密にスペクトル解析が進んでいる模型の一つでサマースクールの講演の主役である．E. Nelson は 1964 年に [Nel64a, Nel64b] で今日 Nelson 模型といわれるものを厳密に定義し，UV くりこみを行って厳密に紫外切断のない自己共役作用素を定義した．

Nelson 模型の Lagrangian 密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{N}} = \mathscr{L}_{\mathrm{N}}(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{N}} = i\Psi^*\dot{\Psi} + \frac{1}{2m}\partial_j\Psi^*\partial_j\Psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\nu^2\phi^2 + \Psi^*\Psi\phi$$

で与えられる．ここで $\Psi = \Psi(x,t)$ は非相対論的でスピンのない粒子を表す複素スカラー場，$\phi(x,t)$ は中性スカラー場，$\nu \geq 0$ はボゾンの質量，$m > 0$ は粒子の質量である．ここで $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \dot{\phi}\dot{\phi} - \partial_j\phi\partial_j\phi$, $\partial_j = \partial_{x_j}$, $\dot{\phi}$ は時間微分を表し $*$ は複素共役を表す．これは湯川型の強い相互作用と同じ相互作用項 $\Psi^*\Psi\phi$ をもつ．ただし素粒子論で強い相互作用に現れるフェルミオン[18]は生成消滅をしない非相対論的な Schrödinger 作用素に置換えられている．Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{cases} (\Box + \nu^2)\phi(x,t) = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t), \\ \\ \left(i\partial t + \frac{1}{2m}\Delta_x\right)\Psi(x,t) = \phi(x,t)\Psi(x,t). \end{cases}$$

Legendre 変換から Hamiltonian 密度を計算してみよう．共役な運動量は $\Phi = \frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{N}}}{\partial\dot{\Psi}} = i\Psi^*$, $\pi = \frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{N}}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$. よって Hamiltonian 密度 $H = H_{\mathrm{N}}(x,t)$ は

$$H = \Phi\dot{\Psi} + \pi\dot{\phi} - \mathscr{L}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2m}|\partial_x\Psi|^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\partial_x\phi)^2 + \nu^2\phi^2) - \Psi^*\Psi\phi.$$

さらに Hamiltonian は

$$H = \int_{\mathbb{R}^3}\left\{\Psi^*\left(-\frac{1}{2}\Delta_x\right)\Psi + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\partial_x\phi)^2 + \nu^2\phi^2) - \Psi^*\Psi\phi\right\}dx.$$

運動項は $\int_{\mathbb{R}^3}\Psi^*\left(-\frac{1}{2}\Delta_x\right)\Psi dx \to -\frac{1}{2}\Delta$ に置換えられ，相互作用項は $-\int_{\mathbb{R}^3}\Psi^*\Psi\phi dx \to \phi(x)$ に置換えられる．粒子のポテンシャル V を加えて，形式的に Nelson 模型は $-\frac{1}{2}\Delta + V + H_{\mathrm{f}} + \phi(x)$ となる．ここで $H_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}\int(\dot{\phi}^2 + (\partial_x\phi)^2 + \nu^2\phi^2)dx$ である．次の節で厳密に自己共役作用素として Nelson 模型の Hamiltonian を定義する．

[18] グルオン

3.2 Fock 空間上の Nelson 模型

空間次元を d とする. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fock 空間を簡単に $\mathscr{F}$ とおき, Nelson 模型の状態ベクトルのなす Hilbert 空間は $\mathscr{H}_{\mathrm{N}} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}$ で与えられる.

条件 3.1 Dispersion relation: $\omega = \omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\nu \geq 0$.

荷電分布: $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k) = \hat{\varphi}(k)$, $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

ポテンシャル: $V = V_+ - V_-$ は Kato 分解可能.

以降, 断らない限りは条件 3.1を仮定する. $\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ を $\mathscr{F}$ 値 L^2 関数の空間と同一視する.

$$\mathscr{H}_{\mathrm{N}} \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathscr{F} dx = \left\{ F : \mathbb{R}^d \to \mathscr{F} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d} \|F(x)\|_{\mathscr{F}}^2 dx < \infty \right\}.$$

$H_{\mathrm{I}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, を

$$H_{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^*(\hat{\varphi} e^{-ikx}/\sqrt{\omega}) + a(\widetilde{\hat{\varphi}} e^{ikx}/\sqrt{\omega}) \right\}$$

で定める[19]. ここで $\widetilde{\hat{\varphi}}(k) = \hat{\varphi}(-k)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ なので $H_{\mathrm{I}}(x)$ は対称作用素で $\mathscr{F}$ の有限粒子部分空間上で本質的に自己共役になる. $H_{\mathrm{I}}(x)$ の自己共役拡大を $\overline{H_{\mathrm{I}}(x)}$ とかく. 相互作用項 H_{I} は $H_{\mathrm{I}} = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \overline{H_{\mathrm{I}}(x)} dx$ で定める. これは $(H_{\mathrm{I}}\Psi)(x) = \overline{H_{\mathrm{I}}(x)}\Psi(x)$ のように作用し, $D(H_{\mathrm{I}}) = \left\{ \Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}} \,\middle|\, \Psi(x) \in D(\overline{H_{\mathrm{I}}(x)}), x \in \mathbb{R}^d \right\}$ となる. 自由 Hamiltonian は $H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega)$ で与えられる.

定義 3.1 (**Nelson Hamiltonian**)

$$H = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

を Nelson Hamiltonian という.

自己共役性に関しては次のことが容易に示せる.

(1) $H_0 = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$ は $D(H_0) = D(H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}})$ 上非負自己共役である.

(2) H は $D(H_0)$ 上自己共役である. さらに H_0 の任意の芯[20]で本質的自己共役である.

---

[19] 形式的に $H_{\mathrm{I}}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\hat{\varphi}(k) e^{-ikx} a^*(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{ikx} a(k) \right) dk$ と書かれる. ちなみに Sigal 場 $\Phi(\hat{f})$ と $\Phi(\hat{g})$ は一般に可換ではない. 今 $\tilde{\Phi}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(\hat{f}) + a(\widetilde{\hat{f}}))$ と定義すれば, f が実のときは $\Phi(\hat{f}) = \tilde{\Phi}(\hat{f})$ であるが, 一般の f に対しては $\Phi(\hat{f}) \neq \tilde{\Phi}(\hat{f})$ であり, $\tilde{\Phi}(\hat{f})$ と $\tilde{\Phi}(\hat{g})$ は可換である.

[20] core

この証明は基本的である. $\|\overline{H_{\rm I}(x)}\Psi\|_{\mathscr{F}} \le (2\|\hat\varphi/\sqrt{\omega}\|+\|\hat\varphi\|)\|(H_{\rm f}+1)^{1/2}\Psi\|_{\mathscr{F}}$, $\Psi\in D(H_{\rm f})$, が $x\in\mathbb{R}^d$ に対して成り立つ. よって $\Phi\in D(\mathbb{1}\otimes H_{\rm f})$ に対して,

$$\|H_{\rm I}\Phi\|_{\mathscr{H}_{\rm N}} \le (2\|\hat\varphi/\sqrt{\omega}\|+\|\hat\varphi\|)\|1\otimes(H_{\rm f}+1)^{1/2}\Phi\|_{\mathscr{H}_{\rm N}}.$$

$\|(\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+\mathbb{1})^{1/2}\Psi\| \le \varepsilon\|H_0\Psi\|+(1+\frac{1}{4\varepsilon})\|\Psi\|$ なので, Kato-Rellich の定理から H が $D(H_0)$ 上自己共役で, H_0 の任意の芯上本質的自己共役になることがわかる.

3.3 汎関数空間上の Nelson 模型

ガウス超過程 (Q,Σ,μ), $(\phi(f), f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d))$ を固定する. Feynman−Kac 型汎関数積分表示をもちいて Nelson Hamiltonian を解析するときは確率空間上に Hamiltonian を定義すると便利である. すぐに $\theta_{\rm W}H_{\rm I}(x)\theta_{\rm W}^{-1} = \phi(\tilde\varphi(\cdot-x))$ がわかる. ここで $\tilde\varphi=(\hat\varphi/\sqrt{\omega})^{\vee}$. $\tilde H_{\rm I} = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus}\phi(\tilde\varphi(\cdot-x))dx$ とする. つまり $\tilde H_{\rm I}: F(x,\phi)\mapsto\phi(\tilde\varphi(\cdot-x))F(x,\phi)$ となるかけ算作用素. また $L^2(Q)$ 上の自由ハミルトニアンを $\tilde H_{\rm f}=\theta_W H_{\rm f}\theta_W^{-1}$ で定める.

定義 3.2 (**Nelson Hamiltonian**) $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes L^2(Q)$ 上の Nelson Hamiltonian は

$$H = H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\tilde H_{\rm f}+\tilde H_{\rm I}$$

で定義する.

$H_{\rm p}$ の作用する Hilbert 空間も基底状態変換で変換する. 基底状態変換は $U_{\Psi_{\rm p}}: L^2(\mathbb{R}^d; d\mathsf{N}_0)\to L^2(\mathbb{R}^d;dx)$, $f\mapsto\Psi_{\rm p}f$, だった. $\mathsf{P}_0=\mathsf{N}_0\otimes\mu$ とおけば, これは $\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q}$ 上の確率測度になる. $L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q}, d\mathsf{P}_0)$ と $\mathscr{H}_{\rm N}$ は $U_{\Psi_{\rm p}}\otimes\theta_{\rm W}:\mathscr{H}_{\rm N}\to L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q}, d\mathsf{P}_0)$ によってユニタリー同値になる. 簡単のために $L^2(\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q};\mathsf{P}_0)$ を $L^2(\mathsf{P}_0)$, $L^2(\mathbb{R}^d;d\mathsf{N}_0)$ を $L^2(\mathsf{N}_0)$ で表す.

定義 3.3 (**Nelson Hamiltonian**) $L^2(\mathsf{P}_0)$ 上の Nelson Hamiltonian を

$$L = L_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\tilde H_{\rm f}+\tilde H_{\rm I}$$

で定義する.

もちろん, H と L はユニタリー同値である. 以降 $\tilde H_{\rm f}$ を簡単に $H_{\rm f}$ と書くことにする.

3.4 Feynman−Kac 型汎関数積分表示

e^{-tH} のFeynman−Kac 型汎関数積分表示を求めよう. ここではブラウン運動による構成と, $P(\phi)_1$ 過程による構成を紹介する.

定理 3.1 (**ブラウン運動による構成**) $F, G \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tH}G)_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \left(\mathrm{I}_0 F(B_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s)ds\right)} \mathrm{I}_t G(B_t) \right) \right].$$

ここで $\tilde{\varphi}_s = \delta_s \otimes \hat{\varphi}$, $F, G \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ は $L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})$ 値 L^2 関数とみなされている．

証明: $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する．Trotter 積公式と $e^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}} = \mathrm{I}_t^* \mathrm{I}_s$ から

$$\begin{aligned}(F, e^{-tH}G) &= \lim_{n\to\infty} (F, (e^{-(t/n)H_{\mathrm{P}}} e^{-(t/n)H_{\mathrm{I}}} e^{-(t/n)H_{\mathrm{f}}})^n G) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\sum_{j=0}^n (t/n) V(B_{tj/n})} \left(\mathrm{I}_0 F(B_0), e^{-\sum_{j=0}^n (t/n) \phi_{\mathrm{E}}(\tau_{tj/n} \tilde{\varphi}(\cdot - B_{jt/n}))} \mathrm{I}_t G(B_t) \right) \right].\end{aligned}$$

$s \mapsto \tau_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)$ は $\mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ の写像として殆ど至るところ強連続であることを注意しておく．その結果, $s \mapsto \phi_{\mathrm{E}}(\tau_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s))$ も写像 $\mathbb{R} \to L^2(\mathscr{Q}_E)$ として強連続になる．よって定理が従う．V が Kato 分解できるときは簡単な極限操作によって証明できる． □

定理 3.2 ($P(\phi)_1$ **過程による構成**) $F, G \in L^2(\mathsf{P}_0)$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tL}G)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\left(\mathrm{I}_0 F(X_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \tilde{\varphi}_s(\cdot - X_s)ds\right)} \mathrm{I}_t G(X_t) \right) \right].$$

証明: 証明は定理 3.1と同じである． □

定理 3.1, 3.2のFeynman−Kac 型汎関数積分表示は目的にあわせて使い分けられる．例えば Nelson Hamiltonian の基底状態の存在・非存在の証明には $P(\phi)_1$ 過程を用いた表示を使い, 基底状態の空間的指数減衰性の評価にはブラウン運動を用いた表示が有用である．また無限次元 OU 過程 $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を用いたFeynman−Kac 型汎関数積分表示も存在する．無限次元 OU 過程 $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の詳しい構成法などは [LHB11, Section 5.6] にある．

3.5 赤外発散, 紫外発散, 基底状態の存在・非存在

量子論では電子は点と考えられるので, 電荷の分布を表す $\varphi(x)$ は $\varphi(x) = \delta(x)$ とみなされる．これは $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk = \infty (\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2})$ を意味する．これを紫外発散という．数学的に厳密に H を定義するためには $\hat{\varphi}$ に $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk < \infty$ なる条件を取りあえず課す必要がある．その結果 H_{I} が $\mathscr{F}$ 上の作用素として意味をもつ．

もう一つの発散が赤外発散である． $\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2}$ $(|k| < \varepsilon)$ としよう． この場合 $\int_{|k|<\varepsilon} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk = \infty$ $(d \le 3)$ となる． これを赤外発散という． 物理的な理解では H の基底状態 Ψ_{g} のボゾン数の期待値は有限, $(\Psi_{\mathrm{g}}, N\Psi_{\mathrm{g}}) < \infty$, で

$$(\Psi_{\mathrm{g}}, N\Psi_{\mathrm{g}}) \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk$$

のように予想され, $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk = \infty$ のときは H の 基底状態が存在しないと期待されている．

定義 3.4 (**赤外正則条件と赤外特異条件**)
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3}dk<\infty$ を赤外正則条件といい, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3}dk=\infty$ を赤外特異条件という.

記号

$$I_{\mathrm{IR}}=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3}dk$$

を導入する.

(1) $\omega(k)=|k|$, $\hat{\varphi}(k)=\mathbb{1}_{\{\kappa<|k|<\Lambda\}}$, $d=3$ とする. κ と Λ は夫々赤外切断パラメター, 紫外切断パラメターといわれる. $\kappa=0$ のとき赤外特異条件をみたし, $\kappa>0$ のとき赤外正則条件をみたす.

(2) $\omega(k)=\sqrt{|k|^2+\nu^2}$, $\hat{\varphi}(k)=g\mathbb{1}_{\{|k|<\Lambda\}}$ のときは赤外正則条件をみたす.

(1) は massless 模型, (2) は massive 模型とよばれる.

3.6 埋蔵固有値の摂動問題

g を結合定数として, $H_g=H_0+gH_{\mathrm{I}}$ とおこう. Nelson 模型を例に埋蔵固有値について説明する. $V(x)=-1/|x|$ としよう. このとき, $\sigma(H_{\mathrm{p}})=\{E_j\}_{j=0}^\infty\cup[0,\infty)$, $E_0\le E_1\le\cdots<0$, となる. $\sigma(H_{\mathrm{f}})=\{0\}\cup[\nu,\infty)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{f}})=\{0\}$ であるから, 非結合 Hamiltonian $H_{\mathrm{p}}+H_{\mathrm{f}}$ のスペクトルは $\sigma(H_{\mathrm{p}}+H_{\mathrm{f}})=[E_0+\nu,\infty)\cup\{E_j\}_{j=0}^\infty$ となる. $0<\nu$ が十分小さければ図 1のように点スペクトル $\{E_j\}_{j=0}^\infty$ の一部は連続スペクトルに埋め込まれ, 埋蔵固有値になる. $\nu>0$ とすれば E_0 は多重度 1 の離散固有値である. E_0 の摂動について考えよう.

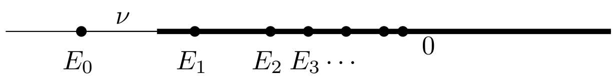

図 1: H_g $(\nu>0)$

定義 3.5 (**解析族**)R を $\mathbb{C}$ の開集合とする. $\{H_g, g\in R\}$ は閉作用素の族 (自己共役作用素とは限らない) で $\rho(H_g)\neq\emptyset$ とする. 次の (1), (2) をみたすとき $\{H_g, g\in R\}$ を A 型の解析族という. (1) ある稠密な $\mathcal{D}$ が存在して $D(H_g)=\mathcal{D}$, $g\in R$, をみたす. (2) H_gu, $u\in\mathcal{D}$, が g について強解析的である.

命題 3.3 H_g を $g=0$ の近傍で A 型の解析族とする. E を 多重度 m の H_0 の離散固有値とする. このとき H_g の離散固有値 $E^{(1)}(g),...,E^{(r)}(g)$ で次をみたすものが存在する. (1) $E=E^{(k)}(0)$, $k=1,...,r$. (2) $E^{(1)}(g),...,E^{(r)}(g)$ の多重度の和は m. (3) 各 $E^{(r)}(g)$ に対してある $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在して $E^{(r)}(g)$ は $g^{1/p}$ の解析関数. (4) H_g が $g\in\mathbb{R}$ で自己共役作用素ならば $E^{(r)}(g)$ は g の解析関数.

$\nu > 0$ のとき, 命題 3.3 より $|g| \ll 1$ で $E_0(g)$ は離散固有値であり g について解析的であることがわかる. 特に $E_0(g)$ は H の基底状態である. しかし $\nu = 0$ のときは様相が一変する. このときは図 2 のように E_0 が埋蔵固有値になる. そのため $|g| \ll 1$ でも $E_0(g)$ が固有値として存在するのかどうかすぐにはわからない. また g に関する微分可能性も一般にはよくわからない. これが埋蔵固有値の摂動問題である. 詳しい解説が [Hir05b] にある.

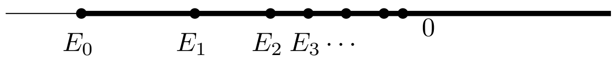

図 2: H_g $(\nu = 0)$

3.7 ペアポテンシャル

H の固有ベクトルを解析するために, Feynman−Kac 型汎関数積分表示を使う. H が至る所正な基底状態 Ψ_{g} を一意的にもつと仮定する. このとき $\|e^{-T(H-E)}F\|^{-1}e^{-T(H-E)}F \to \Psi_{\mathrm{g}}(T \to \infty)$. ここで $F \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ は $F > 0$ なるベクトル. よって Ψ_{g} の性質を調べる処方箋の一つが $\|e^{-T(H-E)}F\|^{-1}e^{-T(H-E)}F$ の解析である.

系 3.4 ($(P(\phi)_1$ **過程による**) $f, g \in L^2(\mathsf{N}_0)$ とする. このとき $T > 0$ に対して

$$\left(f \otimes 1\!\!1, e^{-TL} g \otimes 1\!\!1\right)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\overline{f(X_0)} g(X_T) e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)}\right].$$

ここで

$$W(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk.$$

証明: $I_T = \int_0^T \delta_s \otimes \tilde{\varphi}(\cdot - X_s) ds$ とおく. このとき

$$\left(f \otimes 1\!\!1, e^{-TL} g \otimes 1\!\!1\right)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\overline{f(X_0)} g(X_t) \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[e^{-I_T}\right]\right].$$

$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[I_T^2] = \int_0^T ds \int_0^T dt W(X_t - X_s, t-s)$ なので

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[e^{-I_T}\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)\right).$$

よって, Fubini の定理から系が従う. □

定義 3.6 (**ペアポテンシャル**)$W(x,t)$ は Nelson 模型に付随するペアポテンシャルといわれる.

系 3.5 (**ブラウン運動による**) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $T > 0$ に対して

$$\left(f \otimes 1\!\!1, e^{-TL} g \otimes 1\!\!1\right)_{\mathscr{H}_{\mathrm{N}}} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x\left[e^{-\int_0^T V(B_s) ds} \overline{f(B_0)} g(B_T) e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(B_s - B_t, s-t)}\right].$$

証明: 証明は系 3.4 と全く同じである. □

4 赤外正則条件と基底状態の存在

4.1 存在

この章では H の基底状態の存在を $P(\phi)_1$ 過程によるFeynman−Kac 型汎関数積分表示を応用して示す．基底状態が存在すればその一意性はすぐに分かる．

系 4.1 (**一意性**) H が基底状態をもつと仮定する．このとき基底状態は一意的である．

証明: $F \geq 0$, $G \geq 0$ に対してFeynman−Kac 型汎関数積分表示と I_t の正値保存性から $(F, e^{-tL}G) > 0$ が正値改良型作用素であることが分かる． よって Perron-Frobenius 定理から題意が従う． □

Σ_{p} を H_{p} の本質的スペクトルの下限とする．

定理 4.2 (**基底状態の存在**) 赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}} < \infty$ を仮定し，

$$\Sigma_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p}} > \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} \frac{|k|^2}{2\omega(k) + |k|^2} dk \tag{4.1}$$

とする．このとき H の基底状態が存在する．

この定理の証明の最大のポイントはパスに一様な評価

$$\int_{-\infty}^0 ds \int_0^\infty |W(X_s - X_t, s-t)| dt \leq \frac{1}{2} I_{\mathrm{IR}} < \infty \tag{4.2}$$

が成立することである．

補題 4.3 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は連続で $f(x) > 0$($x \in \mathbb{R}^d$) としよう．このとき

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\left(f \otimes \mathbb{1}, e^{-(T+t)H} f \otimes \mathbb{1}\right)}{\left(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} f \otimes \mathbb{1}\right)} = e^{-tE}.$$

証明: もし Q が $\mathbb{R}$ 上の測度で $\inf \mathrm{supp}(Q) = E(Q)$ ならば,

$$E(Q) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \left(\int e^{-Tx} Q(dx) \right),$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int e^{-(T+t)x} Q(dx)}{\int e^{-Tx} Q(dx)} = e^{-tE(Q)}$$

が成り立つ．H の $f \otimes \mathbb{1}$ に関するスペクトル測度を $\mu_{f\otimes\mathbb{1}}$ とする．スペクトル測度 $\mu_{f\otimes\mathbb{1}}$ に応用すると $\inf \mathrm{supp}(\mu_{f\otimes\mathbb{1}}) = E(\mu_{f\otimes\mathbb{1}}) = E$ を示せばいい．

$$\mathscr{G} = \left\{ F \in \mathscr{H}_{\mathrm{N}} \,\middle|\, \mathrm{supp} F \subset \bigcup_{N,M>0} B_N(\mathbb{R}^d) \times B_M(\mathscr{Q}) \right\}$$

とする．ここで $B_N(\mathbb{R}^d)$ と $B_M(\mathscr{Q})$ は $\mathbb{R}^d$ と $\mathscr{Q}$ の原点を中心にした半径 N と M のボールを表す．$\mathscr{G}$ は $\mathscr{H}_{\mathrm{N}}$ で稠密．$g \in \mathscr{G}$ とする．e^{-tH} は正値保存作用素なので $\left(g, e^{-TH}g\right) \le \left(|g|, e^{-TH}|g|\right) \le C^2 \left(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} f \otimes \mathbb{1}\right)$. ここで $C = \frac{\text{ess sup}_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{Q}} |g(x,\xi)|}{\text{ess inf}_{(x,\xi)\in \text{supp}|g|} f(x)}$. これから $E(\mu_{f\otimes\mathbb{1}}) \le E(\mu_g)$ が全ての $g \in \mathscr{G}$ でわかる．$\mathscr{G}$ は $D(H)$ の稠密な部分空間なので $E(\mu_{f\otimes\mathbb{1}}) \ge E = \inf\{E(\mu_g)|g \in \mathscr{G}\} \ge E(\mu_{f\otimes\mathbb{1}})$. よって $E = E(\mu_{f\otimes\mathbb{1}})$. □

Ψ_{p} を H_{p} の正規化された正の基底状態として

$$\Psi_{\mathrm{g}}^T = \frac{e^{-TH}(\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1})}{\|e^{-TH}(\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1})\|}$$

とする．$\|\Psi_{\mathrm{g}}^T\| = 1$ なので, Ψ_{g}^T は部分列 $\Psi_{\mathrm{g}}^{T'}$ で $\Psi_{\mathrm{g}}^{T'}$ があるベクトル Ψ_{g}^∞ に弱収束するものが存在する．T' を改めて T と書くことにする．心の中では Ψ_{g}^T が基底状態の近似列だと思っている．

$$\gamma(T) = (\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}, \Psi_{\mathrm{g}}^T)^2 = \frac{(\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}, e^{-TH}\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1})^2}{(\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH}\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1})},$$

とおく．次の命題は基底状態の存在・非存在を示すときに有用なものである．

命題 4.4 $\lim_{T\to\infty} \gamma(T) = a$ とする．$a > 0$ ならば H の基底状態は存在し, $a = 0$ なら基底状態は存在しない.

証明: $\inf \sigma(H) = 0$ と仮定する．背理法で証明する．

はじめに基底状態 Ψ_{g} が存在すると仮定する．そうすると強収束の意味で $\lim_{T\to\infty} e^{-TH} = \mathbb{1}_{\{0\}}(H)$ となる．Ψ_{g} は正なので, $a = (\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}, \Psi_{\mathrm{g}}) > 0$ となるから, もし $a = 0$ ならば H の基底状態は存在しないことになる．

次に H の基底状態が存在せずかつ $a > 0$ と仮定する．このときある $b < a$ で $\gamma(T) > b$[21] が十分大きな $T(T = \infty$ も含む$)$ で成り立つ．$(\Psi_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}, e^{-TH}\Psi_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}) > b^{1/2}(\Psi_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}, e^{-2TH}\Psi_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1})^{1/2}$ $(T \to \infty)$ とすれば $\|\mathbb{1}_{\{0\}}(H)(\Psi_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1})\| \ge b^{1/2}$. これは基底状態の非存在に矛盾する．よって $a = 0$. □

系 4.5 $\Psi_{\mathrm{g}}^\infty \neq 0$ は H が基底状態をもつための必要十分条件である．

証明: Ψ_{g}^T は非負なので, 弱収束の極限 Ψ_{g}^∞ も非負．その結果, もし $\Psi_{\mathrm{g}}^\infty \not\equiv 0$ ならば $\lim_{T\to\infty} \gamma(T) = (\mathbb{1}, \Psi_{\mathrm{g}}^\infty)^2 > 0$. よって 命題 4.4から系が従う． □

定理 *4.2* の証明: $\Psi_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}$ を簡単に Ψ_{p} とかこう．系 4.5 から Ψ_{g}^T の弱極限が非ゼロであることをいえばいい．$S_{[a,b]} = \frac{1}{2}\int_a^b ds \int_a^b W(X_s - X_t, s-t)dt$ とする．$f(T,t) = \left(\Psi_{\mathrm{g}}^T, (e^{-tH_{\mathrm{p}}} \otimes P_0)\Psi_{\mathrm{g}}^T\right)$ とおく．ここで P_0 は $\mathbb{1} \in L^2(\mathscr{Q})$ への射影である．次が成立することを示す:

$$\liminf_{T\to\infty} f(T,t) \ge \exp\left(-t\left(E + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk\right) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk\right). \tag{4.3}$$

[21] 等号がつかないことに注意

これを示すために次のように書き換える:

$$f(T,t)=\frac{(\Psi_{\rm p},e^{-TH}(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)e^{-TH}\Psi_{\rm p})}{(\Psi_{\rm p},e^{-(2T+t)H}\Psi_{\rm p})}\,\frac{(\Psi_{\rm p},e^{-(2T+t)H}\Psi_{\rm p})}{(\Psi_{\rm p},e^{-2TH}\Psi_{\rm p})}.$$

第 2 項の比は e^{-Et} に収束する (補題 4.3). 第 1 項の比を $g(T,t)$ とおく. これを $P(\phi)_1$ 過程で汎関数積分表示する. 分母は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}$. ここで $(X_t)_{t\geq 0}$ のシフト不変性をつかった. 分子は $h_T(x)=\left(\mathbb{1},e^{-TH}\Psi_{\rm p}\right)_{L^2(\mathscr{Q})}(x)$ とすれば

$$(\Psi_{\rm p},e^{-TH}(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)e^{-TH}\Psi_{\rm p})=(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

に注意する. また

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}h_T(x)f(x)\Psi_{\rm p}(x)dx=(f\Psi_{\rm p},e^{-TH}\Psi_{\rm p})\\
&=\mathbb{E}_{\mathcal{P}_0}\left[f(X_0)e^{-\int_0^T\tilde{\varphi}_s(\cdot-X_s)ds}\right]e^{-TE_{\rm p}}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[f(X_0)\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[e^{-\int_0^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-X_s)ds}\right]\right]e^{-TE_{\rm p}}\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]e^{-TE_{\rm p}}\Psi_{\rm p}(x)^2dx.
\end{aligned}$$

これから $h_T(x)=\Psi_{\rm p}(x)F(x)e^{-TE_{\rm p}}$. ここで $F(x)=\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]$. よって

$$\begin{aligned}
(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)}&=(F,e^{-tL_{\rm p}}F)_{L^2(\mathsf{N}_0)}e^{-(2T+t)E_{\rm p}}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[F(X_0)F(X_t)]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\mathbb{E}^{X_t}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d\mathsf{N}_0.
\end{aligned}$$

鏡映対称性により

$$(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]}\right]\mathbb{E}^{X_t}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d\mathsf{N}_0$$

またマルコフ性により

$$(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]}\right]\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[t,T+t]}\middle|\,\sigma(X_t)\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d\mathsf{N}_0.$$

さらに X_{-t}, $t\geq 0$, と X_s, $s\geq 0$, の独立性から

$$\begin{aligned}
(h_T,e^{-tH_{\rm p}}h_T)&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\middle|\,\sigma(X_t)\right]\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d\mathsf{N}_0\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}d\mathsf{N}_0\\
&=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]e^{-(2T+t)E_{\rm p}}.
\end{aligned}$$

最後に

$$g(T,t)=\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]}=\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S_\Delta+S[-T,T+t]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T+t]}\right]}.$$

ここで $S_\Delta=S[-T,0]+S[t,T+t]-S[-T,T+t]$. パスに関する一様評価から

$$\begin{aligned}|S_\Delta| &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)}dk\left(2\int_{-\infty}^0\int_0^\infty+2\int_0^t\int_t^\infty+\int_0^t\int_0^t\right)e^{-\omega(k)|t-s|}dsdt\\ &\le t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk\end{aligned}$$

なので, $g(T,t)$ の分母と分子を比べて

$$g(T,t)\ge\exp\left(-t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk\right).$$

これで (4.3) が示せて, $\liminf_{T\to\infty}\|e^{-tH_{\rm p}/2}\otimes P_0\Psi_{\rm g}^T\|$ が非ゼロであることがわかった. あともう一息. $\Psi_{\rm g}^T$ がゼロに収束しないことをいうために $e^{-tH_{\rm p}/2}\otimes P_0$ をコンパクト作用素におきかえればいい. $\mathbb{1}_{[a,b]}(H_{\rm p})$ は $H_{\rm p}$ のスペクトル射影. $\Sigma_{\rm p}$ の定義から $H_{\rm p}$ は $\Sigma_{\rm p}-\delta$ 以下では離散固有値しか持たないので $\mathbb{1}_{[E_{\rm p},\Sigma_{\rm p}-\delta]}(H_{\rm p})\otimes P_0$ は有限ランク作用素になる. よって

$$(\mathbb{1}_{[E_{\rm p},\Sigma_{\rm p}-\delta]}(H_{\rm p})\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^T\to(\mathbb{1}_{[E_{\rm p},\Sigma_{\rm p}-\delta]}(H_{\rm p})\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^\infty$$

が強収束する. 一方 $e^{-tH_{\rm p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_{\rm p}-\delta,\infty)}(H_{\rm p})$ のノルムは有界で $e^{-tH_{\rm p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_{\rm p}-\delta,\infty)}\le e^{-t(\Sigma_{\rm p}-\delta)}$. その結果

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_{\rm g}^\infty,(e^{-tH_{\rm p}}\mathbb{1}_{[E_{\rm p},\Sigma_{\rm p}-\delta]}(H_{\rm p})\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^\infty\right)\\ &\quad=\lim_{T\to\infty}\left\{\left(\Psi_{\rm g}^T,(e^{-tH_{\rm p}}\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^T\right)-\left(\Psi_{\rm g}^T,(e^{-tH_{\rm p}}\mathbb{1}_{(\Sigma_{\rm p}-\delta,\infty)}(H_{\rm p})\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^T\right)\right\}\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}\left(\Psi_{\rm g}^\infty,(e^{-tH_{\rm p}}\mathbb{1}_{[E_{\rm p},\Sigma_{\rm p}-\delta]}(H_{\rm p})\otimes P_0)\Psi_{\rm g}^\infty\right)&\ge e^{-t(E+C)-C(t)}-e^{-t(\Sigma_{\rm p}-\delta)}\\ &=e^{-t(E+C)}\left(e^{-C(t)}-e^{-t(\Sigma_{\rm p}-\delta-E-C)}\right).\end{aligned}$$

ここで $C=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk$, $C(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3}dk$. δ を十分小さくして t を十分大きくすれば,

$$E<\Sigma_{\rm p}-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2}dk \tag{4.4}$$

のとき $\Psi_{\rm g}^\infty$ が非ゼロであることがわかる. 最後に (4.4) を $E_{\rm p}$ を含む形に変える. これは不等式

$$E\le E_{\rm p}-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)(\omega(k)+|k|^2/2)}dk \tag{4.5}$$

から得られる. この不等式は補題 4.6 で示す. (4.5) と (4.4) から証明が完了する. □

補題 4.6 *(4.4) が成り立つ.*

証明: $P_{\mathrm{f}} = d\Gamma(k)$ は $\mathscr{F}$ の運動量作用素で $\psi_f = e^{ix\otimes P_{\mathrm{f}}}\Psi_{\mathrm{p}}(x)\otimes e^{-i\Pi(f)}\Omega_{\mathrm{b}}$ と定義する. ここで $\Pi(f) = i(a^*(f) - a(\bar{f}))$, そして f はあとで決める. 直接計算して

$$\begin{aligned} E \le (\psi_f, H\psi_f) = E_{\mathrm{p}} + \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} k|f(k)|^2 dk\right)^2 \\ + \int_{\mathbb{R}^d}\left\{\left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2\right)|f(k)|^2 + \frac{\hat{\varphi}(k)(\overline{f(k)} + f(k))}{\sqrt{2\omega(k)}}\right\} dk. \end{aligned} \tag{4.6}$$

f を $f(-k) = f(k)$ を満たすとしよう. (4.6) の第 2 項は $\left(\int k|f(k)|^2 dk\right)^2 = 0$, そして最後の項は $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2\right)\left(|f(k) + \Phi(k)|^2 - \Phi^2(k)\right) dk$. ここで $\Phi(k) = -\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)(\omega(k)+|k|^2/2)}}$. $f(k) = \Phi(k)$ とおけば (4.4) をえる. □

系 4.7 $\omega(k) = |k|$ とし, $\hat{\varphi}(k) = g\mathbb{1}_{\{\kappa<|k|<\Lambda\}}$ で $g \in \mathbb{R}$ と仮定する. さらに赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}} < \infty$ を仮定し $\sigma(H_{\mathrm{p}})$ は離散固有値だけからなるとする. このとき任意の $0 < \kappa < \Lambda$ と $g \in \mathbb{R}$ に対して, H は一意的な基底状態をもつ.

証明: $\Sigma_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p}} = \infty$ なので定理 4.2から系が従う. □

4.2 参考文献など

基底状態の存在問題は現在では非常に多くのことが知られている. ここで全てを網羅することは不可能なので, 一部を紹介するにとどめる. このような量子系で, 初めて厳密に基底状態の存在を示したのは Arai-Hirokawa [AH97], Bach-Fröhlich-Sigal [BFS98] である. そのアイデアは Glimm-Jaffe [GJ68] の格子近似に源流があると思われる. その後 Bach-Fröhlich-Sigal [BFS98] は Pauli-Fierz 模型の基底状態の存在を赤外正則条件を仮定せずに示した. この章で紹介した汎関数積分をもちいる方法は Spohn [Spo98] による. 注意すると, この証明では結合定数に一切依らずに基底状態の存在が示されている. この別証明が Gérard [Ger00] で与えられている. いずれの結果も H_{p} が純粋に固有値のみからなるスペクトルを持つことが必要である. Griesemer-Lieb-Loss [GLL01] はもっと広いクラスのポテンシャルに対して基底状態が存在することを Pauli-Fierz 模型で示した. この技法を Sasaki [Sas05] が Nelson 模型に応用して, 必ずしも離散固有値のみからなるとは限らないスペクトルを持った H_{p} を運動項として含む Nelson Hamiltonian に対しても基底状態の存在を示した. また, $I_{\mathrm{IR}} = \infty$ となる場合でも非フォック表現といわれるもので Nelson Hamiltonian を定義すればその Hamiltonian が基底状態を持つことを Arai [Ara01] が示した. また, massless 模型であっても, Nelson 模型を static Lorentz 多様体上に定義すれば, 適当な幾何学的な要素から, 基底状態の存在が示せる.

これは Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS11] による．さらに H_{p} が基底状態を持たないときでも H の基底状態の存在問題を考えることが出来る．この場合, 非結合 Hamiltonian $H_0 = H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$ はもちろん基底状態をもたない．ところが, $H_g = H_0+gH_{\mathrm{I}}$ で粒子の個数が 2 個以上あれば, 十分大きな g で H_g の基底状態の存在が示せる．これは Hiroshima-Sasaki [HS08, HS12] による．最後に Nelson Hamiltonian H は適当にくりこんで紫外切断 $\hat{\varphi}\to\mathbb{1}$ の極限で定義される自己共役作用素 H_∞ の存在を示すことが出来る．この事実は [Nel64a] による．また第 8 章で汎関数積分表示による証明を与える．Hirokawa-Hiroshima-Spohn [HHS05] はこの H_∞ にも基底状態が存在することを示した．さらに [HHS05] では赤外正則条件も仮定していない.

5 マルチンゲール性と固有ベクトルの空間減衰性

5.1 マルチンゲール性

Schrödinger 作用素 $H_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{2}\Delta + V$ の固有値問題を考える．$H_{\mathrm{p}}\Phi = E_{\mathrm{p}}\Phi$ としよう．このとき $x\in\mathbb{R}^d$ を固定した確率過程 $X_t(x) = e^{tE}e^{-\int_0^t V(B_r+x)dr}\Phi(B_t+x)$, $t\geq 0$, を定義することができる．$\mathcal{F}_t$ をブラウン運動 $(B_t)_{t\geq0}$ の自然なフィルトレーションとする．このとき $X_t(x)$ は $\mathcal{F}_t$ に関してマルチンゲールになる．つまり $\mathbb{E}_W[X_t(x)|\mathcal{F}_s] = X_s(x)$ が $s\leq t$ のときに成り立つ．実際 $(B_t)_{t\geq0}$ のマルコフ性から

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W[X_t(x)|\mathcal{F}_s] = e^{tE}e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr}\mathbb{E}_W[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr}\Phi(B_t+x)|\mathcal{F}_s]\\
&= e^{tE}e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr}\mathbb{E}_W^{B_s}[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}\Phi(B_{t-s}+x)]\\
&= e^{sE}e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr}\Phi(B_s+x) = X_s(x)
\end{aligned}
$$

となる．Nelson Hamiltonian H についても同様な性質を示すことができる．$H\Phi = E\Phi$ としよう[22].

$$X_t(x) = e^{tE}e^{-\int_0^t V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t \tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_r)dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_t+x)$$

とする．$(X_t(x))_{t\geq0}$ は $(\Omega\times\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}, \mathcal{F}\times\Sigma_{\mathrm{E}}, W\times\mu_{\mathrm{E}})$ 上の確率過程である．任意の t に対して Feynman−Kac 型汎関数積分表示から

$$(\Psi,\Phi) = (\Psi, e^{-t(H-E)}\Phi) = \int dx\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[\bar{\Psi}(x)\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0^*X_t(x)]]$$

となる．つまり $\Phi(x) = \mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0^*X_t(x)]$ が成り立つ．$\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}\times\Sigma_{(-\infty,t]}$, $t\geq0$, と定義する.

定理 5.1 $(X_t(x))_{t\geq0}$ は $(\mathcal{M}_t)_{t\geq0}$ に関してマルチンゲールである.

[22] ここで記号 E は H の固有値であり, スペクトルの下限とは限らない．混乱がない限り固有値も E で表す.

証明: $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W\left[X_t(x)|\mathcal{M}_s\right]$ を評価する.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W\left[X_t(x)|\mathcal{M}_s\right]&=e^{tE}e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^s\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_r)dr)}\\&\times\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W\left[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_r)dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_t+x)|\mathcal{M}_s\right]\end{aligned}$$

右辺の条件付き期待値を計算する. $(B_t)_{t\geq 0}$ のマルコフ性から

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W\left[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_r)dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_t+x)|\mathcal{M}_s\right]\\=&\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_{r-s})dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_{t-s}+x)|\Sigma_{(-\infty,s]}\right]\right]\end{aligned}$$

また Euclid 場のマルコフ性から

$$=\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_{r-s})dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_{t-s}+x)|\Sigma_s\right]\right]$$

となる. これは射影だったから

$$=E_s\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_{r-s})dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_{t-s}+x)\right]$$

となる. この射影は $E_s=\mathrm{I}_s\mathrm{I}_0^*U_{-s}$ と分解できるから

$$\begin{aligned}&=\mathrm{I}_s\mathrm{I}_0^*U_{-s}\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_{r-s})dr)}\mathrm{I}_t\Phi(B_{t-s}+x)\right]\\&=\mathrm{I}_s\mathrm{I}_0^*\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_s^t\delta_{r-s}\otimes\tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)}\mathrm{I}_{t-s}\Phi(B_{t-s}+x)\right]\\&=\mathrm{I}_s\mathrm{I}_0^*\mathbb{E}_W^{B_s}\left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^{t-s}\delta_r\otimes\tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)}\mathrm{I}_{t-s}\Phi(B_{t-s}+x)\right].\end{aligned}$$

よって

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W\left[X_t(x)|\mathcal{M}_s\right]=e^{sE}e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr}e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^s\tilde{\varphi}_s(\cdot-x-B_r)dr)}e^{-(t-s)(H-E)}\Phi(B_s+x)=X_s(x)$$

となりマルチンゲール性が示せた. □

5.2 固有ベクトルの空間減衰性

τ を $\mathcal{M}_t$ に関する停止時刻とする. このとき $X_{t\wedge\tau}(x)$ もマルチンゲールになり, 特に $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[X_t(x)]=\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[X_{t\wedge\tau}(x)]$ となる.

補題 5.2 $H\Phi=E\Phi$ とし赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}}<\infty$ を仮定する. このとき $\|\Phi(\cdot)\|_{L^2(\mathscr{Q})}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

証明: $\Phi(x)=\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0^* X_t(x)]$ が任意の $t>0$ で成り立つ．また $\mathrm{I}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s)ds}\mathrm{I}_t$ は有界作用素で $\|\mathrm{I}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s)ds}\mathrm{I}_t\| \le e^{\frac{1}{4}I_{\mathrm{IR}}}$ なので

$$\|\Phi(x)\| \le e^{tE}\left(\mathbb{E}_W^x[e^{-2\int_0^t V(B_r)dr}]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}_W^x[\|\Phi(B_t)\|^2]\right)^{1/2} e^{\frac{1}{4}I_{\mathrm{IR}}}.$$

V が Kato 分解可能なので $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{-2\int_0^t V(B_r)dr}]<\infty$．また $\mathbb{E}_W^x[\|\Phi(B_t)\|^2]\le C\|\Phi\|$ なので補題が示せた． □

定理 5.3 (**固有ベクトルの空間減衰性**)$H\Phi=E\Phi$ とし赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}}<\infty$ を仮定する．*(1)* $\lim_{|x|\to\infty}V(x)=\infty$ または *(2)* $\lim_{|x|\to\infty}V_-(x)+E=a<0$ を仮定する．このとき

$$\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})}\le Ce^{\frac{1}{4}I_{\mathrm{IR}}}e^{-c|x|}$$

となる定数 C, c が存在する．

証明: (1) の場合．$\tau_R=\inf\{t||B_t|>R\}$ とする．また $W_R(x)=\inf\{V(y)||x-y|<R\}$ とすれば, $W_R(x)-E\to\infty(|x|\to\infty)$．$\Psi\in L^2(Q)$ とすれば $\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_t(x)$ もマルチンゲールになる．実際 $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_t(x)|\mathcal{M}_s]=\mathrm{I}_0\Psi\cdot\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[X_t(x)|\mathcal{M}_s]=\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_s(x)$．このとき $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_t(x)]=\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_{t\wedge\tau_R}(x)]$ が成り立つ．$\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})}=\|\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0^*X_t(x)]\|=\sup_{\Psi\in L^2(\mathscr{Q}),\|\Psi\|=1}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}_W[\mathrm{I}_0\Psi\cdot X_t(x)]$ なので

$$\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})}\le e^{(1/4)I_{\mathrm{IR}}}\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^{t\wedge\tau_R}(V(B_r)-E)dr}]$$

となる．よって $\mathbb{E}_W^x[e^{\int_0^{t\wedge\tau_R}(V(B_r)+E)dr}]$ を評価すればいい．

$$\mathbb{E}_W^x[e^{\int_0^{t\wedge\tau_R}(V(B_r)+E)dr}]\le\mathbb{E}_W[e^{-(t\wedge\tau_R)(W_R(x)-E)}]=\mathbb{E}_W[\mathbb{1}_{\{\tau_R<t\}}\cdots]+\mathbb{E}_W[\mathbb{1}_{\{\tau_R\ge t\}}\cdots]$$

と分ける．$\mathbb{E}_W[\mathbb{1}_{\{\tau_R\ge t\}}\cdots].\le e^{-t(W_R(x)-E)}$ かつ $\mathbb{E}_W[\mathbb{1}_{\{\tau_R<t\}}\cdots]\le c_1e^{-c_2R^2/t}$ が知られている．$R=p|x|$ $(0<p<1)$, $t=\delta|x|$ で δ は十分小さいとすれば, $W_{p|x|}(x)-E\to\infty(|x|\to\infty)$ なので指数減衰性が従う．

(2) の場合．$\tau_R(x)=\inf\{t\ge0||B_t+x|\le R\}$ とする．同様に $\mathbb{E}_W^x[e^{\int_0^{t\wedge\tau_R}(V_-(B_r)+E)dr}]$ を評価すればいい．R を十分大きくとれば, 仮定から $|x|>R$ のとき $V_-(x)+E<-\epsilon<0$ となる．よって $\mathbb{E}_W[e^{\int_0^{t\wedge\tau_R(x)}(V_-(B_r+x)+E)dr}]\le e^{-t\varepsilon}+\mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_{t\ge\tau_R(0)}]$．(1) と同様に $t=|x|$, $R=|x|$ とおけば指数減衰性が従う． □

Nelson Hamiltonian の空間変数に関する指数的減衰性 $\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})}\le Ce^{\frac{1}{4}I_{\mathrm{IR}}}e^{-c|x|}$ の評価に I_{IR} が現れるのが Nelson Hamiltonian の大きな特徴である．あとで示すように, $I_{\mathrm{IR}}<\infty$ は基底状態が存在するための必要十分条件である．また, 空間減衰性を求めるためには Carmona 評価 [Car78] を場の量子論の模型に直接応用する方法がある．例えば Hidaka-Hiroshima [HH10]. ただし, Carmona 評価はブラウン運動の性質を使うので, 一般的な確率過程 (パスが連続でないような確率過程) の場合には使いずらい．ここで紹介したマルチンゲール性と停止時刻を使う方法は少し応用範囲が広く, 相対論的 Schrödinger 作用素の固有ベクトルの空間減衰性を調べるために Carmona-Master-Simon [CMS90] が導入した．

6 ギブス測度

この章では赤外正則条件 $I_{\rm IR} < \infty$ を仮定し, H の基底状態 $\Psi_{\rm g}$ が存在しているする, i.e., $H\Psi_{\rm g} = E\Psi_{\rm g}$.

6.1 ギブス測度の定義

$(\mathcal{Y}, \mathscr{B}, Q)$ を確率測度空間とし $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は 確率過程とする. $\mathscr{B}_T = \sigma(Y_r, -T \le r \le T)$, $\mathscr{T}_T = \sigma(Y_r, r \in [-T,T]^c)$ としよう. $\mathscr{V} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathscr{W} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はボレル可測関数で外場ポテンシャルとペアポテンシャルとよばれている. $\mathscr{V}$ が任意の有界区間 I に対して $0 < \mathbb{E}_Q[e^{-\int_I \mathscr{V}(Y_s)ds}] < \infty$ のとき admissible 外場ポテンシャルといわれる. さらに $\mathscr{W}$ は $\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} |\mathscr{W}(x,y,s)|ds < \infty$ のとき admissible ペアポテンシャルといわれる. Admissible ポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$, $0 < S \le T$ に対して関数

$$\mathscr{E}_T = \int_{-T}^{T} \mathscr{V}(Y_t)dt + \left(\int_{\mathbb{R}} ds \int_{-T}^{T} dt + \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}} dt\right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|), \tag{6.1}$$

$$\mathscr{E}_{S,T} = \int_{-T}^{T} \mathscr{V}(Y_t)dt + \left(\int_{-S}^{S} ds \int_{-T}^{T} dt + \int_{-T}^{T} ds \int_{-S}^{S} dt\right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|) \tag{6.2}$$

を定義し, さらに $Y \in \mathcal{Y}$ に対して $(\mathcal{Y}, \mathscr{B})$ 上の測度 Q_T^Y を $\mathbb{E}_{Q_T^Y}[fg] = \mathbb{E}_Q[f|\mathscr{T}_T](Y)g(Y)$ で定める. ここで f は有界 $\mathscr{B}_T$-可測関数, g は有界 $\mathscr{T}_T$-可測間数である. つまり $Q_T^Y[A] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A|\mathscr{T}_T](Y)$.

定義 6.1 (**ギブス測度**)$\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ は admissible ポテンシャルとする.

(1) $(\mathcal{Y}, \mathscr{B})$ 上の確率測度 P_T は次を満たすとき, 区間 $[-T,T]$ に対する, reference 測度 Q とポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をもつ有限体積ギブス測度といわれる.

  (i) $P_T\lceil_{\mathscr{B}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{B}_T}$

  (ii) 有界 $\mathscr{B}$-可測関数 f に対して $\mathbb{E}_{P_T}[f|\mathscr{T}_S](Y) = \dfrac{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[fe^{-\mathscr{E}_{S,T}}]}{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[e^{-\mathscr{E}_{S,T}}]}$, P_T-a.s.

(2) $(\mathcal{Y}, \mathscr{F})$ 上の確率測度 P は次を満たすとき, reference 測度 Q とポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をもつギブス測度といわれる.

  (i) $P\lceil_{\mathscr{B}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{B}_T}$ $(\forall T > 0)$

  (ii) 有界 $\mathscr{F}$-可測関数 f に対して $\mathbb{E}_P[f|\mathscr{T}_T](Y) = \dfrac{\mathbb{E}_{Q_T^Y}[fe^{-\mathscr{E}_T}]}{\mathbb{E}_{Q_t^Y}[e^{-\mathscr{E}_T}]}$, P-a.s.

命題 6.1 $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ を *admissible* なポテンシャルとする.

(1) $T > 0$ に対して $dP_T = \frac{1}{\mathbb{E}_Q[e^{-\mathscr{E}_{T,T}}]} e^{-\mathscr{E}_{T,T}} dQ$ は有限体積ギブス測度になる.

(2) 確率測度 P_∞ で $P_T(A) \to P_\infty(A)$ *(* $T \to \infty$*)* が任意の $A \in \mathscr{B}_t$ で成り立ち[23], かつ $P_\infty\lceil_{\mathscr{B}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{B}_T}$ が全ての T で成立するとき P_∞ はギブス測度になる.

証明: (1) は [LHB11] の Proposition 4.1, (2) は [LHB11] の Proposition 4.2 を参照せよ. □

6.2 局所弱収束と Nelson 模型に付随したギブス測度の存在

正の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 関数 ϕ を一つ固定する. $Q_{[-t,t]} = \mathrm{I}_{-t}^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-t}^t \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s)ds)} \mathrm{I}_t e^{-\int_{-t}^t V(B_s)ds}$ とすれば $Q_{[-t,t]} : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q})$ は有界作用素になる. 実際 $\|Q_{[-t,t]}\| \le e^{\frac{1}{4}I_{\mathrm{IR}}} e^{-\int_{-t}^t V(B_s)ds}$ となる. $\mathscr{L}_T = \phi(B_{-T})Q_{[-t,t]}\phi(B_T)$ とおく. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $\mu_T : A \mapsto \mu_T(A) = \frac{1}{Z_T}\int dx \mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_A \mathscr{L}_T]$ の $T \to \infty$ の収束について考える.

$\mathcal{F}_{[-t,t]} = \sigma(B_s; s \in [-t,t])$ とする. このとき $\mathscr{G}_T = \bigcup_{0 \le t \le T} \mathcal{F}_{[-t,t]}$ と $\mathscr{G} = \mathscr{G}_\infty = \bigcup_{0 \le t} \mathcal{F}_{[-t,t]}$ は有限加法的集合族である. 確率空間の族 $(\Omega, \sigma(\mathscr{G}), \mu_T), T > 0,$ を定義する. μ_T が $(\Omega, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度 μ_∞ に局所弱収束することを示す.

定義 6.2 (**局所弱収束**[24]) t を固定する. 任意の $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して $\lim_{T \to \infty} \mu_T(A) = \mu_\infty(A)$ となるとき, 確率測度 μ_T は 確率測度 μ_∞ に局所弱収束するという.

証明の概略を述べる.

(1) 有限加法的集合関数 ρ_T を $(\Omega, \mathscr{G}_T), T > 0,$ の上に基底状態 Ψ_{g} を用いて定義する. それの $(\Omega, \sigma(\mathscr{G}_T))$ 上の確率測度 への拡張を $\bar{\rho}_T$ とする.

(2) 汎関数積分をもちいて $\bar{\rho}_T(A) = \rho_T(A) = \mu_T(A)$ を $A \in \mathscr{G}_t$ $(t \le T)$ に対して示す.

(3) 有限加法的集合関数 μ を基底状態 Ψ_{g} を使って $(\Omega, \mathscr{G})$ 上に定義し, $(\Omega, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度への拡張を μ_∞ とかく.

(4) Ψ_{g}^T が Ψ_{g} へ強収束するという事実から $\rho_T(A) \to \mu(A)$ $(T \to \infty)$ を $A \in \mathscr{G}$ に対して示す. これは $\mu_T(A) \to \mu(A)$ を意味する.

(5) $\mu(A) = \mu_\infty(A)$ $(A \in \mathscr{G})$ なので, μ_T は μ_∞ へ局所弱収束することがわかる.

---

[23] 局所弱収束という.
[24] Local weak convergence

μ_∞ の構成法から $\mu_\infty(A)$ $(A \in \mathscr{G})$ の厳密な形を知ることができる．(1)-(5) のステップを以下で実行する．加法的関数 $\mu : \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \cdot (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_t)) \right], \quad A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$$

で定義する．

補題 6.2 集合関数 μ は *well-defined, i.e.,* $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]} \subset \mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(A) &= e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_t)_{L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})} \right] \\ &= e^{2Es} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-s}), Q_{[-s,s]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_s)_{L^2(\mathscr{Q}_{\mathrm{E}})} \right].\end{aligned}$$

証明: $\mu_{(t)} = \mu \lceil_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ としよう．このとき $\mu_{(t)}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_{[-t,t]})$ 上の確率測度になる．$-s < -t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t < s$ とする．有限次元分布は

$$\begin{aligned}&\mu_{(t)}^{t_0,\ldots,t_n}(A_0 \times \cdots \times A_n) = \mu(B_{t_0} \in A_0, \cdots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_t)) \right] \\ &= (\Psi_{\mathrm{g}}, \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)(H-E)} \cdots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)} \mathbb{1}_{A_n} \Psi_{\mathrm{g}}).\end{aligned}$$

$e^{-(t_0+s)(H-E)} \Psi_{\mathrm{g}} = \Psi_{\mathrm{g}}$ だから

$$\begin{aligned}&= (\Psi_{\mathrm{g}}, e^{-(t_0+s)(H-E)} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)H} \cdots e^{(t_n-t_{n-1})H} \mathbb{1}_{A_n} e^{-(s-t_n)(H-E)} \Psi_{\mathrm{g}}) \\ &= e^{2Es} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-s}), Q_{[-s,s]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_s)) \right] \\ &= \mu_{(s)}^{t_0,\ldots,t_n}(A_0 \times \cdots \times A_n).\end{aligned}$$

また $\mu_{(t)}^\Lambda$, $\Lambda \subset [-t,t], \#\Lambda < \infty$, の有限次元分布は consistency 条件

$$\mu_{(t)}^{t_0,\ldots,t_n}(A_0 \times \cdots \times A_n) = \mu_{(t)}^{t_0,\ldots,t_n,t_{n+1},\ldots,t_{n+l}}(A_0 \times \cdots \times A_n \times \prod^l \mathbb{R}^d)$$

を満たすことがわかる．Kolmogorov の拡張定理により一意的な[25] 確率空間 $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と確率過程 $(Y_s)_{s \in [-t,t]}$ (e.g., [Sim79, Theorem 2.1]) で $\mathcal{B} = \sigma(Y_s, s \in [-t,t])$, $\mu_t^{t_0,\ldots,t_n}(A_0 \times \cdots \times A_n) = Q(Y_{t_0} \in A_0, \cdots, Y_{t_n} \in A_n)$ となるものが存在する．一意性により $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と $(\Omega, \mathcal{F}_{[-t,t]}, \mu_{(t)})$

[25]同型なものを同じとみなす．

は同型になり, また $(\mathcal{Y},\mathcal{B},Q)$ と $(\Omega,\mathcal{F}_{[-t,t]},\mu_{(s)}\lceil_{\mathcal{F}_{[-t,t]}})$ も同型になる. 故に $Q(A)=\mu_{(s)}(A)=\mu_{(t)}(A)$ が $A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して成り立つ. $\square$

μ は完全加法的集合関数[26] なので Hopf の拡張定理より $(\Omega,\sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度 μ_∞ で $\mu_\infty(A)=\mu(A)$ $(A\in\mathscr{G})$ となるものが存在する.

定理 6.3 (**ギブス測度の存在**) 確率測度 μ_T は μ_∞ へ局所弱収束する. *i.e.,* $\mu_T(A)\to\mu_\infty(A)$ *$(T\to\infty)$* が $A\in\mathscr{G}$ に対して成立する. また μ_∞ は ϕ の選び方によらない.

証明の前に補題をいくつか示す. $\mathscr{G}_T=\cup_{t\le T}\mathcal{F}_{[-t,t]}$ とし加法的集合関数 $\rho_T:\mathscr{G}_T\to\mathbb{R}$ を $A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}$ $(t<T)$ に対して,

$$\rho_T(A)=e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\cdot\left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|},Q_{[-t,t]}\frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|}\right)\right]$$

で定義する.

補題 6.4 ρ_T は *well defined, i.e.,* $A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}\subset\mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して

$$\begin{aligned}&e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|},Q_{[-t,t]}\frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|}\right)\right]\\&=e^{2Es}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\left(\frac{\phi_{T-s}(B_{-s})}{\|\phi_T\|},Q_{[-s,s]}\frac{\phi_{T-s}(B_s)}{\|\phi_T\|}\right)\right].\end{aligned}$$

証明: 左辺を $\rho_{(t)}$ とかき, 右辺を $\rho_{(s)}$ とかく. $\rho_{(t)}$ の有限次元分布は

$$\begin{aligned}&\rho_{(t)}^{t_0,\dots,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_{(t)}(B_{t_0}\in A_0,\dots,B_{t_n}\in A_n)\\&=\frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j})\right)(\phi_{T-t}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\phi_{T-t}(B_t)\right].\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}&=\frac{(\phi_{T-t},e^{-(t_0+t)(H-E)}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)(H-E)}\cdots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)}\mathbb{1}_{A_n}e^{-(t-t_n)(H-E)}\phi_{T-t})}{\|\phi_T\|^2}\\&=\frac{(\phi_{T-s},e^{-(t_0+s)(H-E)}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)(H-E)}\cdots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)}\mathbb{1}_{A_n}e^{-(s-t_n)(H-E)}\phi_{T-s})}{\|\phi_T\|^2}\\&=\frac{e^{2Es}}{\|\phi_T\|^2}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j})\right)(\phi_{T-s}(B_{-s}),Q_{[-s,s]}\phi_{T-s}(B_s))\right]\\&=\rho_{(s)}^{t_0,\dots,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n).\end{aligned}$$

[26] $A=\cup_nA_n\in\mathscr{G}$, $A_n\cap A_m=\emptyset$ ならば $\mu(A)=\sum_n\mu(A_n)$ となること.

さらに$\rho_{(t)}^{\Lambda}$ と$\rho_{(s)}^{\Lambda}$, $\Lambda\subset[-T,T]$, $\#\Lambda<\infty$, はconsistency 条件をみたし, $\rho_{(t)}\lceil_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ と$\rho_{(s)}\lceil_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ は$(\Omega,\mathcal{F}_{[-t,t]})$ 上の確率測度である. Kolmogorov の拡張定理から$\rho_{(t)}(A)=\rho_{(s)}(A)$ が$A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}\subset\mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して成り立つ. よって補題が成立する. $\square$

Hopf の拡張定理から$(\Omega,\sigma(\mathscr{G}_T))$ 上の確率測度$\bar\rho_T$ で$\rho_T=\bar\rho_T\lceil_{\mathscr{G}_T}$ となるものが存在する.

補題 6.5 $t\le T$, $A\in\mathscr{G}_t$ とする. このとき$\bar\rho_T(A)=\mu_T(A)$.

証明: $\Lambda=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}\subset[-T,T]$ と$A_0\times\cdots\times A_n\in\times_{j=0}^n\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して[27],

$$\begin{aligned}\rho_T^{\Lambda}(A_0\times\cdots\times A_n)&=\rho_T(B_{t_0}\in A_0,...,B_{t_n}\in A_n)\\&=\frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(B_{\mathrm{j}})\right)\left(\phi_{T-t}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\phi_{T-t}(B_t)\right)\right]\\\mu_T^{\Lambda}(A_0\times\cdots\times A_n)&=\mu_T(B_{t_0}\in A_0,...,B_{t_n}\in A_n)\\&=\frac{1}{Z_T}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(B_{\mathrm{j}})\right)\mathscr{L}_T\right]\end{aligned}$$

を定義する. ρ_T^{Λ} とμ_T^{Λ} は$((\mathbb{R}^d)^{\Lambda},\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\Lambda})$. 上の確率測度である.

$$\begin{aligned}\mu_T^{\Lambda}(A_0\times\cdots\times A_n)&=\frac{(\phi\otimes\mathbb{1},e^{-(t_0+T)H}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}\cdots\mathbb{1}_{A_n}e^{-(T-t_n)H}\phi\otimes\mathbb{1})}{\|\phi_T\|^2}\\&=\frac{e^{2Et}(\phi_{T-t},e^{-(t_0+t)H}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}\cdots\mathbb{1}_{A_n}e^{-(t-t_n)H}\phi_{T-t})}{\|\phi_T\|^2}\end{aligned}$$

がϕ_{T-t} の定義からわかる. 右辺は

$$=\frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(B_{\mathrm{j}})\right)\left(\phi_{T-t}(B_0),Q_{[-t,t]}\phi_{T-t}(B_t)\right)\right]$$

と表せる. よって$\rho_T^{\Lambda}(A_0\times\cdots\times A_n)=\mu_T^{\Lambda}(A_0\times\cdots\times A_n)$ となる. 確率測度μ_T^{Λ} とρ_T^{Λ} は共にconsistency 条件を満たすからKolmogorov の拡張定理から一意的な確率空間$(\mathcal{Y},\mathcal{B},Q)$ と確率変数Y_s で$\mathcal{B}=\sigma(Y_s,s\in[-T,T])$ かつ

$$Q(Y_{t_0}\in A_0,\cdots,Y_{t_n}\in A_n)=\mu_T^{t_0,...,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_T^{t_0,...,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n)$$

となるものが存在する. 一方

$$\mu_T^{t_0,...,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_T^{t_0,...,t_n}(A_0\times\cdots\times A_n)=\bar\rho_T(A_0\times\cdots\times A_n)=\mu_T\lceil_{\mathscr{G}_T}(A_0\times\cdots\times A_n).$$

故に$\bar\rho_T=Q=\mu_T\lceil_{\mathscr{G}_T}$ が一意性から従う. $\square$

[27] $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ は$\mathbb{R}^d$ のボレルシグマ代数を表す.

定理 *6.3* の証明: 補題 6.5 から

$$\lim_{T\to\infty}\mu_T(A)=\lim_{T\to\infty}\bar{\rho}_T(A)=\lim_{T\to\infty}e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|},Q_{[-t,t]}\frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|}\right)\right].$$

$\phi_T\to\Psi_{\mathrm{g}}(T\to\infty)$ なので

$$\lim_{T\to\infty}\mu_T(A)=e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\left(\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\Psi_{\mathrm{g}}(B_t)\right)\right]=\mu_\infty(A).$$

次に μ_∞ が ϕ に依らないことを示す. μ'_∞ が μ_T の局所弱極限とする. μ_∞ の構成の仕方から, $\mu_\infty(A)=\mu'_\infty(A)$ が $A\in\mathscr{G}$ に対していえる. Hopf の拡張定理の一意性から $\mu_\infty=\mu'_\infty$. よって μ_∞ は ϕ によらない. □

μ_∞ は具体的に $A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して

$$\mu_\infty(A)=e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{1}_A\left(\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\Psi_{\mathrm{g}}(B_t)\right)\right]$$

で与えられる.

7 基底状態に関する期待値

オブザーバブル O の期待値 $(\Psi_{\mathrm{g}},O\Psi_{\mathrm{g}})$ をギブス測度 μ_∞ をもちいて表すことができる. ここでは重要な O として $O=e^{+\beta N}$, $O=e^{\phi(f)^2}$ の期待値をギブス測度で表す.

7.1 $F(\phi(f))$ の期待値

補題 7.1 f は Ω 上の $\mathcal{F}_{[-t,t]}$ 可測関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty}[f]=e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\Psi_{\mathrm{g}}(B_t)\right)f\right]. \tag{7.1}$$

証明: $A\in\mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して $\mu_\infty(A)=e^{2Et}\int dx\mathbb{E}_W^x\left[\left(\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}),Q_{[-t,t]}\Psi_{\mathrm{g}}(B_t)\right)\mathbb{1}_A\right]$ なので (7.1) が従う. □

補題 7.1 からすぐに次が従う.

系 7.2 $f_j:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, $j=0,...,n$, は有界関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\prod_{j=0}^n f_j(B_{t_j})\right]=(\Psi_{\mathrm{g}},f_0e^{-(t_1-t_0)(H-E)}f_1\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)}f_n\Psi_{\mathrm{g}}). \tag{7.2}$$

特に任意の有界関数 f,g に対して $\mathbb{E}_{\mu_\infty}[f(B_t)g(B_s)]=(f\Psi_{\mathrm{g}},e^{-|t-s|(H-E)}g\Psi_{\mathrm{g}})$.

証明: $A_j \in \mathscr{B}$, $j=0,1,...,n$, に対して, 次が従う:

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j})\right] = e^{2Et}\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x\left[\left(\Psi_{\rm g}(B_{-t}), Q_{[-t,t]}\Psi_{\rm g}(B_t)\right)\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j})\right]$$
$$= (\Psi_{\rm g}, \mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)(H-E)}\mathbb{1}_{A_1}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)}\mathbb{1}_{A_n}\Psi_{\rm g}).$$

よって (7.2) が得られる. □

補題 7.3 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\beta \in \mathbb{R}$ としよう. このとき

$$(\Psi_{\rm g}, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g}) = e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{i\beta K(f)}\right]. \tag{7.3}$$

ここで $K(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty (e^{-|r|\omega}e^{-ikB_r}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \hat{f})dr$ は $(\Omega, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率変数である.

証明: $(\Psi_{\rm g}, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g}) = \lim_{T\to\infty}(\Psi_{\rm g}^T, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g}^T)$ に注意せよ. また

$$\left(\Psi_{\rm g}^T, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g}^T\right) = \frac{1}{Z_T}\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{-\phi_{\rm E}(\int_{-T}^T \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s)ds)}e^{i\beta\phi_{\rm E}(\delta_0\otimes f)}\right].$$

ここで $\mu_{\rm E}$ に関する期待値は以下のように厳密に計算できる.

$$(\Psi_{\rm g}, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g}) = \lim_{T\to\infty} e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{i\beta\int_{-T}^T ds(e^{-|s|\omega}e^{-ikB_s}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega},\hat{f})}\right].$$

$|\int_{-T}^T ds(e^{-|s|\omega}e^{-ikB_s}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \hat{f})| \leq 2I_{\rm IR}\|\hat{f}\| < \infty$ に注意せよ. μ_T は局所弱収束するので, 後ほど述べる定理 7.10の telescoping と同じようにすれば補題が従う. □

F が多項式またはシュワルツテスト関数としよう. 補題 7.3 から関数 $(\Psi_{\rm g}, F(\phi(f))\Psi_{\rm g})$ はパス測度 μ_∞ の平均で表せる. $\Psi_{\rm g} \in D(e^{+\beta N})$ が任意の $\beta > 0$ で成立することを後ほど系 7.11 で示す. 特に $\Psi_{\rm g} \in D(\phi(f)^n)$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ.

系 7.4 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ としよう. また $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$ は n 次のエルミート多項式とする. このとき

$$(\Psi_{\rm g}, \phi(f)^n\Psi_{\rm g}) = i^n\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[h_n\left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}}\right)\cdot\right](\|f\|/\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

証明: $e^{-\beta^2\|f\|^2/4}e^{i\beta K(f)} = \sum_{n=0}^\infty h_n\left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}}\right)\frac{(-\beta\|f\|/\sqrt{2})^n}{n!}$ なので

$$\frac{1}{i^n}\frac{d^n}{d\beta^n}e^{-\beta^2|f|^2/4}e^{i\beta K(f)}\Big\lceil_{\beta=0} = i^n h_n\left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}}\right)(\|f\|/\sqrt{2})^n$$

が従う. $(\Psi_{\rm g}, \phi(f)^n\Psi_{\rm g}) = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{d\beta^n}e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty}[e^{i\beta K(f)}]\Big\lceil_{\beta=0}$ から (7.4) が従う. □

系 7.5 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ とする．このとき $(\Psi_{\rm g}, F(\phi(f))\Psi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[G_f\left(K(f)\right)\right]$．ここで $G_f = \check{F} * \check{g}$, $g(\beta) = e^{-\beta^2\|f\|^2/4}$.

証明: $F(\phi(f)) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{F}(\beta)e^{i\beta\phi(f)}d\beta$ なので,

$$(\Psi_{\rm g}, F(\phi(f))\Psi_{\rm g}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{F}(\beta)e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{i\beta K(f)}\right]d\beta.$$

よって系が従う． □

$e^{i\beta\phi(h)}$ の正規化を $[e^{i\beta\phi(h)}]_{\rm ren} = \frac{e^{i\beta\phi(h)}}{(\mathbb{1}, e^{i\beta\phi(h)}\mathbb{1})} = e^{+\beta^2\|h\|^2/4}e^{i\beta\phi(h)}$ によって定義する．$F_{\rm ren}(\phi(h))$ を $F_{\rm ren}(\phi(h)) = (2\pi)^{-1/2}\int\check{F}(\beta)[e^{i\beta\phi(h)}]_{\rm ren}d\beta$ によって定義する．補題 7.3 と系 7.5 によって次が従う．

系 7.6 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ としよう．このとき $(\Psi_{\rm g}, F_{\rm ren}(\phi(f))\Psi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[F\left(K(f)\right)\right]$.

7.2 ガウス domination

調和振動子の任意の固有ベクトルは $e^{-|x|^2/2}$ のオーダーで減衰することは, 固有ベクトルがエルミート多項式 $\times e^{-|x|^2/2}$ で与えられることから分かる．Nelson Hamiltonian の固有ベクトルも同様にガウス型に減衰することが予想される．

補題 7.7 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき全ての $\beta > 0$ に対して,

$$(\Psi_{\rm g}, e^{-\beta\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\frac{\beta K^2(f)}{1+\beta\|f\|^2}}\right]. \tag{7.5}$$

証明: 補題 7.3によって

$$\begin{aligned}(\Psi_{\rm g}, e^{-(\beta^2/2)\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2}(\Psi_{\rm g}, e^{ik\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g})dk \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2}e^{-k^2\beta^2\|f\|^2/4}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{ik\beta K(f)}\right]dk = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2\|f\|^2/2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\frac{\beta^2K^2(f)/2}{1+\beta^2\|f\|^2/2}}\right]\end{aligned}$$

がわかる．$\beta^2/2$ を β に置き換えれば補題が示せる． □

定理 7.8 (**ガウス domiantion**) $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ とし, $|\beta| < 1/\|f\|^2$ とする．このとき $\Psi_{\rm g} \in D(e^{(\beta/2)\phi(f)^2})$ かつ

$$\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{\frac{\beta K^2(f)}{1-\beta\|f\|^2}}\right]. \tag{7.6}$$

特に $\lim_{\beta\to 1/\|f\|^2+}\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}\| = \infty$.

証明: $B=\{z\in\mathbb{C}||z|<1/\|f\|^2\}$, $\mathbb{C}_+=\{z|\mathrm{Re}\,z>0\}$ そして $\mathbb{C}_-=\{z|\mathrm{Re}\,z<0\}$ としよう.

$$\rho(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\frac{zK^2(f)}{1+z\|f\|^2}}\right],(z>0). \tag{7.7}$$

とおく. このとき $|K(f)|\le\|f\|\|\hat{h}/\omega\|$ がパスに一様に成り立つので, $\rho(z)$ は $\mathbb{C}_+\cup B$ へ解析接続できる. この解析接続された関数を $\bar{\rho}(z)$ で表す. $w\in\mathbb{R}\cap B$ とし $B_\delta(w)$ は半径 δ の $\mathbb{C}$ 上の球とする. $\delta<1/\|f\|^2$ となるものをとり, w が $B_\delta(w)\cap\mathbb{C}_-\cap B\neq\emptyset$ をみたすとする. $\bar{\rho}(z)$ を次のように級数展開する

$$\bar{\rho}(z)=\sum_{n=0}^\infty(z-w)^n b_n(w),\quad z\in B_\delta(w)\cap B. \tag{7.8}$$

一方 $\Psi_\mathrm{g}\in D(\phi(f)^2)$ なので $\mathbb{C}_+\ni z\mapsto(\Psi_\mathrm{g},e^{-z\phi(f)^2}\Psi_\mathrm{g})\in\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}_+$ 上で微分可能. よって $\mathbb{C}_+$ 上で解析的であるから次を得る.

$$(\Psi_\mathrm{g},e^{-z\phi(f)^2}\Psi_\mathrm{g})=\sum_{n=0}^\infty(z-w)^n\frac{1}{n!}\int_0^\infty(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda,\quad z\in\mathbb{C}_+. \tag{7.9}$$

ここで E_λ は Ψ_g に関する $\phi(f)^2$ のスペクトル測度. (7.8), (7.9) と $\bar{\rho}(z)=(\Psi_\mathrm{g},e^{-z\phi(f)^2}\Psi_\mathrm{g})$ $(z\in\mathbb{C}_+)$ を比べれば,

$$b_n(w)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda \tag{7.10}$$

がわかる. (7.10) を (7.8) へ代入すれば,

$$\bar{\rho}(z)=\sum_{n=0}^\infty(z-w)^n\frac{1}{n!}\int_0^\infty(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda,\quad z\in B_\delta(w)\cap B, \tag{7.11}$$

がわかり, さらに右辺が絶対収束することもわかる. つまり

$$\sum_{n=0}^\infty|z-w|^n\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right|<\infty \tag{7.12}$$

$(z\in B_\delta(w)\cap B)$. よって $z\in B_\delta(w)\cap B\cap\mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-z\lambda}dE_\lambda&\le\sum_{n=0}^\infty|z-w|^n\frac{1}{n!}\left|\int_0^M(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right|\\&=\sum_{n=0}^\infty|z-w|^n\frac{1}{n!}\left|\int_0^M\lambda^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right|\le\sum_{n=0}^\infty|z-w|^n\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty\lambda^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right|\\&=\sum_{n=0}^\infty|z-w|^n\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty(-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right|<\infty\end{aligned}$$

が (7.12) から従う．これは $\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-z\lambda}dE_\lambda<\infty$ $(z\in B_\delta(w)\cap B\cap\mathbb{R})$ を意味する．単調収束定理から $\int_0^\infty e^{-z\lambda}dE_\lambda<\infty$．よって $\Psi_{\mathrm{g}}\in D(e^{-(z/2)\phi(f)^2})$．そして

$$\|e^{-(z/2)\phi(f)^2}\Psi_{\mathrm{g}}\|^2=\bar\rho(z),\quad z\in B_\delta(w)\cap B\cap\mathbb{R}, \tag{7.13}$$

となる．いま, 任意の $\delta<1/\|f\|^2$ に対して, $w\in\mathbb{R}\cap B$ で $\mathbb{C}_-\cap B\cap B_\delta(w)\neq\emptyset$ となるものが存在するので, 定理が示せた. □

7.3 第 2 量子化作用素の期待値

次の補題から始める.

補題 7.9 $\rho\geq 0$ のかけ算作用素とする．このとき

$$\frac{(\Phi_T,e^{-\beta d\Gamma(\rho)}\Phi_T)}{\|\Phi_T\|^2}=\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2\int_{-T}^0dt\int_0^TW^{\rho,\beta}(B_t-B_s,t-s)ds}\right].$$

ここで

$$W^{\rho,\beta}(x-y,T)=\frac12\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)}e^{-|T|\omega(k)}e^{-ik(x-y)}(1-e^{-\beta\rho(k)})dk,$$
$$W^{\rho,\beta}_\infty=\int_{-\infty}^0dt\int_0^\infty W^{\rho,\beta}(B_t-B_s,t-s)ds.$$

証明: [GHPS09, Section 3.2] と同様に示せる. □

$|W^{\rho,\beta}_\infty|\leq I_{\mathrm{IR}}/2<\infty$ がパスに一様に成立することに注意しよう.

定理 7.10 $(\Psi_{\mathrm{g}},e^{-\beta d\Gamma(\rho)}\Psi_{\mathrm{g}})=\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]$ が任意の $\beta>0$ で成り立つ.

証明: 簡単のために $W^{\rho,\beta}_T=\int_{-T}^0ds\int_0^TW^{\rho,\beta}(B_t-B_s,t-s)dt$ とおく．$\delta>0$ に対して, ある S_δ で $|W^{\rho,\beta}_T-W^{\rho,\beta}_\infty|\leq\delta$ $(\forall T>S_\delta)$ がパスに一様に成立するものが存在する.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_T}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]&=\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_T}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]\\&\quad+\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]\end{aligned}$$

と分解する．まず $\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_T}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]\right|\leq C\delta$ となる定数 C がある．第 2 項は次のように評価できる

$$\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]\right|\leq\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_{S_\delta}}\right]\right| \tag{7.14}$$
$$+\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_{S_\delta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_{S_\delta}}\right]\right| \tag{7.15}$$
$$+\left|\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_{S_\delta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2W^{\rho,\beta}_\infty}\right]\right|. \tag{7.16}$$

(7.14) と (7.16) に対して上限をえる．定理 6.3によって (7.15) は $T \to \infty$ のときゼロに収束する． $\square$

系 7.11 (**基底状態ボゾン数の指数減衰性**)$(\Psi_{\rm g}, e^{\beta N}\Psi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2(1-e^{\beta})W_\infty}\right]$ が全ての $\beta \in \mathbb{C}$ で成立する．特に $\Psi_{\rm g} \in D(e^{+\beta N})$ が全ての $\beta > 0$ で成り立つ.

証明: 定理 7.10で ρ を $\mathbb{1}$ におきかえれば, $(\Psi_{\rm g}, e^{-\beta N}\Psi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\alpha^2(1-e^{-\beta})W_\infty}\right]$ が任意の $\beta > 0$ で成り立つ．ここで $W_\infty = \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty W(B_t - B_s, t-s)ds$. あとは定理 7.8 の証明と同じ, 解析接続による． $\square$

この系の主張は, $H_{\rm p} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\rm f}$ の基底状態 $\Psi_{\rm p} \otimes \mathbb{1}$ のボゾン数はゼロであるが, 相互作用 $H_{\rm I}$ を加えても H の基底状態のボゾン数が期待値の意味で非常に少ないということをいっている.

7.4 参考文献など

この章で紹介した議論のオリジナルは Betz-Hiroshima-Lőrinczi-Minlos-Spohn [BHLMS02] による．Gross [Gro73], Spohn [Spo89] で基底状態のボゾン数の指数減衰性を示している．ただし, ギブス測度の議論はない．スピンーボゾン模型 [HHL12], Pauli-Fierz 模型 [BH09], 準相対論的 Pauli-Fierz 模型 [Hir13] でギブス測度の存在が示されている．この章では測度の局所弱収束性を示したが, 実はブラウン運動のパスの連続性を使えば, μ_T の部分列で弱収束するものが存在することを示せる．例えば, [BH09] ではその方法で示されている．ただし, この手法は一般の場合には適応させづらい．また, 基底状態の存在を仮定しなくても極限測度の存在が知られている模型もある．例えば, Osada-Spohn [OS99]．ギブス測度を用いたオブザーバブルの評価の応用の一つとして $(\Psi_{\rm g}, N^k\Psi_{\rm g})$, $k \in \mathbb{R}$, がある．k が自然数のときは代数的な計算で $|(\Psi_{\rm g}, N^k\Psi_{\rm g})| \le CI_{\rm IR}^k$ を導くことが出来る．Hiroshima-Takaesu-Lőrinczi [HTL12] は Feynman−Kac 型汎関数積分表示をもちいて, 任意の $\mathbb{R} \ni k > 0$ に対して, $(\Psi_{\rm g}, N^k\Psi_{\rm g}) \le I_{\rm IR}^k$ を示し, $(I_{\rm IR} - a)^k \le \lim_{g\to\infty}(\Psi_{\rm g}, N^k\Psi_{\rm g}) \le I_{\rm IR}^k$ を示した.

8 赤外発散と基底状態の非存在

8.1 非存在

この章では次の条件を仮定する.

条件 8.1 $d = 3$, $\varphi \ge 0$ $(\varphi \not\equiv 0)$, $\omega(k) = |k|$ とし $V(x) \ge C|x|^{2\beta}$, $\beta > 0$.

この条件下で $H_{\rm p}$ は至るところ正の基底状態 $\Psi_{\rm p}$ をもつ．さらに $\Psi_{\rm p}(x)\leq e^{-C|x|^{\beta+1}}$ が成立する．赤外正則条件 $I_{\rm IR}<\infty$ で H の基底状態は存在したが, これから述べるように赤外特異条件 $I_{\rm IR}=\infty$ で H の基底状態は存在しない.

定理 8.1 (**基底状態の非存在**) 条件 *8.1* を仮定する．このとき H の基底状態を存在しない[28].

$\gamma(T)=(\Psi_{\rm p}\otimes 1\!\!1,\Psi_{\rm g}^T)^2$ を思い出そう．定理 8.1 を証明するために $\lim_{T\to\infty}\gamma(T)=0$ をいえばいい.

$$\gamma(T)=\frac{(\Psi_{\rm p}\otimes 1\!\!1,e^{-TH}\Psi_{\rm p}\otimes 1\!\!1)^2}{(\Psi_{\rm p}\otimes 1\!\!1,e^{-2TH}\Psi_{\rm p}\otimes 1\!\!1)},$$

なので $\gamma(T)$ は $P(\phi)_1$ 過程で

$$\gamma(T)=\frac{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}$$

と表せる．$\mathcal{N}_T(A)=\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[1\!\!1_A e^{S[-T,T]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}$ で $(\mathfrak{X},\mathscr{B}(\mathfrak{X}))$ 上の確率測度を定義する.

補題 8.2 $\gamma(T)\leq\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T W(X_t-X_s,t-s)dt}\right]$ が成り立つ.

証明: 分子は Schwartz の不等式と鏡映対称性によって

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)^2 d\mathsf{N}_0\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)\left(\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,0]}\right]\right) d\mathsf{N}_0\end{aligned}$$

と評価できる．X_{-s}, $s\geq 0$, と X_t, $t\geq 0$, が独立なので

$$\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)^2\leq\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]+S[-T,0]}\right]d\mathsf{N}_0=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]+S[-T,0]}\right].$$

$S[0,T]+S[-T,0]=S[-T,T]-\int_{-T}^0 ds\int_0^T W(X_t-X_s,t-s)dt$ なので

$$\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[0,T]}\right]\right)^2\leq\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]-\int_{-T}^0 ds\int_0^T W(X_t-X_s,t-s)dt}\right].$$

よって

$$\gamma(T)\leq\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]-\int_{-T}^0 ds\int_0^T W(X_t-X_s,t-s)dt}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}=\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T W(X_t-X_s,t-s)dt}\right]$$

となり補題が従う. □

[28]定理 8.1の条件下では赤外特異条件 $I_{\rm IR}=\infty$ が成立している.

$e^{-|t|\sqrt{-\Delta}}$ の積分核は $e^{-|t|\sqrt{-\Delta}}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\frac{|t|}{(|x-y|^2+|t|^2)^2}$ なのでペアポテンシャル $W(x,t)$ は具体的に計算できる．

$$\begin{aligned}W(x-y,t-s)&=\frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{\infty}d|T|(e^{-ikx}\hat{\varphi},e^{-|T|\omega}e^{-iky}\hat{\varphi})\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}du\int_{\mathbb{R}^3}dv\frac{\varphi(u)\varphi(v)}{|x-y+u-v|^2+|t-s|^2}>0.\end{aligned}$$

$A_T=\{\omega\in\mathfrak{X}||X_t(\omega)|\le T^\lambda,|t|\le T\}$ $(\lambda<1)$ を考える．$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[e^{-\int_{-T}^0ds\int_0^TW(X_t-X_s,t-s)dt}\right]$ の積分領域を A_T と $\mathfrak{X}\setminus A_T$ に分けて考える．

補題 8.3 $\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[1\!\!1_{A_T}e^{-\int_{-T}^0ds\int_0^TW(X_t-X_s,t-s)dt}\right]=0$ が成り立つ．

証明: A_T 上での評価式 $|X_t-X_s+x-y|^2+|t-s|^2\le 8T^{2\lambda}+2|x-y|^2+|t-s|^2$ と $\displaystyle\int_{-T}^0ds\int_0^Tdt\frac{1}{a^2+|t-s|^2}\ge\log\left(\frac{a^2+T^2/2}{a^2}\right)$ から

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^0ds\int_0^TW(X_t-X_s,t-s)dt\\&\quad=\int_{-T}^0ds\int_0^Tdt\int_{\mathbb{R}^3}dx\int_{\mathbb{R}^3}dy\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{|X_t-X_s+x-y|^2+|t-s|^2}\\&\quad\ge\int_{-T}^0ds\int_0^Tdt\int_{\mathbb{R}^3}dx\int_{\mathbb{R}^3}dy\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{8T^{2\lambda}+2|x-y|^2+|t-s|^2}\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^3}dx\int_{\mathbb{R}^3}dy\varphi(x)\varphi(y)\log\left(\frac{8T^{2\lambda}+2|x-y|^2+T^2/2}{8T^{2\lambda}+2|x-y|^2}\right)\end{aligned}$$

を得る．右辺は $\lambda<1$ なので $T\to\infty$ で発散する．補題が示せた． □

補題 8.4 $\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[1\!\!1_{\mathfrak{X}\setminus A_T}e^{-\int_{-T}^0ds\int_0^TW(X_t-X_s,t-s)dt}\right]=0$ が成立する．

証明: $\displaystyle\int_{-T}^0ds\int_0^TW(X_t-X_s,|t-s|)dt\le\frac{T}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ に注意せよ．

$$\begin{aligned}\gamma(T)&\le e^{(T/4)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2}\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[1\!\!1_{\mathfrak{X}\setminus A_T}e^{S[-T,T]}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}\\&\le e^{(T/4)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2}\frac{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{2S[-T,T]}\right]\right)^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[1\!\!1_{\mathfrak{X}\setminus A_T}]\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

さらに $-T\delta\|\hat{\varphi}/\omega\|^2\le|S[-T,T]|\le T\delta\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ となる定数 $\delta>0$ が存在する．よって

$$\frac{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{2S[-T,T]}\right]\right)^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{S[-T,T]}\right]}\le e^{2T\delta\|\hat{\varphi}/\omega\|^2}.$$

証明を完結するために次の評価をする．

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}\right] \le T^{-\lambda}\sqrt{a+Tb}\exp(-cT^{\lambda(\beta+1)}). \tag{8.1}$$

これは補題 8.5から得られる．ここで $a, b, c > 0$. $1/(\beta+1) < \lambda < 1$ と選べば (8.1) の右辺は $T \to \infty$ のときゼロに収束する． □

定理 *8.1* **の証明***:* $F = e^{-\int_{-T}^{0} ds \int_0^T W(X_s, X_t, t-s)dt}$ として

$$\gamma(T) \le \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[e^{-\int_{-T}^{0} ds \int_0^T W(X_s, X_t, t-s)dt}\right] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}[\mathbb{1}_{A_T}F] + \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}F]$$

と分ける．補題8.2 から $\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_T}[\mathbb{1}_{A_T}] = 0$ が従い, 補題8.3から $\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_T}[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}] = 0$ が従う．よって $\lim_{T\to\infty}\gamma(T) = 0$. □

補題 8.5 *(8.1)* が成り立つ．

証明: $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}\right] = \mathcal{N}_0\left(\sup_{t\in[-T,T]}|X_t| \ge T^\lambda\right)$ に注意せよ．(8.1) を示すために $P(\phi)_1$ 過程の Dirichlet 原理 をつかう．$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は偶関数で $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \ge T^\lambda, \\ \le |x|, & T^\lambda - 1 < |x| < T^\lambda, \\ 0, & |x| \le T^\lambda - 1. \end{cases}$

とする．このとき

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\{\sup_{|s|<T}|X_s|>T^\lambda\}}\right] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\{\sup_{|s|<T}|f(X_s)|>T^\lambda\}}\right].$$

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の鏡映対称性によって $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\{\sup_{|s|<T}|f(X_s)|>T^\lambda\}}\right] = 2\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\mathbb{1}_{\{\sup_{0\le s\le T}|f(X_s)|>T^\lambda\}}\right]$ となる．命題 2.4によって

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[\sup_{|s|<T}|f(X_s)| > T^\lambda\right] \le \frac{2e}{T^\lambda}\sqrt{(f,f)_{L^2(\mathsf{N}_0)} + T(L_{\mathrm{p}}^{1/2}f, L_{\mathrm{p}}^{1/2}f)_{L^2(\mathsf{N}_0)}}. \tag{8.2}$$

(8.2) の右辺を評価する．$f\Psi_{\mathrm{g}} \in D(H_{\mathrm{p}})$ と $H_{\mathrm{p}}f\Psi_{\mathrm{g}} = -\Delta f\cdot\Psi_{\mathrm{g}} - \nabla f\cdot\nabla\Psi_{\mathrm{g}} + E_{\mathrm{p}}f\Psi_{\mathrm{g}}$ に注意せよ．これによって $(L_{\mathrm{p}}^{1/2}f, L_{\mathrm{p}}^{1/2}f)_{L^2(\mathsf{N}_0)} = (f\Psi_{\mathrm{p}}, -\Delta f\cdot\Psi_{\mathrm{g}} - \nabla f\cdot\nabla\Psi_{\mathrm{p}})$. また $\Psi_{\mathrm{p}}(x) \le e^{-C|x|^{\beta+1}}$ によって

$$\|f\Psi_{\mathrm{p}}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^2\Psi_{\mathrm{p}}^2(x)dx \le e^{-2CT^{\lambda(\beta+1)}}\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2 e^{-2C|x|^{\beta+1}}dx.$$

$\nabla f, \Delta f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ だから

$$(L_{\mathrm{p}}^{1/2}f, L_{\mathrm{p}}^{1/2}f)_{L^2(\mathsf{N}_0)} \le C'\|f\Psi_{\mathrm{p}}\|(\|\nabla\Psi_{\mathrm{p}}\| + \|\Psi_{\mathrm{p}}\|) \le C''e^{-CT^{\lambda(\beta+1)}}(\|\nabla\Psi_{\mathrm{p}}\| + \|\Psi_{\mathrm{p}}\|)$$

が従う．同様に $(f,f)_{L^2(\mathsf{N}_0)} \le e^{-2CT^{\lambda(\beta+1)}}\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2 e^{-2\gamma|x|^{\beta+1}}dx$. 故に

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}\left[\mathbb{1}_{\mathfrak{X}\setminus A_T}\right] \le T^{-\lambda}\sqrt{a+Tb}\,e^{-cT^{\lambda(\beta+1)}}$$

が適当な定数 a, b, c で従う． □

8.2 参考文献など

基底状態の非存在と赤外特異条件の関係に数学的に厳密に初めて指摘したのは Arai [Ara83a, Ara83b] と思われる．また [HSSS11, Theorem 3.28] も参照せよ．さらに，Arai-Hirokawa-Hiroshima[AHH99] でも同様の議論が展開されている．この章で紹介した非存在の証明は Lőrinczi-Minlos-Spohn [LMS02] による．キーとなるのは $P(\phi)_1$ 過程の Dirichlet 原理に依るパスの評価だが，これは Kipnis-Varadhan の [KV86, Lemma 1.12] によるが，我々の模型にあった形に翻訳するのには時間がかかる．非存在の証明は Hirokawa [Hir03] が pull through 公式をつかってもっと精密化している．また，Derezínski-Gérard [DG04] はシンプルな証明を与えている．Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS12b] は Lorentz 多様体上に定義された Nelson Hamiltonian の基底状態の非存在を汎関数積分表示で示している．

9 紫外切断のくりこみ理論

この章では $\hat{\varphi} \to \mathbb{1}$ の極限を考える．$d = 3$ として，N-粒子 Nelson 模型を考える．Fock 表現で，その Hamiltonian は

$$H = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + g \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \overline{H_{\mathrm{I}}(x)} dx \tag{9.1}$$

で与えられる，Hilbert 空間 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である．ここで結合定数 g を導入した．N-粒子 Schrödinger 作用素は $H_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V$ で与えられる．相互作用項は

$$H_{\mathrm{I}}(x) = \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\hat{\varphi}(k) e^{-ik\cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{ik\cdot x_j} a^*(k) \right) dk$$

と定義される．以降 $\mathscr{H} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathscr{F})$ の同一視をする．H の荷電分布の 1 点極限を考える．つまり $\varphi(x) \to (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\hat{\varphi}(k) \to \mathbb{1}$．この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法で示されているが，これを汎関数積分で証明する．また Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようである．

さてこの極限をとるために紫外切断関数として $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = -\varepsilon|k|^2/2$ をとる．この関数によって Hamiltonian H_ε を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメターとみなす．そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える．ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である．これは具体的に後で与える．主定理は以下である．

(1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導きだす．

(2) $H_{\mathrm{ren}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す．

(3) H_{ren} のペアポテンシャルを導く.

(4) H_{ren} の弱結合極限[29]を求める.

9.1 正則化された Hamiltonian の汎関数積分表示

$\omega(k)=|k|$ とする. $\mathbb{1}_\lambda(k)=\begin{cases}1, & \omega(k)<\lambda\\ 0, & \omega(k)\geq\lambda\end{cases}$ とし $\mathbb{1}_\lambda^\perp(k)=\mathbb{1}-\mathbb{1}_\lambda(k)$ とおく. 赤外切断パラメター $\lambda>0$ を仮定する. この章では簡単のために次の仮定をする.

条件 9.1 ポテンシャル V は有界かつ連続関数. 特に Kato クラスである.

紫外切断のくりこみでは V は全く本質的ではなく, $V\equiv 0$ としても構わない. カットオフ関数 $\hat\varphi_\varepsilon(k)=e^{-\varepsilon|k|^2/2}\mathbb{1}_\lambda^\perp$, $\varepsilon\geq 0$, を考えよう. 正則化された Hamiltonian を

$$H_\varepsilon=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+g\int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus}\overline{H_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x)}dx,\quad \varepsilon>0,$$

で定義する.

$$H_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x)=g\sum_{j=1}^N\int\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\hat\varphi_\varepsilon(k)e^{-ik\cdot x_j}a(k)+\hat\varphi_\varepsilon(-k)e^{ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk$$

である. 主目的は H_ε で $\varepsilon\downarrow 0$ の極限を考えることである.

$$E_\varepsilon=-\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk$$

としよう. ここで

$$\beta(k)=\frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}.$$

$E_\varepsilon\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意せよ.

定理 9.1 (**UV くりこみ**) 次を満たす下から有界な自己共役作用素 H_{ren} が存在する.

$$\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-t(H_\varepsilon-E_\varepsilon)}=e^{-tH_{\mathrm{ren}}},\quad t\geq 0.$$

この定理を汎関数積分をつかって証明する. ここから $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $3N$ 次元のブラウン運動を表すとする.

[29]weak coupling limit

命題 9.2 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう．このとき

$$(f \otimes 1\!\!1, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon} \right].$$

ここで $S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは $W_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} 1\!\!1_\lambda^\perp dk$ で与えられる．

9.2 くりこまれた作用

次の関数を考えよう．

$$\varrho_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x - \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \beta(k) 1\!\!1_\lambda^\perp dk, \quad \varepsilon \geq 0.$$

命題 9.3 関数 S_0^{ren} で次を満たすものが存在する．

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon - 4NT\varrho_\varepsilon(0,0))} \right] = \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\mathrm{ren}}} \right].$$

$W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t) \to W_0(x,t)$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ が $(x,t) \neq (0,0)$ で成り立つ．ここで

$$W_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} 1\!\!1_\lambda^\perp dk.$$

しかし $W_\varepsilon(0,0) \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ で, $W_0(x,t)$ は $(0,0)$ で特異性をもつ．命題 9.3 を証明しよう．

今から $T > 0$ を固定する．$\varepsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である．また $0 < \tau \leq T$ を固定し, $[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう．正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\mathrm{d}} + S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$．ここで

$$S_\varepsilon^{\mathrm{d}} = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt\, W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s),$$

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s).$$

$S_\varepsilon^{\mathrm{d}}$ は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2 | |t| \leq T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$ はそれ以外の部分を表す．$\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = 0$ となる．次の補題はすぐにわかる．

補題 9.4 パスごとに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = S_0^{\mathrm{OD}}$．ここで S_0^{OD} は $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} \lceil_{\varepsilon=0}$ である．

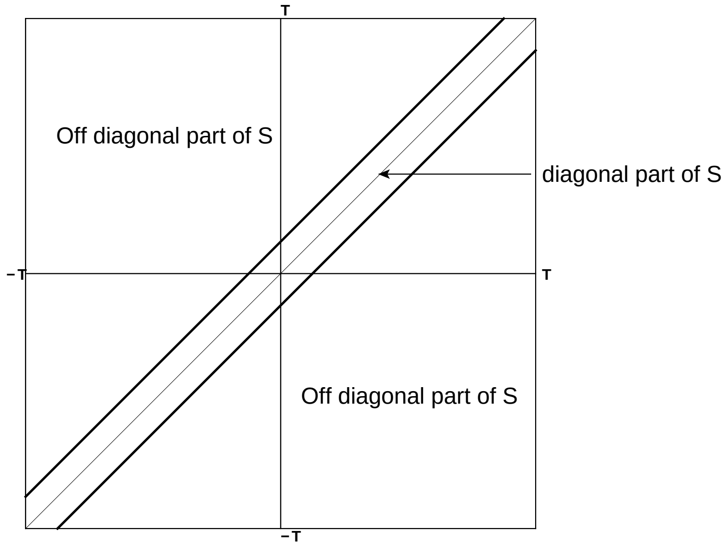

図 3: S_ε の対角成分と非対角成分

確率積分をつかえば解析が困難な項 $S_\varepsilon^{\mathrm{d}}$ を評価できる.

補題 9.5 ε によらない定数 $c>0$ で次をみたすものがある.

$$|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)|\le c|t|^{-1}(t\ne 0),\quad |\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)|\le c|x|^{-1}(|x|\ne 0).$$

さらに $\varrho_0-\varrho_\varepsilon$ に対しても, 定数 $\mathrm{c}_\varepsilon>0$ で次を満たすものがある: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{c}_\varepsilon=0$ つまり

$$\begin{aligned}|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)-\nabla\varrho_0(x,t)|&\le \mathrm{c}_\varepsilon|t|^{-1},\quad t\ne 0,\\ |\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)-\nabla\varrho_0(x,t)|&\le \mathrm{c}_\varepsilon|x|^{-1},\quad |x|\ne 0.\end{aligned}$$

証明: はじめの不等式は

$$|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)|\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2(\omega(k)+|k|^2/2)}e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_\lambda^\perp dk\le c\int_\Lambda^\infty e^{-rt}dr$$

よりわかる. 第二の不等式を証明しよう. 角変数で積分すると

$$\varrho_\varepsilon(x,t)=2\pi\int_\Lambda^\infty\frac{e^{-\varepsilon r^2-r|t|}}{r(2+r)}\frac{\sin(r|x|)}{|x|}dr.$$

その微分は $\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)=\frac{2\pi x}{|x|^2}\int_\Lambda^\infty\frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2-|t|r/|x|}}{r(2|x|+r)}(r\cos r-\sin r)\,dr$ となり, 右辺を評価すると

$$|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)|\le\int_0^1\frac{Cr^3}{r^2}dr+\left|\int_1^\infty\frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2-|t|r/|x|}}{(2|x|+r)}\cos r\,dr\right|+\int_1^\infty\frac{1}{r^2}dr.$$

ここで全ての $r \in [0,1]$ で $|r\cos r - \sin r| \le Cr^3$ をつかった. 真ん中の項の積分は有界なので補題が示せた. $\square$

補題 9.6 $\varepsilon > 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
S_\varepsilon^{\mathrm{d}} &= 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0)ds - 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds \\
&\quad + 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i. \qquad (9.2)
\end{aligned}
$$

証明: $\varrho_\varepsilon(x,t)$ は次の方程式の解である.

$$
\left(\partial_t + \frac{1}{2}\Delta\right)\varrho_\varepsilon(x,t) = -W_\varepsilon(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \ge 0.
$$

i と j を固定する. このとき伊藤の公式[30] から

$$
\begin{aligned}
&\varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) - \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) \\
&= \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i + \int_s^{[s+\tau]_T} \left(\partial_t + \frac{1}{2}\Delta\right)\varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)dt.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\int_s^{[s+\tau]_T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)dt \\
&= \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) - \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) + \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i
\end{aligned}
$$

が従う. これを $S_\varepsilon^{\mathrm{d}}$ に代入すれば主張が示せる. $\square$

(9.2) の右辺第一項の $i=j$ の部分 $= 4NT\varrho_\varepsilon(0,0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を次のように定義することが示唆される.

$$
S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon - 4NT\varrho_\varepsilon(0,0), \quad \varepsilon > 0.
$$

[30] 確率変数を $X_t = X_0 + \int_0^t g(B_s,s)\cdot dB_s + \int_0^t h(B_s,s)ds$ で定義する. これを $dX_t = g\cdot dB_t + hdt$ と表す. $df(X_t,t) = f(X_t,t) - f(X_0,0)$ と書けば $df(X_t,t) = \partial_i f(X_t,t)dX_t^i + \dot f(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j f(X_t,t)dX_t^i dX_t^j$ と形式的に表される. $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij}dt$, $dB_t^i dt = dtdt = 0$ と約束する. そうすると $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij}g^i g^j dt$ になるから $df(X_t,t) = \partial_i f(X_t,t)(g^i dB_t^i + hdt) + \dot f(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j f(X_t,t)\delta_{ij}g_i g_j dt$.

これは $S^{\mathrm{ren}}_\varepsilon=S^{\mathrm{OD}}_\varepsilon+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ のように表せる．ここで

$$\begin{aligned}
X_\varepsilon&=2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B^i_s-B^j_s,0)ds,\\
Y_\varepsilon&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varrho_\varepsilon(B^i_t-B^j_s,t-s)\cdot dB_t,\\
Z_\varepsilon&=-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B^i_{[s+\tau]_T}-B^j_s,[s+\tau]_T-s)ds.
\end{aligned}$$

補題 9.7 ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon|\le c_zT$ と $|S^{\mathrm{OD}}_\varepsilon|\le c_s(T+1)$ がパスと $\varepsilon\ge 0$ に一様に成立する．

証明:

$$|Z_\varepsilon|\le 4\pi N^2\left(\int_{-T}^{T-\tau}ds\int_\Lambda^\infty\frac{e^{-r\tau}}{1+r/2}dr+\int_{T-\tau}^T ds\int_\Lambda^\infty\frac{e^{-r(T-s)}}{1+r/2}dr\right)\le c_zT$$

が適当な $c_z>0$ で成り立つ．不等式 $|S^{\mathrm{OD}}_\varepsilon|\le c_s(T+1)$ も同じようにして得られる． □

補題 9.8 全ての $\alpha>0$, $\varepsilon\ge 0$, $T>0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}^x_W[e^{\alpha|X^T_\varepsilon|}]\le e^{c_X\alpha T}$ を満たす定数 c_X が存在する．

証明:

$$X^T_\varepsilon=\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T ds\frac{2\pi}{|B^i_s-B^j_s|}\int_\lambda^\infty\frac{\sin\sqrt{r|B^i_s-B^j_s|}}{r+r^2/2}e^{-\varepsilon r^2}dr,\quad\varepsilon\ge 0$$

である．仮定 $\lambda>0$ から $a=2\pi\int_\lambda^\infty\frac{1}{r+r^2/2}dr<\infty$. となり，故に $|X^T_\varepsilon|\le a\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\frac{ds}{|B^i_s-B^j_s|}$. $\sum_{i\neq j}^N|x^i-x^j|^{-1}$ が Kato クラスなので補題が従う． □

$\varepsilon>0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分を交換してもいい．よって $Y^T_\varepsilon=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi^i_{\varepsilon,t}dB^i_t$. ここで $\Phi_{\varepsilon,t}=(\Phi^1_{\varepsilon,t},\ldots,\Phi^N_{\varepsilon,t})$ は $\mathbb{R}^{3N}$ に値をとる確率過程で次で与えられる．

$$\Phi^i_{\varepsilon,t}=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t\nabla\varrho_\varepsilon(B^i_t-B^j_s,t-s)ds.$$

Y^T_0 を $Y^T_0=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi^i_{0,t}dB^i_t$ で定義する．

補題 9.9 ある定数 c_Y が存在して，任意の $\alpha>0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}^x_W[e^{\alpha Y^T_\varepsilon}]\le e^{c_Y(\alpha^2T+\alpha)}$ *($\varepsilon\ge 0$). また* $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^x_W[|Y^T_\varepsilon-Y^T_0|^2]=0$ *($x\in\mathbb{R}^{3N}$).*

証明: $\Phi^i_{\varepsilon,t}$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq -T}$ に adapted なマルチンゲールである.

$$\int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt \leq 4\sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \left[\sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t |\nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)| ds\right]^2 dt$$
$$\leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds\right]^2 dt$$

となる. ここで Jensen の不等式, 補題 9.5 と $|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)| \leq c|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$, $\theta\in[0,1]$ を使った. この評価は $\varepsilon\in[0,1]$ に一様である. 適当な $\frac{1}{2}<\theta<1$ に対して, Schwartz の不等式を使えば

$$\int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt \leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds\right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds\right) dt$$
$$\leq 4c^2 \tau^{2\theta-1} N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds\right] dt \leq 4c^2\tau^{2\theta-1} NQ.$$

ここで c は補題 9.5の定数で ε に依らない. また $Q = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt$. Girsanov の定理から

$$\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T}\right]\right)^2 \leq \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t}\cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right]\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha^2\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right]$$
$$= \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha^2\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right] \leq \mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right].$$

ここで $\gamma = 8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen の不等式をもう一度つかって

$$\mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right] \leq \int_{-T}^T \frac{ds}{2T}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right].$$

$[s+\tau]_T \leq s+\tau$ なので

$$\mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right] \leq \int_{-T}^T \frac{ds}{2T}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{s+\tau}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right].$$

条件付き期待値をとってマルコフ性を使えば

$$\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right] = \mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}|\mathscr{F}_s\right]\right]$$
$$= \mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{E}^{B_s}\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i-B_0^j|^{-2\theta}dt}\right]\right].$$

$|x|^{-2\theta}$ は Kato クラスなので

$$\sup_{x,z\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i+z|^{-2\theta}ds}]=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i|^{-2\theta}ds}]\le e^{c\tau\beta}$$

が適当な $c>0$ と全ての $\beta>0$ で成り立つ．これから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\int_{-T}^{T}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right]\le e^{c\alpha^2T}.$$

よって $\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{2\alpha Y_\varepsilon^T}]\le e^{c(\alpha^2T+\alpha)}$ が全ての $\alpha\in\mathbb{R}$ で成り立つ．同様に全ての $0<\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}-\Phi_{0,t}|^2dt&\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2N\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]\left(\int_{[t-\tau]_T}^{t}|t-s|^{-2(1-\theta)}ds\right)dt\\&\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2\tau^{2\theta-1}N\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]dt\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2\tau^{2\theta-1}NQ.\end{aligned}$$

ここで $|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)-\nabla\varphi_0(x,t)|\le\mathrm{c}_\varepsilon|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$, $\theta\in[0,1]$ をつかった．$\mathrm{c}_\varepsilon\to0$ as $\varepsilon\downarrow0$ に注意せよ．Φ_ε の収束は Y_ε^T が Y_0^T に収束することも意味する． □

補題 9.10 全ての $\alpha\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, と $f,h\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\le\|f\|\|h\|e^{c_{\mathrm{ren}}(\alpha^2T+\alpha T+\alpha)}$$

を満たす定数 c_{ren} が存在する．

証明: 分解 $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}=S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ と Schwartz の不等式から

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[|f(B_{-T})h(B_T)|e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&\le\|f\|\|h\|\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{-2\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}+X_\varepsilon^T+Y_\varepsilon^T+Z_\varepsilon^T)}\right]\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

補題 9.7, 9.8, 9.9 と V が Kato クラスという事実から定数 c_{ren} で

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_W^x\left[e^{-2\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}+X_\varepsilon^T+Y_\varepsilon^T+Z_\varepsilon^T)}\right]\le e^{2c_{\mathrm{ren}}(\alpha^2T+\alpha T+\alpha)},$$

となるものが存在する． □

9.3 Hamiltonian

補題 9.11 $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}_W\left[|e^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha U_0^T(x)}|\right]=0,\quad x\in\mathbb{R}^{3N},\quad U=\mathrm{OD},X,Y,Z. \tag{9.3}$$

証明: $U=X$ としよう. $V_C(x)=C\sum_{i\neq j}^N \frac{1}{|x^i-x^j|}$ とする. このとき

$$|X_\varepsilon^T(x)|\le \int_{-T}^T V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds$$

と

$$\mathbb{E}_W\left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)}|\right]\le 2\mathbb{E}_W\left[|e^{\alpha\int_{-T}^T V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds}\right]<\infty$$

がわかる. x ごとに $X_\varepsilon^T(x)\to X_0^T(x)$ a.s. なのでルベーグの優収束定理より (9.3) がわかる.

$U=Y$ としよう. $\mathbb{E}_W^x\left[|e^{\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}-1|\right]\to 0$ を示せば十分. $\mathbb{E}_W^x\left[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}-1\right)^2\right]=\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}\right]+1-2\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}\right]$ だから $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}_W^x[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}]=1$ を示す. 確率変数 $\delta\Phi_t=\Phi_{\varepsilon,t}-\Phi_{0,t}$ を $Y_\varepsilon^T-Y_0^T=\int_{-T}^T\delta\Phi_t\cdot dB_t$ となるように定義する. Girsanov の定理から

$$1=\mathbb{E}_W^x[e^{\alpha\int_{-T}^T\delta\Phi_t\cdot dB_t-\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}]. \tag{9.4}$$

故に

$$\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T-Y_0^T)}\right]-1\right)^2\le\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^T\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\mathbb{E}_W^x\left[\left(1-e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]. \tag{9.5}$$

(9.4) から

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^T\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{4\alpha^2\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2} \tag{9.6}$$

また

$$\mathbb{E}_W^x\left[\left(1-e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]\le\mathbb{E}_W^x\left[\left|\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt\right|^2\right]\to 0 \tag{9.7}$$

$(\varepsilon\downarrow 0)$. (9.7) は補題 9.9で示されている. (9.6) の右辺は ε に一様に有界. 故に (9.5) の右辺はゼロに収束することがわかる.

$U=Z$ としよう. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x\left[|e^{\alpha(Z_\varepsilon-Z_0)}-1|\right]\to 0$ を示せばいい.

$$\begin{aligned}&Z_\varepsilon(x)-Z_0(x)\\&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^Tds\int_{\mathbb{R}^3}\left(e^{-ik\cdot(B^i_{[s+\tau]_T-s}+x^i-B^j_{[s+\tau]_T-s}-x^j)}e^{-([s+\tau]_T-s)\omega(k)}\right)\frac{\beta(k)}{\omega(k)}\mathbb{1}_\lambda^\perp(1-e^{-\varepsilon|k|^2})dk\end{aligned}$$

がわかる．$\eta_\varepsilon(x)=\alpha(Z_\varepsilon(x)-Z_0(x))$ としよう．直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n\leq c^n\alpha^nT^n\varepsilon^n$ が x に依らない適当な定数 c で成り立つことがわかる．よって $\mathbb{E}_W[e^{\eta_\varepsilon(x)}]=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}_W[\eta_\varepsilon(x)^n]$．そして

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}_W[|\eta_\varepsilon(x)|^n]\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}c^nT^n\varepsilon^n\to 0$$

$(\varepsilon\downarrow 0)$ が x に一様に成り立つ．よって $U=Z$ のとき成り立つ．$U=S^{\mathrm{OD}}$ のときも同様にわかる． □

補題 9.12 $\alpha\in\mathbb{R}$, $f,h\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう．このとき

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}].$$

証明: $S_\varepsilon=S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}+X_\varepsilon^T+Y_\varepsilon^T+Z_\varepsilon^T$ と telescoping によって

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\left(e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}-e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}\right)\right]\right|\\&\leq e^{2T\|V\|_\infty}\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx|f(x)|\left(\mathbb{E}_W^x\left[|h(B_T)|^2\right]\right)^{1/2}E_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

ここで $E_\varepsilon(x)=\left(\mathbb{E}_W^x\left[\left(e^{\alpha S_\varepsilon}-e^{\alpha S_0}\right)^2\right]\right)^{1/2}$．また $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}E_\varepsilon(x)<\infty$ かつ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\varepsilon(x)=0$ $(x\in\mathbb{R}^{3N})$ なのでルベーグの収束定理より補題が従う． □

補題 9.13 次が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes\mathbb{1},e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right].\tag{9.8}$$

ここで

$$\begin{aligned}S_0^{\mathrm{ren}}=&\,2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_s^i-B_s^j,0)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{-T}^t\nabla\varrho_0(B_t^i-B_s^j,t-s)ds\right)\cdot dB_t\\&-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_T^i-B_s^j,T-s)ds.\end{aligned}\tag{9.9}$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$\begin{aligned}\varrho_0(X,t)&=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk,\\\nabla\varrho_0(X,t)&=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{-ike^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk.\end{aligned}$$

証明: Feynman−Kac 型汎関数積分表示より

$$(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\rm ren}}\right]dx$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\rm ren}}]dx$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に収束する. よって (9.8) がわかる. また

$$\begin{aligned}S_0^{\rm ren}&=2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_s^i-B_s^j,0)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{[t+\tau]_T}^t\nabla\varrho_0(B_t^i-B_s^j,t-s)ds\right)\cdot dB_t\\&\quad-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B^i_{[s+\tau]_T}-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds\end{aligned}$$

なので $\tau=T$ とすれば (9.9) がわかる. □

さて $f\otimes 1\!\!1$ からもっと一般的なベクトル $f\otimes F(\phi(f_1),\ldots,\phi(f_n))1\!\!1$ へ拡張する. ここで $F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

補題 9.14 $\rho_j\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d),j=1,2,\ f,h\in L^2(\mathbb{R}^{3N}),\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)}1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes e^{\beta\phi(\rho_2)}1\!\!1)\\&=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\rm ren}+\frac14\xi}\right].\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\xi=\xi(g)&=\bar\alpha^2\|\rho_1/\sqrt{\omega}\|^2+\beta^2\|\rho_2/\sqrt{\omega}\|^2+2\bar\alpha\beta(\rho_1/\sqrt{\omega},e^{-2T\omega}\rho_2/\sqrt{\omega})\\&\quad+2\bar\alpha g\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{\widehat{\rho}_1(k)}{\sqrt{\omega(k)}}1\!\!1_\lambda^\perp e^{-|s-T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}\\&\quad+2\beta g\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{\widehat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}}1\!\!1_\lambda^\perp e^{-|s+T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}.\end{aligned}$$

証明: Feynman−Kac 型汎関数積分表示から

$$\begin{aligned}&(f\otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)}1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes e^{\beta\phi(\rho_2)}1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}_W^x\Big[\bar f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\\&\times\mathbb{E}_{\mu_E}[e^{\bar\alpha\phi_E(\tau_{-T}\rho_1)}e^{\beta\phi_E(\tau_T\rho_2)}e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T\tau_s\tilde\varphi_\varepsilon(\cdot-B_s^j)ds)}]\Big]e^{-2Tg^2N\varrho_\varepsilon(0,0)}.\end{aligned}$$

すぐに

$$\mathbb{E}_{\mu_E}\left[e^{\bar\alpha\phi_E(\tau_{-T}\rho_1)}e^{\beta\phi_E(\tau_T\rho_2)}e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T\tau_s\tilde\varphi_\varepsilon(\cdot-B_s^j)ds)}\right]e^{-2Tg^2N\varrho_\varepsilon(0,0)}=e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\rm ren}+\frac14\xi_\varepsilon}.$$

ここで ξ_ε は ξ で $\mathbb{1}_\lambda^\perp$ を $\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ に置換えたもである．よって

$$(f\otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)}\mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes e^{\beta\phi(\rho_2)}\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}+\frac{1}{4}\xi_\varepsilon}\right].$$

適当な定数 C が存在して $\xi_\varepsilon \le C$ がパスと $\varepsilon \ge 0$ に一様に成り立つ．その結果, 補題 9.13と同様にしてこの補題も証明できる． □

稠密な部分空間 $\mathcal{D}\subset\mathscr{H}$ を次で定義しよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \mathrm{L.H.}&\{f\otimes\mathbb{1}\,|\,f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}\cup\\ &\left\{f\otimes F(\phi(f_1),\ldots,\phi(f_n))\mathbb{1}\,|\,F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), f_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1\le j\le n, n\in\mathbb{N}, f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})\right\}.\end{aligned}$$

補題 9.14 から次の結果が即座に従う．

補題 9.15 $\Phi = f\otimes F(\phi(u_1),\ldots,\phi(u_n))\mathbb{1}$, $\Psi = h\otimes G(\phi(v_1),\ldots,\phi(v_m))\mathbb{1}\in\mathcal{D}$ としよう．このとき

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}\Psi) &= (2\pi)^{-(n+m)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1dK_2\overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2)\\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}+\frac{1}{4}\xi(K_1,K_2)}\right].\end{aligned}$$

ここで $u=(u_1,...,u_n)$, $v=(v_1,...,v_m)$ として

$$\begin{aligned}\xi(K_1,K_2) = &-\|K_1\cdot u/\sqrt{\omega}\|^2 - \|K_2\cdot v/\sqrt{\omega}\|^2 - 2(K_1\cdot u/\sqrt{\omega}, e^{-2T\omega}K_2\cdot v/\sqrt{\omega})\\ &-2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3} dk\frac{K_1\cdot\widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s-T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}\\ &+2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3} dk\frac{K_2\cdot\widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s+T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}.\end{aligned}$$

証明: $F(\phi(f_1),\ldots,\phi(f_n))\mathbb{1} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{F}(K)e^{i\phi(K\cdot f)}\mathbb{1}dK$ に気をつければ

$$\begin{aligned}&(\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}\Psi)\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}}\int_{\mathbb{R}^{m+n}} dK_1dK_2\overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2)(f\otimes e^{-i\phi(K_1\cdot f)}\mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes e^{-i\phi(K_2\cdot h)}\mathbb{1}).\end{aligned}$$

よって主張は補題 9.14から従う． □

Nelson Hamiltonian の紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_\varepsilon - g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある．

補題 9.16 (**下からの一様有界性**) 定数 $C\in\mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ.

証明:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_W\left[e^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\\&\leq\left(\mathbb{E}_W\left[e^{4S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)}\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}_W\left[e^{8X_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/4}\left(\mathbb{E}_W\left[e^{16Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/8}\left(\mathbb{E}_W\left[e^{32Z_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/16}\end{aligned}$$

がわかるので, 定数 a_5 と b_5 が存在して

$$\left(\mathbb{E}_W\left[e^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}\leq a_5e^{b_5T}\tag{9.10}$$

が全ての $T>0$ で成立する. 関数 $W_{har}(x^1,...,x^N)=\sum_{j=1}^N|x^j|^2$ を考えよう. H_ε で V を δW_{har} に置換えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta\geq 0$. そうすれば $H_\varepsilon(\delta)$ $(\delta>0)$ は一意的な基底状態 $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)$ をもつことは既に示した. $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)>0$ であり, 特に $(f\otimes 1\!\!1,\Psi_{\mathrm{g}}(\delta))\neq 0$ が任意の $0\leq f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f\not\equiv 0$. その結果

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)\right)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log(f\otimes 1\!\!1,e^{-T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1)\tag{9.11}$$

が $0\leq f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. (9.10) から

$$\begin{aligned}&(f\otimes 1\!\!1,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})f(B_T)e^{-\int_{-T}^T\delta W_{har}(B_s)ds}e^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&\leq\|f\|^2\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W\left(\left[e^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}\leq\|f\|^2a_5e^{b_5T}.\end{aligned}$$

これは (9.11) から

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)\right)+\frac{b_5}{2}\geq 0,\quad\delta>0,\tag{9.12}$$

を意味する. 大事なことは b_5 が δ に依っていないことである. よって

$$|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)|\leq\|F\|\|G\|e^{b_5T}$$

が従う. $F,G\in\mathscr{H}$ としよう. Feynman−Kac 型汎関数積分表示から

$$(F,e^{-2TH_\varepsilon(\delta)}G)=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[e^{-\int_{-T}^T\delta W_{har}(B_s)ds}(\mathrm{I}_{-T}F(B_{-T}),e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-T}^T\sum_{j=1}^N\tilde\varphi_s(\cdot-B_s^j)ds)}\mathrm{I}_TG(B_T))\right].$$

ルベーグ優収束定理から $\lim_{\delta\downarrow 0}(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)=(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)$ なので

$$|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)|\leq\|F\|\|G\|e^{b_5T}.$$

これは (9.12) が $\delta=0$ でも従うことをいっている. $H_\varepsilon=H_\varepsilon(0)+V$ かつ V は有界なので

$$\inf\sigma(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))+\frac{b_5}{2}+\|V\|_\infty\geq 0.$$

$C=-\frac{b_5}{2}-\|V\|_\infty$ とおけば系が従う. □

定理 *9.1* **の証明**:

$F,G\in\mathscr{H}$,$C_\varepsilon(F,G)=(F,e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)$ としよう. 補題 9.14 によって $F,G\in\mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon\downarrow 0$ で収束することがわかる. 一様な不等式

$$\|e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}\|<e^{-tC}$$

と $\mathcal{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる.

$$C_0(F,G)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}C_\varepsilon(F,G)$$

とする. そうすれば $|C_0(F,G)|\leq e^{-tC}\|F\|\|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で

$$C_0(F,G)=(F,T_tG),\quad F,G\in\mathscr{H}$$

となるものが存在する. よって $\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}=T_t$. さらに

$$\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}e^{-s(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}=\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-(t+s)(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}=T_{t+s}.$$

左辺 は T_tT_s なので T_t の半群性が従う. $e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称. また Feynman−Kac 型汎関数積分表示から (F,T_tG) は $t=0$ で $F,G\in\mathcal{D}$ に対して連続になることもわかる. $\mathcal{D}$ は $\mathscr{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t=0$ で強連続になる. 故に下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t=e^{-tH_{\mathrm{ren}}}$, $t\geq 0$, となるものが存在することがわかる. $E_\varepsilon=-g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了. □

系 9.17 H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}$ である.

証明: 補題 9.13 によって

$$(f\otimes\mathbb{1},e^{-2TH_{\mathrm{ren}}}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right].$$

よって系が示される. □

9.4 弱結合極限における実行ポテンシャル

ここではカットオフ関数を $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ とする．そして dispersion relation は $\omega_\nu(k) = \sqrt{|k|^2+\nu^2}$ とする．ここで $\nu > 0$ である．H_ε をスケーリングする．生成消滅作用素を κa と κa^* とする．このとき H_ε は

$$H_\varepsilon(\kappa) = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \kappa^2 \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + \kappa H_{\mathrm{I}}$$

となる．このスケーリングは変換 $\omega \mapsto \kappa^2\omega$, $\hat{\varphi} \mapsto \kappa^2\hat{\varphi}$ を導きだす．一方エネルギーくりこみ項は

$$E_\varepsilon(\kappa) = -g^2 N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3\omega_\nu(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega_\nu(k) + |k|^2/2} dk$$

のようにスケーリングされる．定理 9.1 から自己共役作用素 $H_{\mathrm{ren}}(\kappa)$ で

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes\mathbb{1}, e^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))} h\otimes\mathbb{1}) = (f\otimes\mathbb{1}, e^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)} h\otimes\mathbb{1})$$

となるものがある．次の命題は [Ara90, Dav79, Hir99] で示されている．

命題 9.18 $\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\kappa\to\infty} e^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))} = e^{-th_{\mathrm{eff}}} \otimes P_0$．ここで P_0 は $\{z\mathbb{1} \,|\, z\in\mathbb{C}\} \subset \mathscr{F}$ への射影で, 実行 *Hamiltonian* は

$$h_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V(x^1,...,x^N) - \frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{e^{-\nu|x_i-x_j|}}{|x_i-x_j|}.$$

くりこまれた Hamiltonian $H_{\mathrm{ren}}(\kappa)$ のスケーリングを考える．定理 9.1 から次の補題が従う．

補題 9.19 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ のとき $\lim_{\kappa\to\infty}(f\otimes\mathbb{1}, e^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)} h\otimes\mathbb{1}) = (f, e^{-th_{\mathrm{eff}}} h)$.

証明: 補題 9.14 から

$$(f\otimes\mathbb{1}, e^{-2TH_{\mathrm{ren}}(\kappa)} h\otimes\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds} e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa)}\right].$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa) &= 2\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_s^i - B_s^j, 0, \kappa) ds + 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^T \nabla\varrho_0(B_t - B_s, t-s, \kappa)\cdot dB_t \\ &\quad - 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_T - B_s, T-s, \kappa) ds. \end{aligned}$$

そして

$$\varrho_0(x,t,\kappa)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ik\cdot x}e^{-\kappa^2\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega(k)+|k|^2/2}\mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

特に $t=0$ のとき $g^2\sum_{i\neq j}^N\varrho_0(x^i-x^j,0,\kappa)ds \to \dfrac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\dfrac{e^{-\nu|x^i-x^j|}}{|x^i-x^j|}$, また $t\neq 0$ のとき, $|\nabla\varrho_0(X,t,\kappa)|\to 0$ と $|(X,t,\kappa)|\to 0$ $(\kappa\to\infty)$ が各点ごとに示せる. 補題 9.13と同様にして

$$\begin{aligned}&\lim_{\kappa\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa)}\right]\\&=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}e^{\frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\int_{-T}^T\frac{e^{-\nu|B_s^i-B_s^j|}}{|B_s^i-B_s^j|}ds}\right].\end{aligned}$$

□

系 9.20 (**弱結合極限**)$F,G\in\mathscr{D}$ のとき $\lim_{\kappa\to\infty}(F,e^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}G)=(F,e^{-th_{\mathrm{eff}}}\otimes P_0G)$.

証明: これは補題 9.14 と補題 9.19から従う. □

9.5 参考文献など

この章の証明は Gubinelli-Hiroshima-Lőrinczi [GHL13] による. [Nel64a] の証明は次章に「おまけ」として紹介しておく. この証明の最大の難関は $H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ が一様な下からの有界性を示すことであった. この部分が証明できなくて 2 年以上, 論文を寝かせてしまった. Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS12a] は Lorentz 多様体上に定義された Nelson Hamiltonian の UV くりこみを示した.

H_{ren} の基底状態の存在は [HHS05] にある. ここではさらに赤外正則条件も仮定しておらず, 非 Fock 表現をとっている. 散乱理論は Z. Ammari [Amm00] で研究されている.

切断関数を $\mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ として Λ を UV パラメターとみなす. 「おまけ」の後半でも言及したが, くりこみ項は発散のオーダーが Nelson Hamiltonian の実行質量 $m_{\mathrm{eff}}=\sum_{j=0}^\infty a_j(\Lambda)g^{2j}$ の第１項 $a_1(\Lambda)$ と同じである. 筆者は $a_j(\Lambda)$, $j\geq 2$, の項が $\Lambda\to\infty$ で有界であると予想している. そして, この事実が Nelson Hamiltonian の場合, くりこみ項を引去るだけで, UV くりこみ可能である理由と感じている.

Pauli-Fierz 模型の場合は実行質量 m_{eff} がもう少し複雑になっていて, $a_2(\Lambda)$ の予想は $(\log\Lambda)^2$ 発散であったが, 予想に反して $\sqrt{\Lambda}$ のオーダーでの発散だった. これは Hiroshoma-Spohn [HS05], Hiroshima-Ito[HI07] による. 筆者の知る限り未だに Pauli-Fierz 模型の UV はくりこまれていない.

9.6 E. Nelson による作用素論的なくりこみ (おまけ)

[Nel64a] で示されたくりこみ理論を紹介する. スカラー場を

$$\phi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega}} + a(k) e^{ikx} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega}} \right) dk$$

とし, その運動量作用素を

$$\pi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする. このとき次の交換関係が従う.

$$\begin{aligned}
&[\phi_{\hat{\varphi}}(x), \pi_{\hat{\lambda}}(y)] = i \int e^{ik(y-x)} \hat{\varphi}(-k) \hat{\lambda}(k) dk, \\
&[H_{\rm f}, \phi_{\hat{\varphi}}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(k) \right) dk = -i \pi_{\hat{\varphi}}(x), \\
&[H_{\rm f}, \pi_{\hat{\varphi}}(x)] = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \omega \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \omega \hat{\varphi}(k) \right) dk = i \phi_{\omega^2 \hat{\varphi}}(x).
\end{aligned}$$

$V = 0$ として Nelson Hamiltonian $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_j^2 + H_{\rm f} + \sum_{j=1}^N \phi(x_j)$ の Gross 変換を考えよう.

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^N \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする. ここで $\beta(k) = \frac{1}{\omega + |k|^2/2} \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ [31]. このとき $e^{-i\pi} P_j e^{i\pi} = P_j + A_j + A_j^*$. ここで

$$A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(k) dk. \tag{9.13}$$

さらに $(P_j + A_j + A_j^*)^2$ を展開すると

$$(P_j + A_j + A_j^*)^2 = P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + [P_j, A_j^*] + [A_j, P_j] + [A_j, A_j^*].$$

ここに現れた交換子を計算すると

$$\begin{aligned}
[P_j, A_j^*] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \\
[A_j, P_j] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \\
[A_j, A_j^*] &= \frac{1}{2} \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk
\end{aligned}$$

[31] ここでは [Nel64a] にならって β をこのように定義する.

となる．次に

$$e^{-i\pi}\left(\sum_{j=1}^N \phi(x_j)\right)e^{i\pi} = \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \sum_{i,j}^N [\phi(x_i), \pi(x_j)]$$
$$= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) - \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_j-x_i)} \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk.$$

さらに

$$\begin{aligned} e^{-i\pi}H_{\mathrm{f}}e^{i\pi} &= H_{\mathrm{f}} + [H_{\mathrm{f}}, i\pi] + \frac{1}{2}[[H_{\mathrm{f}}, i\pi], i\pi] \\ &= H_{\mathrm{f}} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k)e^{-ikx_j}\omega\beta(k)\hat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}\omega\beta(k)\hat{\varphi}(k)\right) dk \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}^N \int \omega\beta^2(k)e^{ik(x_j-x_i)}\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk. \end{aligned}$$

全て合わせると

$$e^{-i\pi}He^{i\pi} = P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} + \sum_j \phi(x_j) + H_{\mathrm{f}}$$
$$- \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int (a^*(k)e^{-ikx_j}\hat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}\hat{\varphi}(k))\omega\beta(k)dk \tag{9.14}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_j \int \left(a^*(k)e^{-ikx_j}k^2\beta(k)\hat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}k^2\beta(k)\hat{\varphi}(-k)\right) dk \tag{9.15}$$
$$- \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i-x_j)} \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \tag{9.16}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i-x_j)}\omega\beta^2(k)\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \tag{9.17}$$
$$+ \frac{1}{4}N \int |k|^2\beta^2(k)\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \tag{9.18}$$

となる．β の定義より (9.14) + (9.15) + $\sum_j \phi(x_j) = 0$ がわかる．また (9.16) – (9.18) の対角成分を足し合わせると

$$\begin{aligned} &- N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk + \frac{1}{2}N\int \omega\beta^2(k)\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk + N\frac{1}{4}\int |k|^2\beta^2(k)\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \\ &= -\frac{1}{2}N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk. \end{aligned}$$

よって

$$e^{-i\pi}He^{i\pi} = P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} + H_\mathrm{f} \tag{9.19}$$

$$- \sum_{i\neq j}\int e^{ik(x_i-x_j)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\omega}} + \omega\beta^2(k)\right)\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \tag{9.20}$$

$$- \frac{1}{2}N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\hat{\varphi}(-k)\hat{\varphi}(k)dk \tag{9.21}$$

をえる. (9.19) は 2 次形式の項, (9.20) は実行ポテンシャル項, そして (9.21) はくりこまれる項である. [Nel64a] では, $\hat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ として, $\Lambda \to \infty$ の極限で, この右辺から (9.21) を引き去ったものが 2 次形式の意味で, 一様に収束すること, および $e^{i\pi(x)}$ が強収束することを示している.

Gross 変換した Hamiltonian H_G の実行質量[32]を求めてみよう. 粒子数を 1 とし, その裸の質量を m, 場と粒子の結合定数を $g \in \mathbb{R}$ とおく. そうすると外場ポテンシャルを $V = 0$ とおいた Nelson Hamiltonian は $H = -\frac{1}{2m}\Delta + H_\mathrm{f} + g\phi(x)$ となる. これを Gross 変換したものを H_G と書くことにする. 形式的な計算をする. $V = 0$ なので H_G は並行移動不変 (i.e., $[-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{f,j}, H_G] = 0$) となり, H_G を全運動量 $-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{f,j}$ のスペクトルで分解できる. その結果 $H_G = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_G(P)dP$ となる. ここで $H_G(P)$ は Fock 空間上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_G(P) = \frac{1}{2m}(P-P_f)^2 + H_\mathrm{f} + \frac{g}{m}((P-P_f)A + A^*(P-P_f)) + \frac{g^2}{2}\frac{1}{m}(A^2 + 2A^*A + A^*A^*).$$

また $P_{f,j} = \int k_j a^*(k)a(k)dk$ は場の運動量作用素である. $H_G(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ を

$$E(P) = E(0) + \frac{1}{2m_\mathrm{eff}}|P|^2 + O(|P|^3)$$

と展開して $|P|^2$ の係数の逆数を実行質量 m_eff と定義する. これを形式的に結合定数 g で展開しよう. $H_G(P)\Phi(P) = E(P)\Phi(P)$ の両辺を形式的に $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ で 2 回微分して, 公式

$$\frac{m}{m_\mathrm{eff}} = 1 - \frac{2}{3m}\frac{((P_f - g(A+A^*))\Phi(0), (H_G(0)-E(0))^{-1}(P_f - g(A+A^*))\Phi(0))}{(\Phi(0), \Phi(0))}$$

をえる. 摂動理論から g が十分小さければ

$$\frac{m_\mathrm{eff}}{m} = 1 + \frac{2}{3m}g^2(P_fA^*\Omega, \frac{1}{H_0}P_fA^*\Omega) + O(|g|^3)$$

となる. ここで $H_0 = \frac{1}{2m}P_f^2 + H_\mathrm{f}$ である. よって

$$m_\mathrm{eff} = m + g^2\frac{2}{3}\int \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega}\frac{|k|^2}{(|k|^2/2m+\omega)^3}dk + O(|g|^3)$$

となり, 紫外切断を外すとき, m_eff の g^2 の係数が収束することがわかる.

[32]effective mass

10　その他の模型

Feynman−Kac 型汎関数積分表示を使って, 解析ができる模型の例を挙げる. 下から有界な模型の Hamiltonian が生成する熱半群は殆どFeynman−Kac 型汎関数積分表示することが出来る. キーとなるアイデアはスピンを含む模型であればポアソン過程 $(N_t)_{t\geq 0}$, 非局所的な作用素[33] を含む模型であれば subordinator[34] $(T_t)_{t\geq 0}$ を適当に組み合わせて, それぞれのマルコフ性を使えばFeynman−Kac 型汎関数積分表示を得ることが出来る.

10.1　スピン・ボゾン模型

σ_x, σ_y, σ_z は 2×2 パウリ行列を表すとしよう:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hilbert 空間 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}$ を考えよう. スピン・ボゾン Hamiltonian は

$$\varepsilon\sigma_z \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + \alpha\sigma_x \otimes \phi(\hat{h})$$

で定義される $\mathscr{H}$ 上の作用素である. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数, $\varepsilon \geq 0$ は 2 レベル原子のスペクトルギャップを表すパラメターである. Feynman−Kac 型汎関数積分表示をつかって [Spo89, HHL12] で調べられている. また, 基底状態の研究として [Hiro99, Abd11, HH11] などがある. 筆者の知る限り, $\hat{h}/\omega \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ のときの基底状態の非存在は示されていないと思われる.

10.2　Nelson 模型

10.2.1　準相対論的 Nelson 模型

この模型の Hamiltonian は

$$(\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

で定義される. Nelson 模型で H を $\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$ に置換えて定義される. この場合の Feynman−Kac 型汎関数積分表示はNelson Hamiltonian のそれと全く同様に構成することが

[33] 例えば $\sqrt{-\Delta + m^2} - m$ のような作用素.

[34] 1 次元の Lévy 過程でパスが単調増加するもの. そのラプラス変換は $\mathbb{E}[e^{-uT_t}] = e^{-t\psi(u)}$ となる. ここで $\psi(u)$ は Berbstein 関数.

できる．ただし, ブラウン運動が Lévy 過程に変わる．さらにもっと一般化して Ψ を Bernstein 関数として

$$\Psi(-\Delta) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

を定義しても, Nelson Hamiltonian と同じ解析が出来ると思われる．ここで, Ψ が Bernstein 関数とは $\Psi \in C^\infty((0,\infty)$ で $(-1)^n \frac{d^n\Psi(u)}{dx^n} \leq 0$, $n \geq 1$, となる関数．例として $\Psi(u) = u^{\alpha/2}$ $(0 < \alpha < 2)$, $\Psi(u) = \sqrt{u+m^2} - m$ $(m \geq 0)$, $\Psi(u) = 1 - e^{-\beta u}$ $(\beta > 0)$ など.

10.2.2 多様体上の Nelson 模型

Static Lorentz 多様体上に Nelson Hamiltonian が定義できる．H_{p} は

$$-\sum_{\mu,\nu=1}^{3} \frac{1}{c(x)} \partial_\mu A_{\mu\nu}(x) \partial_\nu \frac{1}{c(x)} + V$$

に置換えられ, dispersion relation は位置表示で $\omega = \sqrt{-\Delta}$ から

$$\omega = \left(-\sum_{\mu,\nu=1}^{3} \partial_\mu a_{\mu\nu}(x) \partial_\nu + m^2(x) \right)^{1/2}$$

に置換えて定義される．重要なことは変数質量が $m(x)$ が自然に現れることである．この作用素のスペクトルなどは [GHPS09, GHPS11, GHPS12a, GHPS12b] で調べられている．$v_m = m^2$ の decay の速さで基底状態の存在・非存在を特徴づけることが出来る．実際 $m(x) \geq C\langle x \rangle^{-1}$ のとき基底状態が存在し, $m(x) \leq C\langle x \rangle^{-a}$, $a > 1$, のとき基底状態は存在しないことが示されている．つまりゆっくり減衰すれば基底状態が存在し, 十分速く減衰すれば基底状態が存在することになる．その臨海のオーダーが $|x|^{-1}$ である．一般の正質量を定数関数と見なす (図 4)．このとき, 定数正質量はゆっくり減衰する変数質量 (図 5) の特別な場合と見なすこと

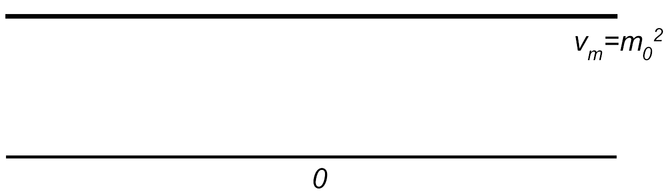

図 4: 定数正質量

ができる．また, 急激に減衰する変数質量 (図 6) は図 4 で $v_m = 0$(massless) の特別なものと見なせる.

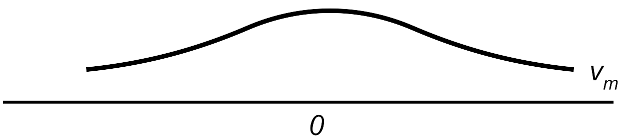

図 5: ゆっくり減衰する質量

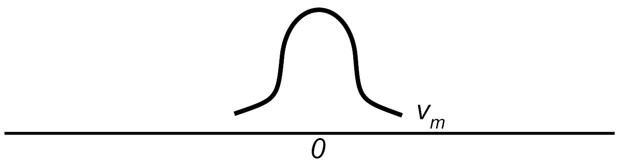

図 6: 急激に減衰する質量

10.3 Pauli-Fierz 模型

10.3.1 スピンがない場合

Pauli-Fierz 模型は非相対論的量子電磁力学という中途半端な名前のついた模型で, Pauli-Fierz [PF38] が toy model として導入した模型である．それは $H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$ に量子化された電磁場

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1,2} \int e_\mu(k,j) \left(a^*(k) e^{-ikx} \hat{\varphi}(-k)/\sqrt{\omega(k)} + a(k) e^{ikx} \hat{\varphi}(k)/\sqrt{\omega(k)} \right) dk$$

がミニマル結合した模型である。

$$\frac{1}{2m} \left(p \otimes \mathbb{1} - \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} A(x) dx \right)^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$$

この汎関数積分に依る解析は例えば [FFG97, Hir97, Hir00a, Hir00b, Hir02, MS12] などがある．また [Spo04] には無限次元 OU 過程をもちいた解説がある.

10.3.2 スピンがある場合

スピンを含む場合は Pauli 行列で

$$\frac{1}{2m} \left(\sigma \cdot \left(p \otimes \mathbb{1} - \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} A(x) dx \right) \right)^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$$

と定義される．この Hamiltonian の基底状態は対称性から 2 重に縮退していることが [HS01, Hir05a] で示されている．この汎関数積分表示は [HL08] で与えられている.

10.3.3 $V=0$ の場合

$V=0$ の場合 Pauli-Fierz 模型は平行移動不変になる．全運動量 $P\in\mathbb{R}^d$ の Hamiltonian は Fock 空間上に

$$\frac{1}{2m}\left(P-P_{\mathrm{f}}-A(0)\right)^2+H_{\mathrm{f}}$$

で定義される．この汎関数積分表示は [Hir07] で与えられている．

10.4 準相対論的 Pauli-Fierz 模型

10.4.1 スピンがない場合

準相対論的 Pauli-Fierz 模型は相対論的な模型 $(\sqrt{p^2+m^2}-m+V)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$ に電磁場をミニマル結合して定義される．

$$\sqrt{\left(p\otimes\mathbb{1}-\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}A(x)dx\right)^2+m^2}-m+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$$

この模型も汎関数積分表示を用いて, [Hir13] で (1) 本質的自己共役性, (2) 固有ベクトルのガウス domination, (3) 付随するギブス測度の存在, (4) 固有ベクトルの指数および多項式減衰性が示されている．$m=0$ のときは

$$\left|p\otimes\mathbb{1}-\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}A(x)dx\right|+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$$

と表せる．この基底状態の存在が [HH13a, HH13b] で調べられている．

10.4.2 スピンがある場合

$$\sqrt{\left(\sigma\cdot\left(p\otimes\mathbb{1}-\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}A(x)dx\right)\right)^2+m^2}-m+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$$

この汎関数積分表示もスピンのない場合と同様に構成できて, 解析可能である．基底状態の存在が [KMS11] で調べられている．

謝辞:
今回, 2013 年度数理物理サマースクールの講師として発表の機会を与えて下さった, オーガナイザーの方々に心より感謝申し上げます．

参考文献

[Abd11] A.Abdesselam, The ground state energy of the massless spin-boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 1321–1347.

[Amm00] Z. Ammari, Asymptotic completeness for a renormalized nonrelativistic Hamiltonian in quantum field theory: the Nelson model, *Math. Phys. Anal. Geom.* **3** (2000), 217–285.

[Ara83a] A. Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Phys. A* **16** (1983), 49–69.

[Ara83b] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 1896–1910.

[Ara88] 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.

[Ara90] A. Arai, An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 2653–2663.

[Ara01] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.

[AH97] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455–503.

[AHH99] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff *J. Funct. Anal.* **168** (1999), 470–497.

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[BFS99] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[BH09] V. Betz and F. Hiroshima, Gibbs measures with double stochastic integrals on path space, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **12** (2009), 135–152.

[BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of the Nelson Hamiltonian-A Gibbs measure-based approach *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173-198.

[Car78] R. Carmona. Pointwise bounds for Schrödinger eigenstates, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978), 97–106.

[CMS90] R. Carmona, W. C. Masters, and B. Simon, Relativistic Schrödinger operators: asymptotic behavior of the eigenfunctions, *J. Funct. Anal.* **91**(1990), 117–142.

[CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger Operators. With Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer, 1987.

[Dav79] E. B. Davies, Particle-boson interactions and weak coupling limit, *J. Math. Phys.*, 20:345–351, 1979.

[DG04] J. Dereziński and C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **5** (2004), 523–578.

[FFG97] C. Fefferman, J. Fröhlich, and G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997), 309–330.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. H. Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GHPS09] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki, Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo Riemannian manifold, *Interdisciplinary Information Sciences* **15** (2009), 399–421.

[GHPS11] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, *Commun. Math. Phys.* **308** (2011), 543–566.

[GHPS12a] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett Math Phys*, **101** (2012), 305–322.

[GHPS12b] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 273–299.

[GJ68] J. Glimm and A. Jaffe, A $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. I, *Phys. Rev.* **176** (1968), 1945–1951.

[GJ81] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer, 1981.

[GLL01] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[Gro73] L. Gross. The relativistic polaron without cutoffs, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 25–73.

[GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet Renormalization of the Nelson Hamiltonian through Functional Integration, preprint 2013.

[HH11] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 621–677.

[Hiro99] M. Hirokawa. An expression of the ground state energy of the spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **162** (1999),178–218.

[Hir03] M. Hirokawa. Infrared catastrophe for Nelson's model, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2003), 897–922.

[HHL12] M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, preprint 2012.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particle interacting through a massless scalar Bose field, *Advances in Math.*, **191** (2005), 339–392.

[HH10] T. Hidaka and F. Hiroshima, Pauli-Fierz model with Kato class potential and exponential decay, *Rev. Math. Phys.* **22** (2010), 1181–1208.

[HH13a] T. Hidaka and F. Hiroshima, Spectrum of semi-relativistic Pauli-Fierz model I, preparation.

[HH13b] T. Hidaka and F. Hiroshima, Self-adjointness of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, preparation.

[Hir97] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997), 489–530.

[Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215–1236.

[Hir00a] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, *Commun. Math. Phys.* **211** (2000), 585–613.

[Hir00b] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.

[Hir02] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 171–201.

[Hir05a] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models:applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431–470.

[Hir05b] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学 **57**(2005),70–92.

[Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314–355.

[Hir13] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models, preprint 2013.

[HI07] F. Hiroshima and K.R. Ito, Mass renormalization in nonrelativistic quantum electrodynamics with spin 1/2, *Rev. Math. Phys.* **19** (2007), 405–454.

[HL08] F. Hiroshima and J. Lorinczi, Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127–2185.

[HS08] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field I, *Math. Z.* **259** (2008) 657–680.

[HS12] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field II, preprint 2012.

[HS01] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz Hamiltonian with spin, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), 1091–1104.

[HS05] F. Hiroshima and H. Spohn, Mass renormalization in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 042302.

[HSSS11] F. Hiroshima, I. Sasaki, A. Suzuki and H. Spohn, *Enhanced binding in quantum field theory* COE Lecture Note **38** Kyushu University, 2011.

[HTL12] F. Hiroshima, T. Takaesu and J. Lőrinczi, A probabilistic representation of the ground state expectation of fractional powers of the boson number operator, *J. Math. Anal. Appl*, **395** (2012), 437–447.

[KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: The semi-relativistic Pauli-Fierz operator, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 375–407.

[KV86] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986), 1–19.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*, Studies in Mathematics **34**, DeGruyter 2011.

[LMS02] J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.

[MS12] T. Miyao and H. Spohn, Scale dependence of the retarded van der Waals potential, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 095215.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space, W. T. Martin and I. Segal (eds.)*, page 87. MIT Press, 1964.

[OS99] H. Osada and H. Spohn, Gibbs measures relative to Brownian motion, *Ann. Probab.* **27** (1999), 1183–1207.

[PF38] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten. *Nuovo Cimento* **15** (1938), 167–188.

[Sas05] I. Sasaki. Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.

[Sim74] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[Sim79] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979, 2nd ed. 2005.

[Sim82] B. Simon, Schrödinger semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 447–526.

[Spo89] H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 277–304.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44**, (1998), 9–16.

[Spo04] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.